

Grundlagen:

Sinus und Kosinus im Einheitskreis
Beliebige Werte berechnen
Einfache Gleichungen lösen

Die Grundlagen, sowie Musterbeispiele und Hintergründe
dazu stehen in 16012

Datei Nr. 16013

Stand: 1. Dezember 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt

Alle Aufgaben sind ohne Rechner bzw. Tabellen zu lösen!

1. Sinus- und Kosinuswerte berechnen.

Winkel im Gradmaß:

a) $\sin 135^\circ$

b) $\cos 300^\circ$

Winkel im Bogenmaß:

c) $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$

d) $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

2. Auf die Winkel zurückrechnen.

Berechne die passenden Winkel aus dem Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, für die gilt:

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b) $\cos \alpha = -0,5$

Berechne die passenden Winkel im aus dem Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$, für die gilt:

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$

d) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß bzw. Umgekehrt.

a) $\alpha = 215^\circ$

b) $x = \frac{5}{12}\pi$

4. Umrechnung Sinus in Kosinus bzw. Umgekehrt.

a) $\sin \alpha = 0,6 \Rightarrow \cos \alpha = ?$

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = ?$

Kannst Du auch zu a) und b) den Tangenswert berechnen?

Lösungen

1. Sinus- und Kosinuswerte berechnen.

a) $\sin 135^\circ$

Überlegung: Der Sinuswert ist die y-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis. Für Punkte im 1. und 2. Quadranten (Feld) sind die y-Koordinaten positiv. Bei $\alpha = 135^\circ$ liegt der Punkt im 2. Feld. Der gesuchte Sinuswert ist daher positiv und ist gleich groß wie der Sinuswert des Winkels $\alpha' = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Rechnung:

$$\underbrace{\sin}_{\text{y}} \underbrace{135^\circ}_{\text{2.Q.}} = + \sin(180^\circ - 135^\circ) = + \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

b) $\cos 300^\circ$

Überlegung: Der Kosinuswert ist die x-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis. Für Punkte im 1. und 4. Quadranten (Feld) sind die x-Koordinaten positiv. Bei $\alpha = 300^\circ$ liegt der Punkt im 4. Feld. Der gesuchte Kosinuswert ist daher positiv und ist gleich groß wie der Sinuswert des Winkels $\alpha' = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$.

Rechnung:

$$\underbrace{\cos}_{\text{x}} \underbrace{300^\circ}_{\text{4.Q.}} = + \cos(360^\circ - 300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

c) $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$

Überlegungen ähnlich wie oben, nur jetzt im Bogenmaß!

$\frac{4}{3}\pi$ ist größer als π (was 180° entspricht)

$$\underbrace{\sin}_{\text{y}} \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi\right)}_{\text{3.Q.}} = - \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \pi\right) = - \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$$

Denn $\frac{1}{3}\pi \hat{=} \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$!

d) $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

$$\underbrace{\cos}_{\text{x}} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{\text{2.Q.}} = - \cos\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = - \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$$

Denn $\frac{1}{4}\pi \hat{=} \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$!

2. Auf die Winkel zurückrechnen.

Berechne die passenden Winkel aus dem Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, für die gilt:

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. oder 4. Feld. $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. Feld: $\alpha_1 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

4. Feld: $\alpha_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Lösungsmenge: $L = \{ 240^\circ ; 300^\circ \}$.

b) $\cos \alpha = -0,5$

2. oder 3. Feld. $\cos 60^\circ = 0,5$

2. Feld: $\alpha_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

3. Feld: $\alpha_2 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

Lösungsmenge: $L = \{ 120^\circ ; 240^\circ \}$.

ÜBERLEGUNG:

Die Sinusfunktion ergibt die y-Koordinate, und diese ist im 3. oder 4. Feld negativ.

Außerdem ist $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ der Sinus von 60° .

Berechne die passenden Winkel im aus dem Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$, für die gilt:

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$

3. oder 4. Feld. $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$

$x_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

$x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{12}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$.

Im Gradmaß wären dies diese Rechnungen:

$\alpha_1 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

$\alpha_2 = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

d) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. oder 3. Feld. $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x_1 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

$x_2 = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

(Achtung x ist der Winkel im Bogenmaß und $\cos x$ ist die x-Koordinate des zugehörigen Punktes. Nicht verwechseln!)

Im Gradmaß wären dies diese Rechnungen:

$\alpha_1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\alpha_2 = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

3. Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß bzw. Umgekehrt.

Eine Möglichkeit ist es, mit Verhältnisgleichungen zu arbeiten.

Dabei geht man davon aus, dass das Bogenmaß die Länge des Kreisbogens ist, der den Radius 1 hat und zu dem zugehörigen Winkel passt.

Zu x passt also α genauso wie zum Bogen π der Winkel 180° passt.

a) $\alpha = 215^\circ$

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ} \quad \text{oder gleich eingesetzt:} \quad \frac{x}{45^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

Daraus folgt:
$$x = \frac{\pi \cdot 215^\circ}{180^\circ} = \frac{215}{180} \cdot \pi = \frac{43}{36} \pi$$

(Es wurde durch 5 gekürzt.)

b) $x = \frac{5}{12} \pi$

Weil jetzt der Winkel im Gradmaß gesucht ist, beginnt man damit:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha}{\frac{5}{12}} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Daraus folgt:
$$\alpha = \frac{15 \cdot 180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5}{12} = \left(\frac{75}{\pi} \right)^\circ \approx 25^\circ$$

Genauer kann man das ohne Taschenrechner nicht bestimmen.
Hier wurde für π näherungsweise 3 verwendet.

4. Umrechnung Sinus in Kosinus bzw. Umgekehrt.

a) $\sin \alpha = 0,6 \Rightarrow \cos \alpha = ?$

Der trigonometrische „Pythagoras“ lautet:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Eingesetzt: $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - 0,36} = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8$ (Es gibt also 2 Lösungen)

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = ?$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

Eingesetzt: $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 2}{9}} = \pm \frac{2}{3} \sqrt{2}$ (2 Lösungen)

Die zugehörigen Tangenswerte lauten:

a) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{\pm 0,8} = \pm \frac{6}{8} = \pm \frac{3}{4}$

b) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pm \frac{2}{3} \sqrt{2}}{\frac{1}{3}} = \pm \frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot \frac{3}{1} = \pm 2 \sqrt{2}$