

Zahlenfolgen

Große Einführung

Einführende Beispiele

Explizite und rekursive Berechnung

Schaubilder und Eigenschaften

Ergänzt durch viele Arten rekursiv definierter Folgen,
auch spezieller Wachstumsfolgen!

Ergänzender Einsatz von CAS-Rechnern mit Anleitung

Datei Nr. 40011

Friedrich Buckel

Stand: 19. Januar 2010

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	Was hier so alles passiert – Vorschau	4
2	Berechnung von Folgen durch <u>explizite</u> Bildungsvorschriften	5
	Trainingsaufgabe 1	10
3	Berechnung komplizierter Folgen mit CAS-Rechnern	11
3.1	Berechnung von $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$	11
	1. Mit TI Nspire CAS	11
	2. Mit CASIO ClassPad	12
3.2	Berechnung von Folgen mit Bruchtermen	13
4	Berechnung von Folgen durch <u>rekursive</u> Bildungsvorschriften	16
4.1	Erste Beispiele	16
4.2	Rekursiv definierte Folgen mit konstanter Summe $a_{n+1} + a_n = z$	20
4.3	Rekursiv definierte Folgen mit konstantem Produkt $a_{n+1} \cdot a_n = z$	22
	Trainingsaufgabe 2	23
5	Grundlagen zu <u>arithmetischen</u> und <u>geometrischen</u> Folgen	24
5.1	Arithmetische Folgen –rekursiv berechnet	24
5.2	Arithmetische Folgen – explizit berechnet	26
5.3	Folgen vom Typ $a_{n+1} = a_n + n \cdot d + c$ Arithmetische Folgen 2. Ordnung	30 30
5.4	Geometrische Folgen – rekursiv berechnet	35
	Trainingsaufgabe 3	36
5.5	Geometrische Folgen – explizit berechnet	37
	Trainingsaufgabe 4	41
6	Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen	42
6.1	Kontostand mit Zinseszins	42
6.2	Wachstum von Bakterienstämmen	44
7	(Wachstums-)Folgen des Typs $u_{n+1} = u_n \cdot q + r$	45
	Lösungen der Trainingsaufgaben	46 - 59

Hinweise

Die Abschnitte 1 bis 6 sind für absolute Anfänger gedacht. Im Abschnitt 7 wird es anspruchsvoll. Der in Abschnitt 7 genannte Folgentyp $u_{n+1} = u_n \cdot q + r$ führt zu verschiedenartigen Wachstumsfolgen. Weil dieser Abschnitt sehr speziell ist, wurde er in einen eigenen Text mit der Nummer 40020 ausgelagert.

Hier wurden schon ein wenig arithmetische und geometrische Folgen angesprochen. Diese haben aber ihre eigenen Texte, wo die zu ihnen gehörenden speziellen Fragstellungen trainiert werden.

1 Was hier so alles passiert – Vorschau für dieses Heft

Eine Liste von Zahlen wie $8; 14; 20; 26; \dots$

oder $1; -1; -3; -5; \dots$

heißt eine Zahlenfolge. Wichtig ist, dass man dabei die Reihenfolge nicht verändert. Im Gegensatz zu einer Menge von Zahlen, die man in geschweifte Klammern schreibt $\{1; -1; -3; -5; \dots\}$. In ihr ist die Reihenfolge beliebig, und man schreibt gleiche Zahlen nur einmal auf. Würde man diese Folge $3; 1; 0; 1; 3; 5 \dots$ in eine Menge umwandeln, würde sie so aussehen $\{0; 1; 3; 5; \dots\}$ oder so $\{3; 1; 0; 5; \dots\}$. Als Mengen sind sie gleich.

Man bezeichnet Folgen gerne mit Buchstaben und hängt die Nummer des Gliedes als Index an:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -3, \quad a_4 = -5, \dots$$

Und bezeichnet dann das allgemeine Glied der Folge gerne mit a_n .

Man verwendet auch die Funktionsschreibweise $a(1), a(2), \dots, a(n)$

Wie wird eine Folge in einer Aufgabe gegeben?

Die erste Möglichkeit ist die **aufzählende Schreibweise**, die wir soeben kennen gelernt haben:

$1; -1; -3; -5; \dots$ Die drei Punkte am Ende besagen, dass es „irgendwie“ weiter geht.

In der Regel meint man aber, dass ein erkennbares Bildungsgesetz weiter angewandt werden soll.

Hier kann man erkennen, dass jede folgende Zahl um 2 kleiner ist als der Vorgänger. Das 5. Glied der Folge sollte also $a_5 = -7$ sein. Doch man wissen, dass es unendlich viele verschiedene Folgen gibt, die alle mit denselben Gliedern beginnen und dann später unterschiedlich sind!

Die zweite Möglichkeit ist eine **explizite Bildungsvorschrift** (Berechnungsformel). Die Vorschrift

$a_n = 3 - 2 \cdot n$ liefert für jedes $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ einen Zahlenwert. Man kann leicht nachrechnen, dass man hiermit genau die Folge $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -3, a_4 = -5, a_5 = -7$ usw. erhält. In der Schreibweise $a(n) = 3 - 2n$ erkennt man eher, dass es sich bei einer Folge um eine Funktion handelt, deren Definitionsbereich hier die Menge der natürlichen Zahlen ist.

Die dritte Möglichkeit ist die **rekursive Bildungsvorschrift**. In unserem Beispiel ist der Nachfolger stets um 2 kleiner als der Vorgänger. Man kann den Vorgänger a_n und den Nachfolger a_{n+1} nennen,

oder a_{n-1} als Vorgänger und a_n als Nachfolger verwenden. Dann lautet die Formel so: $a_{n+1} = a_n - 2$

oder $a_n = a_{n-1} - 2$. Dies allein reicht aber nicht. Man muss noch angeben, wie das erste Glied der Folge heißen soll, also hier $a_1 = 1$. Mit $a_1 = 13$ erzeugt diese Formel eine andere Folge!

In diesem Heft werden ganz viele Folgen rekursiv erzeugt. Darunter sind finanzmathematische Anwendungen und andere Wachstumsfolgen. Raten sparen, Darlehen usw. gehören auch zu rekursiven Folgen und werden im 2. Teil des Textes (40020) besprochen. Bei vielen Aufgaben stellen die CAS-Rechner eine große Hilfe dar. Daher wird sehr oft als Ergänzung eine Anleitung zum Einsatz dieser Rechner gegeben.

4.2 Rekursiv definierte Folgen mit konstanter Summe $a_{n+1} + a_n = z$

(12) Gegeben: $a_{n+1} = -a_n$ mit $a_1 = 2$, also $a_{n+1} + a_n = 0$

Es folgt:

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 = -2 \\ a_3 &= -a_2 = 2 \\ a_4 &= -a_3 = -2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Folge $2, -2, 2, -2, \dots$

Es fällt auf, dass hier ständig zwei Zahlen abwechselnd erscheinen, und die Summe der beiden Zahlen ist stets 0, was ja schon die Formel zeigt.

(13) Gegeben: $a_{n+1} + a_n = 20$ mit $a_1 = 6$, was man auch so schreiben kann: $a_{n+1} = 20 - a_n$

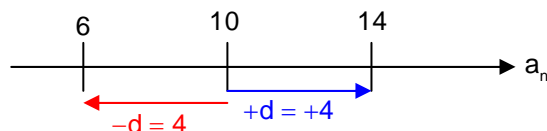
Diese Gleichung besagt, dass die Summe aufeinander folgender Glieder immer 20 ist.

Da $a_1 = 6$ ist, muss folglich der Nachfolger die Zahl 14 sein. Und deren Nachfolger (damit die Summe 20 wird) wieder 6, dann wieder 14 usw.

Man erkennt also, dass eine Folge, die eine aus einer rekursiven Formel der Art $a_{n+1} = z - a_n$ gebildet wird, immer so aussieht, dass die Summe aufeinander folgender Glieder gleich z ist. Beginnt man mit a_1 , dann ist $a_2 = z - a_1$, und dann $a_3 = z - (z - a_1) = a_1$. Also wechseln sich a_1 und $z - a_1$ ständig ab.

Interessant ist noch ein Trick, mit dem man eine explizite Formel erstellen kann.

Allditive Methode:



Zu Beispiel (13):

Die beiden vorkommenden Werte sind 6 und 14. Der Mittelwert von beiden ist

$$m = \frac{1}{2} \cdot (6 + 14) = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10.$$

Die beiden Zahlen haben von m den Abstand $d = 16 - 10 = 4$ bzw. $d = 10 - 6 = 4$

Subtrahiert man von 10 dieses $d = 4$, kommt man zu 6, addiert man aber 4, erhält man die andere Zahl 14. Also heißt die Formel doch etwa so: $a_n = 10 \pm 4$.

Doch wann nimmt man $+$ und wann $-$? Das regelt der Faktor $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$.

1. Möglichkeit:

$$a_n = 10 + (-1)^n \cdot 4, \quad \begin{array}{l} \text{dann erhält man für ungerades } n: \quad a_n = 10 - 4 = 6 \\ \text{und für gerades } n: \quad a_n = 10 + 4 = 14. \quad (\text{richtig!}) \end{array}$$

2. Möglichkeit:

$$a_n = 10 + (-1)^{n+1} \cdot 4 \quad \begin{array}{l} \text{dann erhält man für ungerades } n: \quad a_n = 10 + 4 = 14 \\ \text{und für gerades } n: \quad a_n = 10 - 4 = 6. \quad (\text{falsch}) \end{array}$$

Das würde passen, wenn $a_1 = 14$ und dann $a_2 = 6$ wäre!

Übersicht: Gegeben ist die Folge r, s, r, s, r, s, \dots durch $a_{n+1} + a_n = z$.

1. Schritt: Berechne den Mittelwert $m = \frac{1}{2} \cdot (r + s) = \frac{1}{2} \cdot z$

2. Schritt: Berechne den Abstand d der beiden Zahlen r und s von m :

Er ist praktisch der Radius des Intervalls von r bis s :

$$d = \left| \frac{1}{2}z - r \right| \quad (\text{man braucht den Betrag, wenn } r > s \text{ ist}).$$

3. Schritt: Die explizite Formel heißt dann:

$$\text{entweder } a_n = m + (-1)^n \cdot d \quad \text{oder} \quad a_n = m + (-1)^{n+1} \cdot d.$$

Je nachdem, ob die kleinere der beiden Zahlen r und s als a_1 auftritt oder als a_2 .

(14) Stelle eine rekursive und eine explizite Formel für die Folge $-3, 7, -3, 7, \dots$ auf.

a) Zuerst sollte man festhalten, dass die Summe aufeinander folgender Zahlen immer 4 ist:

$$a_{n+1} + a_n = 4 \quad \text{mit } a_1 = -3 \quad \text{ist somit die rekursive Definition.}$$

b) Eine explizite Darstellung sieht so aus:
$$a_n = \begin{cases} -3 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 7 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

c) Mit einem einzigen Term:

$$\text{Mittelwert: } m = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \text{„Radius“: } d = |2-7| = 5 \quad \text{oder} \quad d = |2-(-3)| = 5$$

$$\text{Formel: } a_n = m + (-1)^n \cdot d = 2 + (-1)^n \cdot 5 \quad \text{oder} \quad a_n = m + (-1)^{n+1} \cdot d = 2 + (-1)^{n+1} \cdot 5$$

$$\text{Probe: } a_1 = 2 - 5 = -3 \quad \text{stimmt!} \quad a_1 = 2 + 5 = 7 \quad \text{falsch.}$$

Die erste Formel wird richtig, weil bei ungeraden n $(-1)^n$ zu -1 wird und somit die kleinere Zahl entsteht, die auch die Folge anführt.

$$\text{Ergebnis: } a_n = 2 + (-1)^n \cdot 5$$

Hätten wir diese Folge $7, -3, 7, -3, 7, \dots$, dann müssten wir den zweiten Term nehmen, weil dann $(-1)^{n+1}$ ein Pluszeichen erzeugt und wir so zur größeren der beiden Zahlen kommen!

4.3 Rekursiv definierte Folgen mit konstantem Produkt

(15) Gegeben: $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$ mit $a_1 = 16$. also $a_{n+1} \cdot a_n = 2$

Dann folgt: $a_2 = \frac{2}{a_1} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$,

$$a_3 = \frac{2}{a_2} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 2 \cdot 8 = 16 \quad (= a_1)$$

$$a_4 = \frac{2}{a_3} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad (= a_2)$$

Ist der eine Faktor (also a_1) die Zahl 16, muss der andere $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ sein.

Und dessen Nachfolger muss wieder 16 sein, denn das Produkt beider Faktoren muss immer 2 sein.

Beginnt man mit einem anderen Anfangsglied, ändert sich die Folge.

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$ mit $a_1 = 4$,

dann ist $a_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Nach $\frac{1}{2}$ folgt wieder 4 usw., denn das Produkt ist stets 2.

Allgemein:

Lautet die rekursive Formel $a_{n+1} = \frac{z}{a_n}$ bzw. $a_{n+1} \cdot a_n = z$, dann folgt auf a_1 die Zahl $a_2 = \frac{z}{a_1}$

und darauf wieder $a_3 = \frac{z}{a_2} = z \cdot \frac{a_1}{z} = a_1$ usw.

Es wechseln sich also immer die beiden Zahlen a_1 und $\frac{z}{a_1}$ ab!

Aufstellung einer expliziten Formel dazu

1. Möglichkeit: additive Methode wie in 4.2 beschrieben

Der Mittelwert der Zahlen 16 und $\frac{1}{8}$ ist $m = \frac{1}{2} \cdot \left(16 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{129}{8} = \frac{129}{16}$.

Die Differenz von m zu a_1 ist $d = \left| \frac{129}{16} - 16 \right| = \frac{127}{16}$ (Radius des Intervalls von $\frac{1}{8}$ bis 16).

Die explizite Formel lautet dann: $a_n = \frac{129}{16} + (-1)^n \cdot \frac{127}{16}$ oder $a_n = \frac{129}{16} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{127}{16}$

Weil a_1 die größere der beiden Zahlen ist, benötigt man hier die zweite Formel:

Probe: $a_1 = \frac{129}{16} + \frac{127}{16} = \frac{2}{16} = \frac{256}{16} = 16$, was stimmt.

Mit der 1. Formel würde man erhalten:

$$a_1 = \frac{129}{16} - \frac{127}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \text{ was falsch ist.}$$

Dann hätte die Folge mit $\frac{1}{8}$ beginnen müssen!

2. Möglichkeit: multiplikative Methode

Wie man der Formel ansieht, treten hier hässliche Brüche auf. Diese entstehen dadurch, dass es sich hier um konstante Produkte handelt.

Man kann diese Methode auf eine multiplikative Methode übertragen.

Dann ersetzen wir

das arithmetische Mittel durch das geometrische Mittel
den Radius durch einen Quotienten
und die Summenformel durch eine Produktformel.

Ausführlich: Die Folge heißt $\frac{1}{8}, 16, \frac{1}{8}, 16, \frac{1}{8}, 16, \dots$

1. Schritt: Berechne das geometrische Mittel $m = \sqrt{a_1 \cdot a_2} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 16} = \sqrt{2}$

2. Schritt: Berechne den Quotienten q von 16 und m :

$$q = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

3. Schritt: Die explizite Formel heißt dann:

entweder $a_n = m \cdot q^{(-1)^n}$ oder $a_n = m \cdot q^{(-1)^{n+1}}$

Je nachdem, ob die a_1 die kleinere Zahlen ist oder nicht.

Probe mit $a_n = \sqrt{2} \cdot (8\sqrt{2})^{(-1)^n}$: $a_1 = \sqrt{2} \cdot (8\sqrt{2})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$ Richtig!

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot (8\sqrt{2})^1 = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 2 = 16$$

Probe mit $a_n = \sqrt{2} \cdot (8\sqrt{2})^{(-1)^{n+1}}$: $a_1 = \sqrt{2} \cdot (8\sqrt{2})^1 = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 16$ Falsch!

Trainingsaufgabe 2

Die Lösungen enthalten außer den geforderten 5 Werten viele Zusätze für fortgeschrittene Leser, etwa auch wie man explizite Formeln erstellt u. v. a.

a) $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$ mit $a_1 = 12$

b) $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ mit $a_1 = 4$

c) $a_{n+1} = 4 - a_n$ mit $a_1 = -1$

d) $a_{n+1} = a_n - 15$ mit $a_4 = 55$

e) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$ mit $a_6 = \frac{1}{4}$

f) $a_n = a_{n-1}^2$ mit $a_1 = 1$ (bzw. 2)

g) $a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}^2$ mit $a_1 = 2$

h) $a_n = a_{n-1} + \frac{n-1}{n}$ mit $a_1 = 4$

i) $a_{n+1} = 2^{a_n}$ mit $a_1 = 0$.

j) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ mit $a_1 = 1, a_2 = 2$