

Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 5

Heft 5: Berechnung von einfachen Abständen und Winkeln

Ganz einfache Erklärung der Grundlagen:
Die wichtigsten Aufgabenstellungen und Methoden-

Datei Nr. 64100

Stand 21. März 2011

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort !!!

Es gibt nun mehrere Texte zum Thema Geraden und Vektorrechnung. Dieser Text mit dem Zusatztitel „**ganz einfach**“ ist ein praktisch ausgerichteter Text mit Musterbeispielen und Aufgaben.

Die Methoden werden nicht hergeleitet sondern nur beschrieben und vorgeführt. Schüler, die wiederholen und auf eine Klausur oder eine Prüfung lernen, finden hier eine ausführliche Übersicht und können sich rasch nochmals über alles informieren. Zum Lernen der Hintergründe sollte man auf die bisherigen Texte zurückgreifen: 63020 bis 63023

Die Beispiele und Aufgaben dieses Textes wurden als eigene Aufgabensammlung unter der Nummer 63201 zusammengestellt.

Hinweis zur Berechnung von Längen:

Ich lasse die Ergebnisse stets exakt (als Wurzel) stehen, Näherungswerte kann jeder selbst dazu berechnen. Die meisten Lehrer verlangen hinter der berechneten Maßzahl die Maßeinheit LE, was Längeneinheit bedeuten soll. Auch dies lasse ich hier konsequent weg.

Doch folgender Hinweis sein erlaubt. Folgende Schreibweise ist inkorrekt:

$$a = |\overline{CB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41} \text{ LE}$$

Warum? Die Längeneinheit muss überall stehen, also so:

$$a = |\overline{CB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+36} \text{ LE} = \sqrt{41} \text{ LE}$$

Und bei längeren Rechnungen ist das oft mühsam. Daher bietet sich folgendes an:

$$a = |\overline{CB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41} \text{ (LE)}$$

Wenn die **Maßeinheit** in Klammern steht, ist sie nur der Hinweis darauf, dass überall die Einheit LE gemeint ist. Dann kann man darauf verzichten, hinter jeden Zahlenterm LE zu schreiben.

Das wäre übrigens falsch:

$$a = |\overline{CB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| \text{ LE} = \sqrt{1+4+36} \text{ LE} = \sqrt{41} \text{ LE}$$

Der Betrag mit dem Vektor ist noch keine Zahl sondern der „Befehl“: Berechne davon den Betrag.

Kompliziertere Abstandsberechnung folgen in 64110

Inhalt

1	Kann man Vektoren miteinander multiplizieren?	4
	Vektorprodukt	4
	Skalarprodukt	5
2	Wieso kann man mit dem Skalarprodukt Längen berechnen?	6
2.1	Berechnung der Diagonalen eines Rechtecks, Betrag eines Vektors	6
2.2	Berechnung der Raumdiagonalen eines Quaders, Betrag eines Vektors	7
2.3	Berechnungen: Betrag eines Vektors - Länge einer Strecke	8
	Grundaufgabe 1: Berechne den Betrag eines Vektors	8
	Grundaufgabe 2: Berechnung von Streckenlängen	8
	Diverse Musteraufgaben	9
	Trainingsaufgaben	10
3	Winkelberechnung	11
3.1	Anwendung des Kosinussatzes auf ein Vektordreieck. Herleitung der Kosinusformel für die Winkelberechnung (Theorieseite)	11
3.2	Übersicht über Winkelaufgaben	12
3.3	Winkelberechnung mit der Kosinusformel	13
3.3.1	Grundaufgabe 3: Winkel zwischen zwei Vektoren	13
	Tipps: Berechnungen mit ClassPad (CAS)	14
	Tipps: Berechnungen mit TI Nspire (CAS)	15
	Winkelberechnung mit CAS-internen Funktionen	16
3.3.2	Grundaufgabe 4: Winkel im Dreieck	17
3.3.3	Grundaufgabe 5: Schnittwinkel zweier Geraden	19
3.3.4	Grundaufgabe 6: Winkel zwischen zwei Ebenen	20
3.3.5	Grundaufgabe 7: Winkel zwischen g und E	21
	Trainingsaufgaben	22
	Musterlösungen für die Trainingsaufgaben	23
	Fortsetzung im Text 64110	

1 Kann man Vektoren miteinander multiplizieren?

Beim Einstieg in die Vektorrechnung lernt man, wie man Vektoren addiert und wie man Vielfache von Vektoren bildet, also Zahlen mit Vektoren multipliziert. Das Ergebnis aller dieser Berechnungen sind wieder Vektoren. Von interessierten Schülern kommt dann oftmals die Frage, ob man Vektoren auch multiplizieren kann. Dann muss man den Schülern klar machen, dass dies eine Frage der Definition ist. Man kann natürlich alles Mögliche definieren und das dann Multiplikation nennen.

Von Schülern, die vieles vergessen hatten, habe ich ab eine Berechnung wie die folgende gesehen:

- a) Aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden manche Ahnungslosen diesen **Produktvektor**:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-2) \\ (-4) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Art „Produkt“ hat jedoch keinerlei Anwendungsmöglichkeit, es ist eine Berechnung ohne Sinn und Zweck. Man kann es zwar „Produkt“ nennen, doch niemand benötigt es.

- b) Eine andere Vektormultiplikation hat sich dagegen durchgesetzt, man nennt das Ergebnis dann **Vektorprodukt** oder auch **Kreuzprodukt**. Die Definition dazu ist jedoch unglaublich kompliziert. Ich zeige sie hier:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

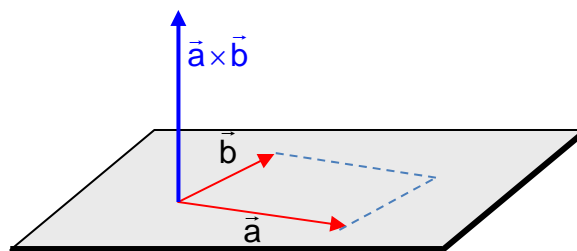
Dann sei $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$. Das sieht äußerst kompliziert aus.

Wie man darauf kommt?

Nun, das ist eine lange Geschichte ...

Wichtig ist im Augenblick nur, dass dieses

Vektorprodukt sehr gut anwendbar ist.



Eigenschaften des Vektorprodukts.

1. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und senkrecht auf \vec{b} .
2. Seine Länge (Betrag) ist genau so groß wie der Inhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

Damit lässt sich etwas anfangen. Mehr dazu, und wie man seine Koordinaten trickreich schnell berechnen kann steht im Text 66111.

- c) Es gibt eine weitere Art, Vektoren miteinander zu multiplizieren. Das folgende Produkt nennt man **Skalarprodukt** und schreibt es so $\vec{a} \cdot \vec{b}$ oder ohne Punkt einfach $\vec{a}\vec{b}$.

Das Ergebnis der Skalarmultiplikation ist jedoch **kein Vektor mehr** ist, sondern eine Zahl (was man früher Skalar genannt hat, das heißt so viel wie „kein Vektor sondern eine Zahl“).

Definition: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dann sei } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (1)$$

$$\text{Daraus folgt auch: } \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \text{ kürzt man als } \vec{a}^2 \text{ ab: } \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (2')$$

$$\text{Zahlenbeispiele: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 - 1 + 15 = 18, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 - 1 + 15 = 18$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 9 + 36 = 49 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 12 - 20 + 8 = 0$$

Die ersten beiden Beispiele lassen erkennen, dass man die **Faktoren vertauschen darf**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

In der zweiten Zeile wird das Skalarprodukt zweimal 0. Das erste Mal war es zu erwarten, denn es wurde ja mit dem Nullvektor multipliziert. Doch das letzte Produkt ist erstaunlich: Hier erhält man das Ergebnis 0, obwohl keine Null in den Vektorkoordinaten auftaucht. Vom Zahlenrechnen ist man es gewohnt, dass ein Produkt nur dann 0 wird, wenn die Null als Faktor beteiligt ist. Beim Skalarprodukt ist das offenkundig nicht der Fall. Aber gerade dieses Ergebnis hat eine ganz wichtige Bedeutung: Wenn ein Skalarprodukt zweier Vektoren 0 wird, ohne dass der Nullvektor daran beteiligt ist, dann sind die beiden multiplizierten Vektoren zueinander orthogonal. Das hat weitreichende Konsequenzen.

Jetzt erkennt man: Dieses Skalarprodukt ist eine sehr sinnvolle Einrichtung: Wir werden auf den nächsten Seiten sehen, wie man damit Streckenlängen und Winkel berechnen kann.

Hinweis:

Diese Berechnungsvorschrift (1) des Skalarprodukts setzt voraus, dass sich die Koordinaten der Vektoren auf ein kartesisches Koordinatensystem beziehen. (Ein solches hat paarweise orthogonale Achsen und die Einheiten auf den Achsen haben die einheitliche Länge 1.) Würde man also schräge Achsen andere Längeneinheiten verwenden (etwa auf der x-Achse die Längeneinheit 2 cm, auf der y-Achse 5 cm usw.), müsste man eine ganz andere Definition verwenden. Dann sieht dazu passende Skalarprodukte beispielsweise so aus: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 4a_1 b_3 + 4a_3 b_2$.

Es gab jahrelang Abituraufgaben zu solchen Konstellationen.

2 Wieso kann man mit dem Skalarprodukt Längen berechnen?

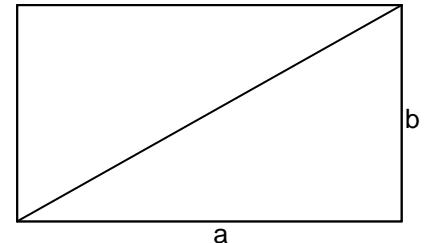
Um das zu verstehen – eine Pflicht für jeden Abiturienten – muss man sich an den Satz des Pythagoras erinnern, und daran, wie man mit seiner Hilfe die Diagonale eines Rechtes und die Raumdiagonale eines Quaders berechnet.

2.1 Berechnung der Diagonalen eines Rechtecks

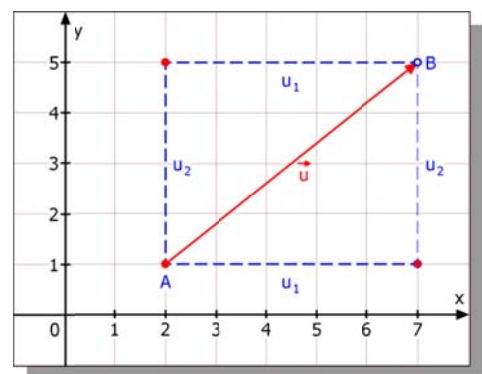
Die Seiten des Rechtecks seien a und b .

Dann gilt für die Diagonale d nach Pythagoras:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (3)$$



Nun machen wir dasselbe für einen Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, den wir in ein Rechteck einbetten. Dessen Seitenlängen entsprechen den Koordinaten u_1 und u_2 . In der Abbildung ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$



Für den **Betrag des Vektors** \vec{u} schreibt man $|\vec{u}|$.

Die Bezeichnung „Länge eines Vektors“ eignet sich nicht, denn ein Vektor ist ja eine Pfeilmenge, und eine Menge kann keine Länge haben. Nur die unendlich vielen Pfeile des Vektors haben eine Länge, und diese nennt man dann den Betrag des Vektors.

Entsprechend der Formel (3) berechnet man hier den Betrag des Vektors so:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (4)$$

Andererseits folgt durch Berechnung des Skalarprodukts von \vec{u} mit sich selbst:

$$\vec{u}^2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 \quad (5)$$

Daher kann man (5) in (4) einsetzen und erhält diese beiden Formeln:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2} \quad (4')$$

Oder durch Quadrieren: $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \quad (4'')$

Anmerkungen

Mit der Gleichung (4'') haben Schüler immer Schwierigkeiten. Man muss sie so verstehen: Links wird eine Zahl quadriert, nämlich die Länge der Pfeile eines Vektors, Rechts wird das Skalarprodukt eben dieses Vektors mit sich selbst berechnet.

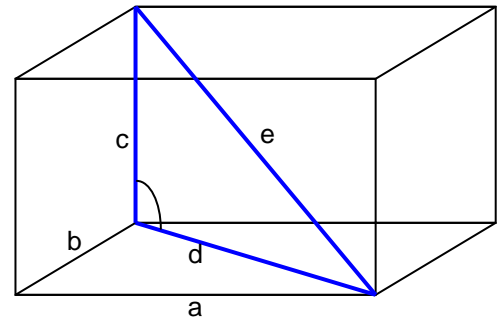
Und wegen des Satzes von Pythagoras ergeben beide Berechnungen dasselbe Ergebnis.

Und in (4') darf man nicht auf die Idee kommen: ~~$\sqrt{\vec{u}} \leq \vec{u}$~~ . $\sqrt{\vec{u}^2}$ ist eine Zahl und kein Vektor!

2.2 Berechnung der Raumdiagonalen eines Quaders

Das Schrägbild eines Quaders mit den Kantenlängen a , b und c ist dargestellt. Die Raumdiagonale e geht von einer Ecke mitten durch den Quader zur gegenüberliegenden Ecke. Es gibt 4 solche Raumdiagonalen. Alle sind gleich lang und werden so berechnet:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (6)$$



Woher kommt diese Formel? Das ist ganz leicht:

Für die Diagonale d in der Grundfläche gilt nach Pythagoras: $d^2 = a^2 + b^2$.

Und für die Raumdiagonale e gilt im aufgestellten blauen Dreieck nach Pythagoras: $e^2 = d^2 + c^2$

Nun ersetzt man d^2 durch $a^2 + b^2$ und erhält $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$, und schon entsteht (5).

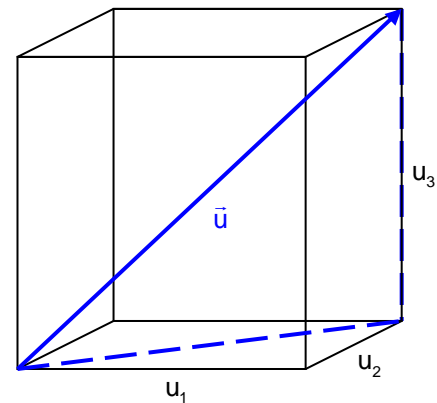
Nun machen wir dasselbe für einen Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, den wir

in einen Quader einbetten. Dessen Seitenlängen entsprechen den Koordinaten u_1 , u_2 und u_3 .

Wendet man die Formel (5) darauf an, folgt für den

Betrag des Vektors \vec{u} :

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (7)$$



Andererseits folgt durch Berechnung des Skalarprodukts von \vec{u} mit sich selbst:

$$\vec{u}^2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (8)$$

Daher kann man (7) in (6) einsetzen und erhält diese beiden Formeln:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2} \quad (7')$$

Diese Formel gilt also zweidimensional genauso wie dreidimensional.

Quadriert man (7') entsteht dies folgende Gleichung, die wir auf der nächsten Seite benötigen:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 \quad (7'')$$

Sie ist durchaus nicht selbstverständlich: Links wird die Zahl $|\vec{u}|$ quadriert, rechts wird der Vektor \vec{u} mit sich selbst multipliziert. (7'') sagt uns, dass beide Ergebnisse gleich sind.

2.3 Berechnungen: Betrag eines Vektors - Länge einer Strecke

Grundaufgabe 1: Berechne den Betrag eines Vektors.

Dazu verwendet man die Formel (7):

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\text{a) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 11^2} = \sqrt{25 + 4 + 121} = \sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}$$

Manche Betragsberechnungen lassen sich durch Herausziehen eines Faktors vereinfachen, denn das 12-fache eines Vektors hat auch dessen 12-fache Länge:

$$\text{c) } \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ -36 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{144 + 2304 + 1296} = \text{????} \quad \text{Dies ist im Kopf nicht zu machen.}$$

$$\text{Aber dies: } \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ -36 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = 12 \cdot \sqrt{1 + 16 + 9} = 12 \cdot \sqrt{26}$$

$$\text{d) } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{49}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{138}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{138} \quad \text{bzw. so:}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \sqrt{25 + 49 + 64} = \frac{1}{3} \sqrt{138}$$

Grundaufgabe 2: Berechnung von Streckenlängen

a) A(1|3|1), B(2|1|0), C(5|-3|-1). Dieses Dreieck hat folgende Seitenlängen:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{CA}| = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$$

$$\text{Mittelpunkts-Formel: } \vec{m}_{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}): \quad M_{AB} \left(\frac{3}{2} \mid 2 \mid \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{CM}_{AB} = \vec{m}_{AB} - \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Länge der Seitenhalbierenden: } s_c = |\vec{CM}_{AB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{49 + 100 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{158}$$

- b) Ergänze das Dreieck $A(-4|3|5)$, $B(-2|2|3)$, $C(3|5|4)$ zu einem Parallelogramm ABCD.
Wie lang sind seine Diagonalen?

Parallelogrammbedingung: $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D(1|6|6)$$

Diagonale AC: $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e = |\overline{AC}| = \sqrt{49 + 4 + 1} = \sqrt{55}$

Diagonale BD: $\overline{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f = |\overline{BD}| = \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}$

- c) Für welches t hat die Strecke AB mit $A(-1|4|3)$, $B(t-2|2t|3+t)$ die Länge $\sqrt{17}$?

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} t-2 \\ 2t \\ 3+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t-4 \\ t \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(t-1)^2 + (2t-4)^2 + t^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2} = \sqrt{6t^2 - 18t + 17}$$

Bedingung: $\sqrt{6t^2 - 18t + 17} = \sqrt{17} \quad | \text{quadrieren}$
 $t^2 - 3t = 0$

Eine quadratische Gleichung ohne Absolutglied löst man durch Ausklammern:

$$t \cdot (t - 3) = 0$$

Der 1. Faktor liefert $t_1 = 0$, der zweite Faktor $t_2 = 3$.

- d) Welcher Punkte der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat von $A(-1|4|3)$ den Abstand $\sqrt{17}$?

ACHTUNG: Dies ist mit anderen Worten dieselbe Aufgabenstellung wie in c).

Zur Lösung verwendet man nämlich einen beliebigen Punkt von g . Punkte einer Geraden berechnet man ja durch die Geradengleichung, welche nichts anderes ist, also die Berechnungsvorschrift für die Ortsvektoren ihrer Punkte. Dazu muss man den Parameterwert t einsetzen und zusammenfassen.

Für einen beliebigen Punkt lässt man t einfach stehen: $P(-2+t|0+2t|3+t)$.

Vergleicht man das mit Aufgabe c), dann erkennt man, dass dieser Punkt genau dem Punkt B entspricht.

Den Rest der Lösung kann man dann in g) nachlesen.

Trainingsaufgaben

- 1) Berechne ohne Rechner die Beträge der folgenden Vektoren. Vereinfache wo möglich.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 125 \\ -500 \\ 1000 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Berechne die Länge der Strecken AB:

a) $A(2|4|9)$, $B(-3|-3|5)$, b) $A(6|19|-23)$, $B(26|9|-3)$

- 3) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist: $A(6|3|0)$, $B(9|6|0)$, $C(9|3|3)$.

Berechne dann den Mittelpunkt M der Seite AB und damit den Inhalt des Dreiecks.

- 4) Welcher Punkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat vom Ursprung den Abstand $\sqrt{10}$

- 5) a) Zeige, dass alle Punkte von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ von den Punkten $A(1|3|-6)$ und

$B(7|-1|2)$ den gleichen Abstand haben.

Welchen Namen könnte man daher dieser Geraden geben?

- b) Gib eine zweite Gerade mit derselben Eigenschaft an.

- 6) Man denke sich eine Kugel um den Mittelpunkt $M(4|-3|5)$ mit dem Radius 11.

Untersuche die Lage der Punkte $A(6|3|-4)$, $B(1|6|-3)$, $C(-1|-5|6)$ relativ zur Kugel.

(Das heißt: Liegen sie innerhalb, außerhalb oder auf der Kugel?)

- 7) Gegeben ist eine Kugel durch $M(2|5|-1)$ und $r = 7$.

Bestimme die Lage der Punkte $A(6|-1|4)$, $B(8|3|2)$, $C(0|8|2)$.

- 8) Gegeben ist ein Kreis durch $M(-3|10)$ und $r = 15$.

Bestimme die Lage der Punkte $A(4|5)$, $B(10|1)$, $C(6|-2)$.

3 Winkelberechnung

3.1 Anwendung des Kosinussatzes auf ein Vektordreieck Herleitung der Kosinusformel für Winkelberechnung (Theorie)

In der Trigonometrie lernt Kosinussatz kennen.

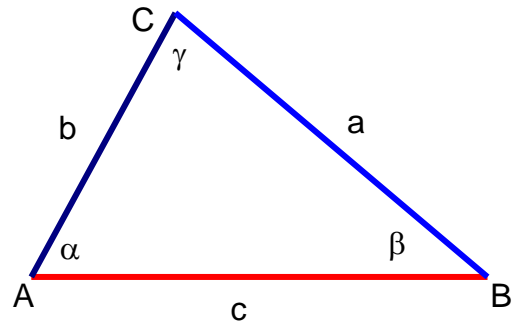
Er wird bei nicht-rechtwinkligen Dreiecken angewandt.

Es gibt ihn in drei Formen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos \alpha \quad (9a)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \quad (9b)$$

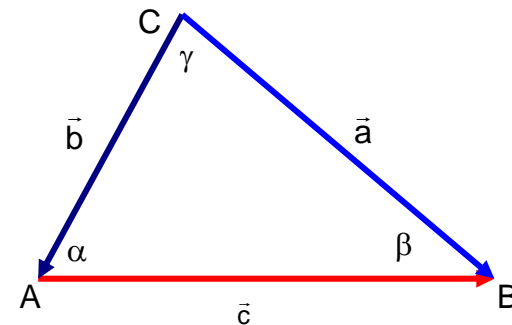
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad (9c)$$



Die zweite Abbildung entspricht ganz der ersten, nur wurden die Dreiecksseiten durch Vektorpfeile ersetzt.

Um den Kosinussatz hier anwenden zu können, muss man die Seitenbezeichnungen durch die Beträge der Vektoren ersetzen. Aus (9c) wird dann:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \quad (9c')$$



Auf Seite 7 wurde hergeleitet: $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2$

Diese Formel wenden wir auf (9c') dreimal an und erhalten:

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \quad (8).$$

Aus der Abbildung erkennt man, dass $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ ist, also gilt

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Multipliziert man \vec{c} , also $(\vec{a} - \vec{b})$ mit sich selbst, erhält man

$$\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$

Weil $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ist, kann man vereinfachen:

$$\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Jetzt ersetzen wir in (8) die linke Seite damit und erhalten:

$$\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$

Daraus folgt:

$$-2\vec{a}\vec{b} = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$

Und schließlich:

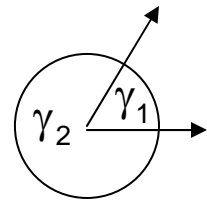
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$

Und hier unser großes Ziel:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (9)$$

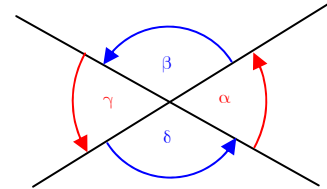
3.2 Übersicht über Winkelaufgaben

(1) Zu zwei Vektoren gibt es zwei Winkel. Ihre Summe beträgt 360° .



(2) In einem Dreieck gibt es 3 Innenwinkel. Ihre Winkelsumme beträgt 180° .
Unter diesen Winkeln können auch stumpfe Winkel sein, also zwischen 90° und 180° .
Es wird schwierig sein, diese zu identifizieren.

(3) Zwei Geraden, die sich schneiden, erzeugen 4 Schnittwinkel, von denen je 2 gegenüberliegende Winkel gleich groß sind. Man nennt sie Scheitelwinkel. Benachbarte Winkel (sie heißen Nebenwinkel) haben die Summe 180° .

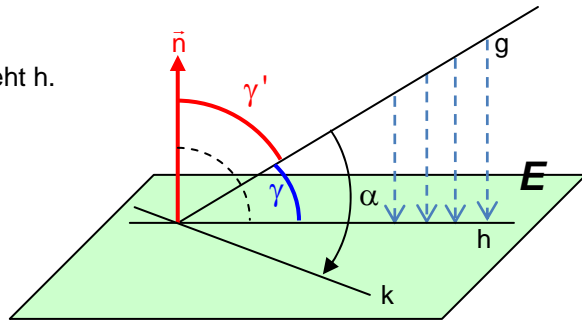


Sind die Geraden orthogonal, sind natürlich alle vier Winkel 90° groß.

(4) Zwischen einer Geraden und einer Ebene (die sich schneiden) gibt es zunächst keinen sichtbaren Winkel. Erst wenn man die Gerade projiziert, sieht man zwei Geraden und kann einen Winkel identifizieren:

Projiziert man g senkrecht auf E , dann entsteht h .

Der Winkel γ zwischen g und h ist der kleinste mögliche Winkel. Projiziert man g schräg auf E , entsteht beispielsweise k , und der dargestellte Winkel α zwischen g und k ist größer als γ .



(Nicht vergessen, es gibt zu jedem dieser Winkel noch einen zweiten ($180^\circ - \gamma$).

Ein Trick hilft jedoch, die schwierige Aufgabe mit der Projektionsgeraden zu umgehen:

Die Normalenvektoren \vec{n} der Ebene bilden mit g einen sofort erkennbaren Winkel γ' , wenn man einen Pfeil von \vec{n} im Schnittpunkt von g und E ansetzt. Wegen $\gamma + \gamma' = 90^\circ$ hat man dann auch schnell γ .

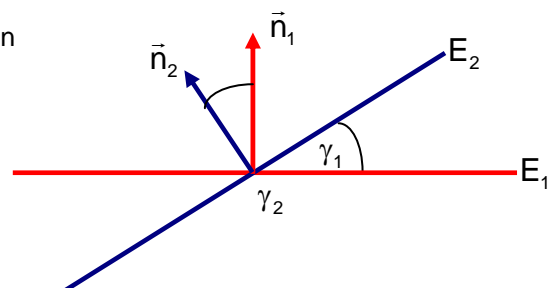
Es sei noch auf einen Trick hingewiesen: Die Formel (9) gestattet Winkelberechnungen.

Ersetzt man in ihre \cos durch \sin , dann wird gerade der Nebenwinkel ($90^\circ - \gamma$) berechnet.

Und daher liefert $\sin \gamma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$ tatsächlich nicht den Winkel zwischen \vec{n} und g , sondern den gesuchten Winkel γ .

(5) Zwischen 2 Ebenen bestimmt man ebenfalls den kleinsten Winkel als denjenigen, der zwischen ihren Normalenvektoren vorkommt:

$$\cos \sphericalangle(E_1, E_2) = \cos \gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



3.3 PRAXIS: Winkelberechnung mit der der Kosinusformel

Die Themen „Schnittwinkelberechnungen zwischen Gerade und Ebene“ sowie „zwischen zwei Ebenen“ werden im Text 64300 ausführlich im Zusammenhang mit größeren Aufgaben behandelt.

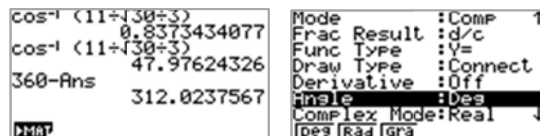
3.3.1 Grundaufgabe 3: Berechne die Winkel zwischen den Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Beispiele:

$$\text{a) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{5+2+4}{\sqrt{25+1+4} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{11}{\sqrt{30} \cdot 3}$$

Mit dem Taschenrechner:

(Grafikrechner CASIO fx9860)



Die erste Berechnung war falsch,

der Grund war der, dass die Winkelberechnung auf Bogenmaß eingestellt war.

Daher wurde (rechte Abb.) auf *Degree* (Gradmaß) umgestellt und neu berechnet.

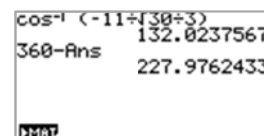
Der zweite Winkel ist die Differenz zu 360° .

Ergebnis: $\gamma_1 \approx 47,98^\circ$, $\gamma_2 \approx 312,02^\circ$.

$$\text{b) } \vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-5-2+4}{\sqrt{25+1+4} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{-3}{\sqrt{30} \cdot 3}$$

Mit dem Taschenrechner:

(Grafikrechner CASIO fx9860)



Ist der Kosinus negativ, dann liegt der Winkel im

2. oder 3. Feld, das heißt $\gamma_1 \approx 132^\circ$ und $\gamma_2 \approx 228^\circ$.

$$\text{c) } \vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-6+4+2}{\dots} = \frac{0}{\dots} = 0$$

Den Nenner muss man dann nicht mehr ausrechnen:



zu a) Winkelberechnung mit dem CAS-Rechner CASIO ClassPad

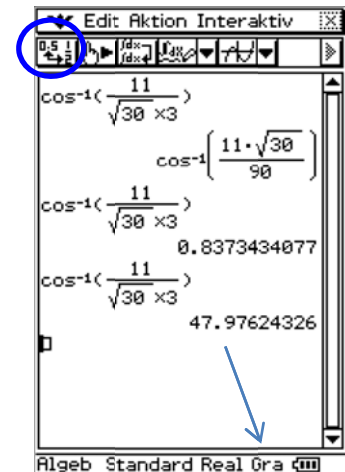
aus dieser Formel heraus:

Zuerst zeigt der Rechner nur einen umgeformten Term an.

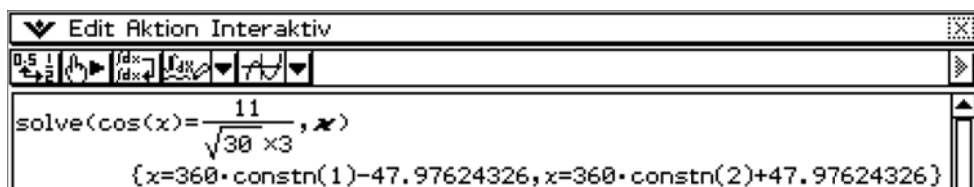
Nach Anklicken des blau umrandeten „Umwandlungs-Icons“ erhält man das erste Ergebnis. Es wurde allerdings auch auf Grundlage des Bogenmaßes berechnet. (2. Zeile)

Nach Umstellung auf das Gradmaß (Pfeil) erhält man γ_1 (3. Zeile).

Den zweiten Winkel berechnet man wie oben durch Subtraktion von 360° .

**WARNUNG:**

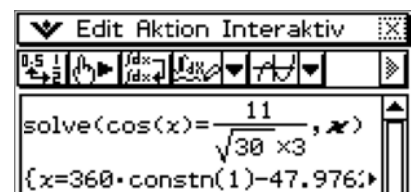
Es gibt immer wieder Schüler, die $\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{30} \cdot 3}$ als Gleichung auffassen und sie mit ihrem CAS-rechner auch als Gleichung lösen wollen. CASIO ClassPad liefert dann diese unangenehme Überraschung:



Zunächst einmal zeigt der Handheld nur diesen Ausschnitt an.

Die überlange Zeile muss man mühsam „erklicken“.

(Mein Computer kann dies besser simulieren.)



Der Rechner löst hier diese Aufgabe: Für welche x -Werte liefert die Kosinusfunktion den

Wert $\frac{11}{\sqrt{30} \cdot 3}$? Weil die Kosinusfunktion die Periode 360° hat, gibt es unendlich viele Lösungen.

Man könnte sie so schreiben:

Zu $x_1 = 47,976...^\circ$ gibt es die unendlich vielen Werte $47,957... + z \cdot 360^\circ$ ($z =$ ganze Zahl)

und zu $x_2 = 360^\circ - 47,976...^\circ \approx 312,024^\circ$ gibt es noch die Werte $312,024^\circ + z \cdot 360^\circ$.

Also ein für unsere geometrische Anwendung völlig überzogenes Ergebnis.

Man vermeide „solve“ an dieser Stelle!

zu a) Winkelberechnung mit dem CAS-Rechner TI Nspire

aus der Formel $\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{30 \cdot 3}}$ heraus:

Mit den Voreinstellungen

„Grad“ und „Approximiert“
erhält man das Ergebnis so:

The image shows three screenshots of the TI Nspire calculator interface. The top screenshot is the 'Allgemeine Einstellungen' (General Settings) dialog box, where 'Winkel' (Angle) is set to 'Grad' and 'Berechnungsmodus' (Calculation mode) is set to 'Approximiert' (Approximate). The middle screenshot shows the calculator screen with the expression $\cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{30 \cdot 3}}\right)$ entered and the result 47.9762 displayed. The bottom screenshot shows the same expression with the result 47.9762, and a red arrow pointing to the 'Enter' key, indicating the next step in the process.

Wer aber im Moment der Berechnung die oft günstige Einstellung „Exakt“ eingestellt hat, erlebt folgende Überraschung:

The image shows three screenshots of the TI Nspire calculator interface. The top screenshot is the 'Allgemeine Einstellungen' (General Settings) dialog box, where 'Winkel' (Angle) is set to 'Grad' and 'Berechnungsmodus' (Calculation mode) is set to 'Exakt' (Exact). A yellow lightning bolt icon is next to this screenshot. The middle screenshot shows the calculator screen with the expression $\cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{30 \cdot 3}}\right)$ entered and the result $\cos^{-1}\left(\frac{11 \cdot \sqrt{30}}{90}\right)$ displayed. The bottom screenshot shows the same expression with the result $\cos^{-1}\left(\frac{11 \cdot \sqrt{30}}{90}\right)$ and a red arrow pointing to the 'Ans' key, indicating the next step in the process.

Die Formel wird nicht berechnet – weil es dazu kein exaktes (die Voreinstellung verlangt dies ja) Ergebnis gibt. Dann muss man sich durch die Menüs hindurcharbeiten: Menü 2 – Zahlen – Dann 1 – In Dezimalzahlen konvertieren. Dann erscheint die Einblendung „Ans▷Decimal“. Drückt man „enter“, ändert sich die Darstellung und man sieht das, was der letzte Screenshot darstellt.

WARNUNG:

Auch bei diesem Rechner sollte man die Berechnungsaufgabe $\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{30 \cdot 3}}$ nicht als Gleichung interpretieren, die man mit „solve“ lösen möchte. Denn passiert folgende „Katastrophe“:

Der Rechner interpretiert die Aufgabe als Funktionenaufgabe:

„Für welche x besitzt die Funktion $f(x) = \cos x$ den Wert $\frac{11}{\sqrt{30 \cdot 3}}$?“

The screenshot shows the TI Nspire calculator screen with the 'solve' function used to solve the equation $\cos(x) = \frac{11}{3 \cdot \sqrt{30}}$. The result is $x = 360 \cdot (n_2 + 0.133267)$ or $x = 360 \cdot (n_2 - 0.133267)$.

Wegen der Periodizität der Kosinusfunktion gibt es unendlich viele solche Zahlen für x.

Die erste Lösung würde man dann für $n_2 = 0$ erhalten: $x_1 = 360 \cdot (0 + 0,133267) = 47,796\dots$

usw. Eine für geometrische Anwendungen völlig ungeeignete Lösung.

Winkelberechnung mit einer CAS-internen Vektorformel

1. CASIO ClassPad:

Die zuvor berechneten Winkel zwischen \vec{u} und \vec{v}

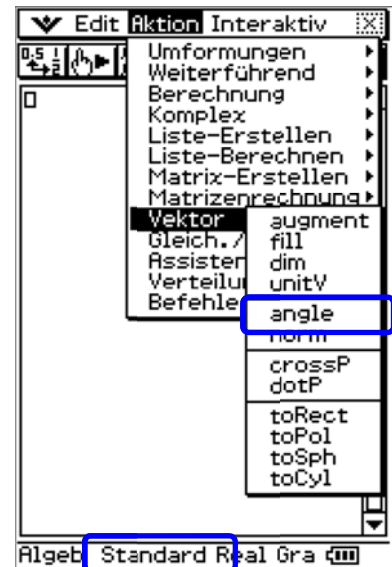
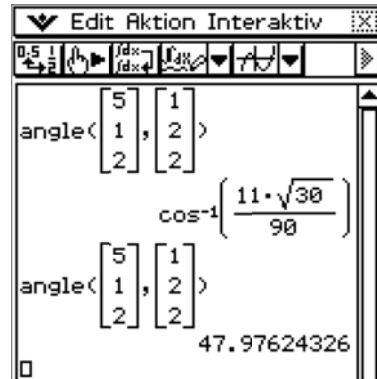
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kann man über den Befehl
angle berechnen lassen.

Bei der Voreinstellung
„Standard“ erhält man die
Ausgabe der 1. Zeile,
das man durch Anklicken des
Umwandlungsicons in die Dezimalzahl 47,976... umwandelt.

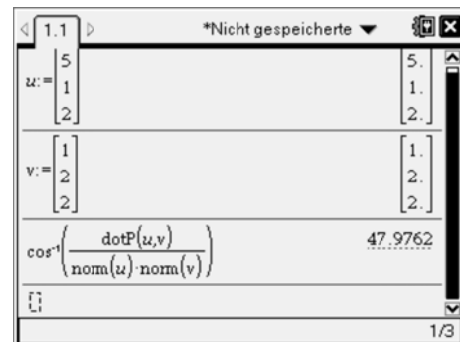
(2. Zeile).

Klickt man jedoch auf die Voreinstellung „Standard“, dann erscheint an dieser Stelle „Dezimal“ worauf
Das Ergebnis sofort als Dezimalzahl angezeigt wird.



2. TI Nspire:

Die angle-Funktion leistet hier nicht das Gewünschte.
Ich empfehle daher, wie auf der Seite zuvor zu verfahren.
Hat man allerdings die betreffenden Vektoren schon
definiert, dann kann man das Skalarprodukt über dotP()
und den Betrag der Vektoren mit norm() berechnen
lassen, etwa so wie gezeigt.



3.3.2 Grundaufgabe 4: Berechne die Innenwinkel eines Dreiecks.

a) $A(5|1|0)$, $B(2|0|-7)$, $C(3|2|-1)$ **Berechne Seitenlängen und Innenwinkel.**

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Seitenlängen zuerst: $a = |\overline{CB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$

$$b = |\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad c = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$$

Diese Berechnungen benötigt man ohnehin für die Nenner der Winkelformel.

Die Bezeichnungen seien wie üblich, also α an der Ecke A usw.

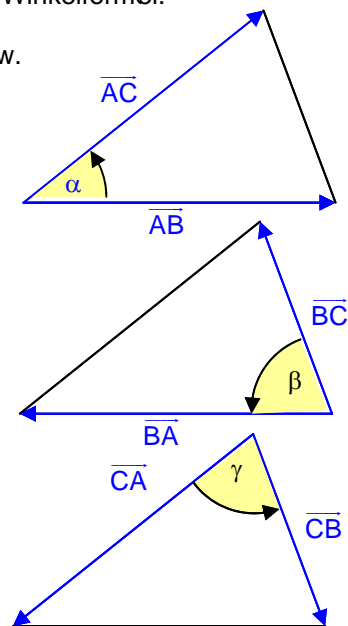
$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6-1+7}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{3+2+42}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{47}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CA}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-2+2-6}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-6}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{6}}$$

Taschenrechner:

```
cos⁻¹(12/√59√6)
58.37256933
cos⁻¹(47/√59√41)
17.13595176
cos⁻¹(-6/√41√6)
112.4914789
```



Eine kleine Kontrolle: Der größten Seite c liegt auch der größte (hier stumpfe Winkel gegenüber.

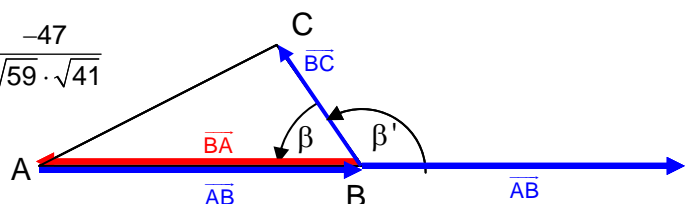
Achtung: Die drei Abbildungen zeigen, wie man die Vektoren zu verwenden hat. In der folgenden Rechnung wurde β mit einem falsch orientierten Vektor berechnet:

$$\cos \beta' = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{-3-2-42}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{-47}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}}$$

Wenn man statt \overline{BA} \overline{AB} verwendet.

wird der Kosinus negativ und man

erhält $\beta' \approx 162,87$, also den Außenwinkel!



Man sollte immer Vektoren verwenden, die vom Scheitel des Winkels ausgehen.

b) $A(2|4|-3)$, $B(2|-2|-3)$, $C(1|2|3)$ **Berechne Seitenlängen und Innenwinkel.**

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Seitenlängen des Dreiecks: $a = |\overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$

$$b = |\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$$

$$c = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 6$$

Innenwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}}{6 \cdot \sqrt{41}} = \frac{0+12+0}{6 \cdot \sqrt{41}} = \frac{2}{\sqrt{41}}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}{6 \cdot \sqrt{53}} = \frac{24}{6 \cdot \sqrt{53}} = \frac{4}{\sqrt{53}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{41}} = \frac{1-8+36}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{41}} = \frac{29}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{41}}$$

Man kann den 3. Winkel natürlich auch über die Winkelsumme berechnen!

$\cos^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{41}} \right)$	71.79923974
$\cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{53}} \right)$	56.6712422
$\cos^{-1} \left(\frac{29}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{41}} \right)$	51.52951806
$180 - 71.8 - 56.7$	51.5
▶MAT	

3.3.3 Schnittwinkel zweier Geraden.

Wenn sich zwei Geraden schneiden, gibt es vier Schnittwinkel.

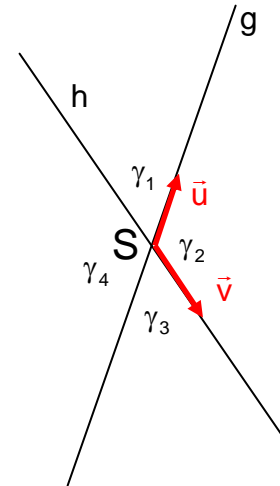
Die jeweils gegenüberliegenden sind als Scheitelwinkel gleich.

Also folgt: $\gamma_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \gamma_4$ und $\gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$ usw.

Es kann jetzt also keine größeren Winkel als 180° geben, und der kleinere von beiden ist kleiner als 90° . (Es sei denn, die Geraden sind orthogonale, dann sind alle vier Winkel gleich groß: 90° .)

Durch eine einfache Maßnahme garantiert man nun, dass die Kosinusformel immer den kleineren Winkel liefert: Man setzt für den Kosinus Betragsstriche. Dann ist $0 \leq \gamma_1 \leq 90^\circ$:

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Grundaufgabe 5: Berechne die Schnittwinkel zweier Geraden

$$\text{a) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diese Geraden haben denselben Aufpunkt, also schneiden sie sich.

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|8 - 4 - 13|}{\sqrt{16 + 16 + 49} \cdot \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-10|}{9 \cdot 3} = \frac{10}{27}$$

$$\text{Ergebnis: } \gamma_1 = 68,26^\circ \Rightarrow \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 = 111,74^\circ$$

$$\text{b) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|5 - 3 - 2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \quad \text{Wenn der Zähler Null wird, muss man den Nenner gar nicht weiter ausrechnen.}$$

Der Schnittwinkel beträgt also 90° , d. h. die Geraden sind orthogonal.

VORSICHT: Das stimmt aber nur dann, wenn sie sich schneiden!

Lageüberprüfung mit der Determinantenmethode: (Text 63300 Seite 6 ff)

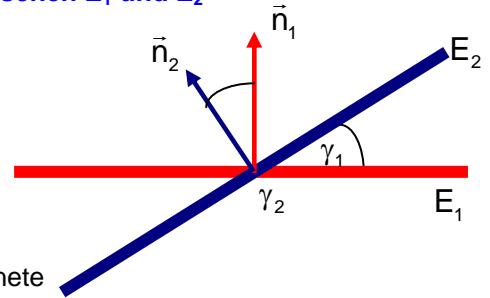
$$D = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \overline{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 6 + 12 - 6 - 15 + 12 = 12 \neq 0$$

Also sind die Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \overline{AB} linear unabhängig, also liegen g und h nicht in einer Ebene, sind also windschief: Es gibt somit weder einen Schnittpunkt noch einen Schnittwinkel.

Eine böse Falle! Also aufpassen und nicht voreilige Schlüsse ziehen!

3.3.4 Grundaufgabe 6: Berechne die Schnittwinkel zwischen E_1 und E_2

Die Abbildung zeigt, dass es vier Winkel zwischen zwei Ebenen gibt. Ähnlich wie bei zwei sich schneidenden Geraden sind die gegenüberliegenden gleich groß (Scheitelwinkel), und benachbarte ergeben zusammen 180° .



Diese Winkel zwischen zwei Ebenen kann man ohne eingezeichnete Hilfslinien nicht sehen. Um sie zu erkennen, muss man die beiden Ebenen mit einer zur Schnittgeraden senkrechten Ebene schneiden. Dann erhält man etwa die dargestellte Abbildung. Dort ist auch eingezeichnet, dass es diesen Schnittwinkel auch zwischen ihren Normalenvektoren gibt. Und so werden sie auch berechnet: Als Winkel zwischen den Normalenvektoren.

In der Regel verwendet man auch noch Betragsstriche, damit man sofort den Winkel bekommt, der höchstens 90° groß ist:

$$\cos \sphericalangle(E_1, E_2) = \cos \gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Beispiel a) Gegeben: $E_1: 2x + 6y - 5z = 34$ und $E_2: -4x + y + 9z = 12$

$$\text{Normalenvektoren: } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Schnittwinkel: } \cos \gamma_1 = \frac{|-8 + 6 - 45|}{\sqrt{4 + 36 + 25} \cdot \sqrt{16 + 1 + 81}} = \frac{47}{\sqrt{65} \cdot 98}$$

$$\text{Jeder Rechner liefert: } \gamma_1 \approx 53,9^\circ \text{ und dann folgt: } \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 126,1^\circ.$$

Beispiel b) Gegeben $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Jetzt müssen die Normalenvektoren erst noch berechnet werden. Ich zeige zwei Methoden!

Zu E_1 :

Berechnung von \vec{n}_1 mit Skalarprodukten.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2n_1 + n_2 - n_3 = 0 \quad (1)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -n_1 + 2n_2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Wähle } n_2 = r \in \mathbf{R} \Rightarrow n_1 = 2r$$

$$\text{In (3): } n_3 = 2n_1 + n_2 = 4r + r = 5r$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \\ 5r \end{pmatrix}, \text{ z. B. } r = 1: \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zu E_2

Berechnung von \vec{m} mit dem Vektorprodukt.

$$\vec{m} = \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 7 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 7 - (-4) \cdot 2 \\ 1 \cdot (-2) - (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 - 2 \\ 7 + 8 \\ -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man nimmt davon ein Drittel:

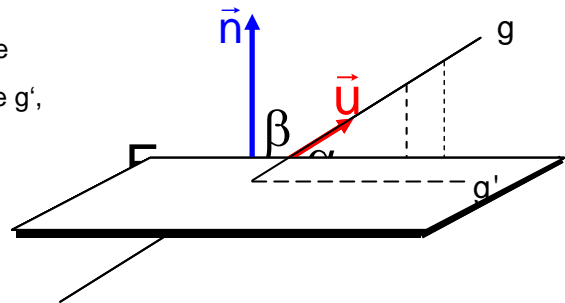
$$\vec{m}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}'|} = \frac{6 + 10 + 10}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{113}} \Rightarrow \gamma_1 \approx 63,5^\circ, \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 116,5^\circ$$

3.3.5 Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Grundaufgabe 7: Berechne die Schnittwinkel zwischen g und E .

Um die Schnittwinkel zu sehen, muss man die Gerade senkrecht auf die Ebene projizieren. Ist die Bildgerade g' , dann liegt der Schnittwinkel zwischen g und g' . Man erkennt aber, dass es zwischen g und den Normalenvektoren \vec{n} von E einen Winkel β gibt, der mit einem der beiden Schnittwinkel die Summe 90° ergibt.



Beispiel:

$$E: 4x + 3y - 7z = 28 \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Lösung

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+9+49} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{4+3+12}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{6}} = \frac{21}{\sqrt{74} \cdot 6}$$

cos ⁻¹ (21/(sqrt(74)*6))	
90-Ans	4.715003954
180-Ans	85.28499605
	94.71500395

$$\beta \approx 4,7^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ - \beta_1 \approx 85,3^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 94,7$$

2. Lösung

Verwendet man sin statt cos, dann bekommt man sofort α :

$$\sin \alpha_1 = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+9+49} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{4+3+12}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{6}} = \frac{21}{\sqrt{74} \cdot 6}$$

$$\alpha_1 \approx 85,3^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 94,7$$

Trainingsaufgaben

9) Berechne die Winkel zwischen den beiden Vektoren

$$\text{a) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

10) Berechne die Seiten und Innenwinkel der Dreiecke

$$\begin{aligned} \text{a) } & A(-4|3|1), B(2|0|1), C(5|-2|-1) \\ \text{b) } & A(-2|1|-1), B(0|2|-5), C(3|3|2) \\ \text{c) } & A(-2|0|-5), B(1|2|-9), C(-7|-3|-4) \end{aligned}$$

11) Berechne die Schnittwinkel zwischen folgenden Geraden.

(Überprüfe zuerst, ob sie sich schneiden!!)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{b) } & \text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } & \text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \text{ h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{d) } & \text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12) Bestimme t so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig wird.

$$A(1|5|-1), B(3|2|-2), C(1|t|-3)$$

13) Gegeben sind die Punkte $P(4|2|-1)$, $Q(0|3|-3)$. Der Punkt R ist ein beliebiger Punkt der

$$\text{Geraden g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Bestimme die R, so dass das Dreieck PQR rechtwinklig wird.}$$

14) Gegeben sind: $E_1: 2x - y - 2z = 12$, $E_2: 12x - 12y + z = 34$, $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}. \text{ Berechne die Winkel zwischen:}$$

$$\text{a) } E_1, E_2 \quad \text{b) } E_1 \text{ und } E_3, \quad \text{c) } g \text{ und } E_1, \quad \text{d) } h \text{ und } E_2$$

15) Für welches k sind $E_1: 4x + ky - (2-k)z = 4$ und $E_2: x - 2y + z = 4$ orthogonal?

Lösungen

Trainingsaufgaben

1) Berechne ohne Rechner die Beträge der folgenden Vektoren. Vereinfache wo möglich.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} : \quad |\vec{a}| = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} : \quad |\vec{b}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} : \quad |\vec{c}| = 20 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 20 \cdot \sqrt{4 + 1 + 4} = 20 \cdot 3 = 60$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} : \quad |\vec{d}| = \frac{1}{9} \cdot \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{49 + 16 + 16} = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 125 \\ -500 \\ 1000 \end{pmatrix} : \quad |\vec{e}| = 125 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 125 \cdot \sqrt{1 + 16 + 64} = 125 \cdot \sqrt{81} = 125 \cdot 9 = 1125$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad |\vec{u}| = 19 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 19 \cdot 1 = 19 \quad \text{sofort: } |\vec{u}| = 19!$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} : \quad |\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

2) Berechne die Länge der Strecken AB:

$$\text{a) } A(2|4|9), B(-3|-3|5): \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad |\overline{AB}| = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90}$$

$$\text{b) } A(6|19|-23), B(26|9|-3) \quad |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} \right| = 20 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 20 \cdot \sqrt{4 + 1 + 4} = 20 \cdot 3 = 60$$

3) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist: $A(6|3|0)$, $B(9|6|0)$, $C(9|3|3)$.

$$c = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \quad \text{oder:} \quad c = |\overline{AB}| = 3 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{1+1} = 3\sqrt{2}$$

$$b = |\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$a = |\overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

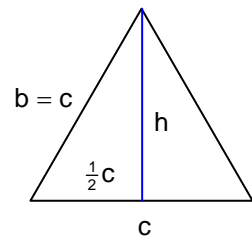
Das Dreieck ist gleichseitig.

$$\text{Mittelpunkt von AB:} \quad \vec{m}_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_{AB} \left(\frac{15}{2} \mid \frac{9}{2} \mid 0 \right)$$

$$\text{Höhenvektor:} \quad \overline{M_{AB}C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Berechnung der Höhe:} \quad h = |\overline{M_{AB}C}| = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1+1+4} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6}$$

$$\text{Flächeninhalt:} \quad A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{6} = \frac{9}{4} \sqrt{12} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = \frac{9}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{9}{2} \sqrt{3}$$



HINWEIS: Für das gleichseitige Dreieck gibt es Formeln, die in jeder Formelsammlung stehen. Handelt es sich hier jedoch um eine Aufgabe, die ohne Hilfsmittel zu lösen ist, dann kann man sich diese Formeln selbst schnell so herleiten:

Die Höhe zerteilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke. In diesen kann man für diese Höhe eine Formel mit Hilfe des Satzes von Pythagoras herleiten:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = c^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2 \quad \text{Also:} \quad h = \frac{c}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Damit folgt für den Flächeninhalt:} \quad A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Ergebnis:} \quad \boxed{A = \frac{1}{4}c^2\sqrt{3}}$$

wobei in c die Seite des gleichseitigen Dreiecks ist, die in Formeln meistens mit a bezeichnet wird.

$$\text{Damit folgt zum Vergleich:} \quad A = \frac{1}{4}(3\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

- 4) Welche Punkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat vom Ursprung den Abstand 10?

Lösung

Beliebiger Punkt von g : $P(1+r \mid 4+2r \mid -1-2r)$

Ursprung: $O(0 \mid 0 \mid 0)$

Verbindungsvektor = Ortsvektor von P : $\vec{x} = \overline{OP} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 4+2r \\ -1-2r \end{pmatrix}$

Betrag: $|\vec{x}| = \sqrt{(1+r)^2 + (4+2r)^2 + (-1-2r)^2}$

Quadrat davon: $|\vec{x}|^2 = 1 + 2r + r^2 + 16 + 16r + 4r^2 + 1 + 4r + 4r^2$

$$|\vec{x}|^2 = 9r^2 + 22r + 18$$

Bedingung: $|\vec{x}| = \sqrt{10}$: $9r^2 + 22r + 18 = 10$

$$9r^2 + 22r + 8 = 0$$

Nun benötigt man die allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{mit } a = 9, b = 22 \text{ und } c = 8:$$

$$r_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 9 \cdot 8}}{18} = \frac{-22 \pm \sqrt{196}}{18} = \frac{-22 \pm 14}{18} = \begin{cases} -\frac{8}{18} = -\frac{4}{9} \\ -\frac{36}{18} = -2 \end{cases}$$

Zu $r_1 = -\frac{4}{9}$ gehört $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{-\frac{4}{9}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{9} \\ 4 - \frac{8}{9} \\ -1 + \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{28}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad P_1\left(\frac{5}{9} \mid \frac{28}{9} \mid -\frac{1}{9}\right)$

Zu $r_2 = 2$ gehört: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-4 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_2(-1 \mid 0 \mid 3)$

Da die Menge aller Punkte, die von einem Punkt O den Abstand $\sqrt{10}$ haben, auf einer Kugel liegen, hätte man diese Aufgabe auch so formulieren können:

Berechne die Schnittpunkte der Geraden g mit der Kugel um den Ursprung mit Radius $\sqrt{10}$.

Die Kugelgleichung ist dabei: $x^2 + y^2 + z^2 = 10$. g wird dann koordinatenweise eingesetzt.

- 5a) Zeige, dass alle Punkte von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ von den Punkten $A(1|3|-6)$ und $B(7|-1|2)$ den gleichen Abstand haben. Welchen Namen könnte man daher dieser Geraden geben?

Lösung

Beliebiger Punkt von g : $P(6+2r | 6+5r | -1+r)$.

Daraus folgt: $\overline{AP} = \begin{pmatrix} 6+2r \\ 6+5r \\ -1+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2r \\ 3+5r \\ 5+r \end{pmatrix}$, $\overline{BP} = \begin{pmatrix} 6+2r \\ 6+5r \\ -1+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2r \\ 7+5r \\ -3+r \end{pmatrix}$

Abstand AP: $|\overline{AP}| = \sqrt{(5+2r)^2 + (3+5r)^2 + (5+r)^2}$
 $= \sqrt{25 + 20r + 4r^2 + 9 + 30r + 25r^2 + 25 + 10r + r^2} = \sqrt{30r^2 + 60r + 59}$

Abstand BP: $|\overline{BP}| = \sqrt{(-1+2r)^2 + (7+5r)^2 + (-3+r)^2}$
 $= \sqrt{1 - 4r + 4r^2 + 49 + 70r + 25r^2 + 9 - 6r + r^2} = \sqrt{30r^2 + 60r + 59}$

Diese Abstände sind gleich groß. Daher ist g eine Mittelsenkrechte von AB.

Hinweis 1: In einer Ebene gibt es genau eine Mittelsenkrechte. Im Raum gibt es unendlich viele, die alle in einer Mittelebene zu AB liegen. Deren Gleichung kann man so aufstellen:

Man verwendet den Vektor $\vec{n} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ oder die Hälfte davon als Normalenvektor.

Dann lautet die Gleichung der Ebene: $3x - 2y + 4z = k$

Mittelpunkt $M(3|1|-2)$ von A, B eingesetzt: $3 \cdot \boxed{3} - 2 \cdot \boxed{1} + 4 \cdot \boxed{-2} = k \Leftrightarrow k = -1$

Also heißt die Gleichung E: $3x - 2y + 4z = -1$

Oder: $-3x + 2y - 4z = 1$

- b) Gib eine zweite Gerade mit dieser Eigenschaft an, also eine zweite Mittelsenkrechte.

Lösung: Jede Mittelsenkrechte muss durch den Mittelpunkt $M(3|1|-2)$ von A und B gehen.

und sie muss auf dem Normalenvektor $\vec{n} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. auf $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht

stehen. Also muss man nur einen Vektor „basteln“, der mit diesem Vektor das

Skalarprodukt 0 hat, etwa so: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix} = 6 - 2 + \boxed{-4} = 0$

Die Koordinaten 2 und 1 habe ich beliebig gewählt, jetzt erkennt man, dass dann die dritte Koordinate -1 sein muss, damit das Skalarprodukt 0 wird.

Zweite Mittelsenkrechte: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 6) Man denke sich eine Kugel um den Mittelpunkt $M(4|-3|5)$ mit dem Radius 11.

Untersuche die Lage der Punkte $A(6|3|-4)$, $B(1|6|-3)$, $C(-1|-5|6)$ relativ zur Kugel.

(Das heißt: Liegen sie innerhalb, außerhalb oder auf der Kugel?)

WISSEN: Eine Kugeloberfläche besteht aus der Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt den gleichen Abstand (hier $r = 11$) haben.

Lösung

$$\overline{AM} = |\overline{AM}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11: \quad \text{A liegt auf der Kugel(oberfläche).}$$

$$\overline{BM} = |\overline{BM}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 81 + 64} = \sqrt{154} > 11: \quad \text{B liegt außerhalb der Kugel.}$$

$$\overline{CM} = |\overline{CM}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30} < 11: \quad \text{C liegt innerhalb der Kugel.}$$

- 7) Gegeben ist eine Kugel durch $M(2|5|-1)$ und $r = 7$.

Bestimme die Lage der Punkte $A(6|-1|4)$, $B(8|3|2)$, $C(0|8|2)$.

Lösung

$$\overline{AM} = |\overline{AM}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 36 + 25} = \sqrt{77} > 7 \quad \text{A liegt außerhalb der Kugel.}$$

$$\overline{BM} = |\overline{BM}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 = r \quad \text{B liegt auf der Kugel.}$$

$$\overline{CM} = |\overline{CM}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22} < 7 \quad \text{C liegt innerhalb der Kugel.}$$

- 8) Gegeben ist ein Kreis durch $M(-3|10)$ und $r = 15$.

Bestimme die Lage der Punkte $A(4|5)$, $B(10|1)$, $C(6|-2)$.

Lösung

$$\overline{AM} = |\overline{AM}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74} < 15 \quad \text{A liegt innerhalb des Kreises.}$$

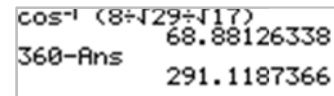
$$\overline{BM} = |\overline{BM}| = \left| \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{169 + 81} = \sqrt{250} > 15 \quad \text{B liegt außerhalb des Kreises.}$$

$$\overline{CM} = |\overline{CM}| = \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{9 + 16} = 3 \cdot 5 = 15 = r \quad \text{C liegt auf dem Kreis.}$$

9) Berechne die Winkel zwischen den beiden Vektoren

$$a) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-6+6+8}{\sqrt{4+9+16} \cdot \sqrt{9+4+4}} = \frac{8}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\gamma_1 \approx 68,9^\circ, \quad \gamma_2 \approx 291,1^\circ$$



cos⁻¹(8/(√29·√17))
360-Ans 68.88126338
291.1187366

$$b) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-5+10-6}{\sqrt{1+25+36} \cdot \sqrt{25+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{30}}$$

$$\gamma_1 \approx 91,3^\circ, \quad \gamma_2 \approx 268,7^\circ$$

CASIO Classpad:



Edit Aktion Interaktiv
cos⁻¹(-1/(√62 × √30))
360-ans 91.32863315
268.6713669

$$c) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8-6-2}{\sqrt{16+9+1} \cdot \sqrt{3 \cdot 4}} = 0$$

\vec{a} und \vec{b} sind orthogonal, d. h. $\gamma_1 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 270^\circ$

10) Berechne die Seiten und Innenwinkel der Dreiecke

$$a) \quad A(-4|3|1), \quad B(2|0|1), \quad C(5|-2|-1) \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{81+25+4} = \sqrt{110}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{54+15}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{110}} \quad \alpha \approx 12,27^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{-18-6}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{45}} \quad \beta \approx 150,2^\circ$$

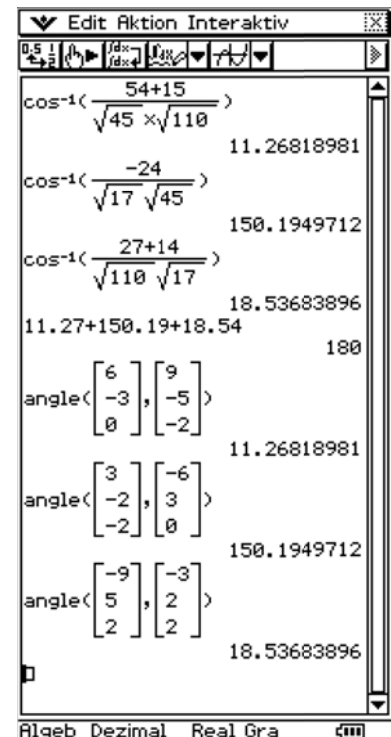
$$\cos \gamma = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{27+10+4}{\sqrt{110} \cdot \sqrt{17}} \quad \gamma \approx 18,54^\circ$$

Die Abbildung zeigt einen Screenshot von CASIO ClassPad.

In den ersten drei Zeilen wurden wie mit einem „gewöhnlichen“ Taschenrechner die Winkel berechnet, Man acht darauf, wie man die Vektoren einsetzen muss! (Siehe Seite 17).

Dann zur Kontrolle die Winkelsumme!

Und schließlich wurden alle drei Winkel noch einmal mit dem CASIO-eigenen Spezialbefehl „angle“ berechnet.



Edit Aktion Interaktiv
cos⁻¹(54+15/(√45 × √110)) 11.26818981
cos⁻¹(-24/(√17 × √45)) 150.1949712
cos⁻¹(27+14/(√110 × √17)) 18.53683896
11.27+150.19+18.54 180
angle([6, -3, 0], [9, -5, -2]) 11.26818981
angle([3, -2, -2], [-6, 3, 0]) 150.1949712
angle([-9, 5, 2], [-3, 2, 2]) 18.53683896
Algeb Dezimal Real Gra

Klar: Es reicht, zwei Innenwinkel so zu berechnen und dann den dritten über die Winkelsumme.

$$\text{b) } A(-2|1|-1), B(0|2|-5), C(3|3|2) \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \overline{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{10+2-12}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{110}} = 0 \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{-6-1+28}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{21}} = \frac{21}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{21}} \quad \beta \approx 53,37^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{15+2+21}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{59}} = \frac{38}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{59}} \left(= \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{59}} \right) \quad \gamma \approx 36,63^\circ$$

Expression	Result
$\cos^{-1}\left(\frac{21}{\sqrt{59 \cdot 21}}\right)$	53.3732
$\cos^{-1}\left(\frac{38}{\sqrt{38 \cdot 59}}\right)$	36.6268
$36.626815208494 + 53.3732$	90.

Die Abbildung stammt jetzt von TI Nspire.

Man beachte, dass man die beiden im Nenner stehenden Wurzeln auch als Produkt unter eine Wurzel schreiben kann, geht etwas schneller. Dritte Zeile als Kontrolle: $\beta + \gamma = 90^\circ$, da auch $\alpha = 90^\circ$.

$$\text{c) } A(-2|0|-5), B(1|2|-9), C(-7|-3|-4) \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \overline{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{64+25+25} = \sqrt{114}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{-15-6-4}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{35}} = \frac{-25}{\sqrt{29 \cdot 35}} \quad \alpha = 141,69^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{24+10+20}{\sqrt{114} \cdot \sqrt{29}} = \frac{54}{\sqrt{114 \cdot 29}} \quad \beta \approx 20,09^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{40+15+5}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{114}} = \frac{60}{\sqrt{35 \cdot 114}} \quad \gamma \approx 18,22^\circ$$

Expression	Result
$\cos^{-1}\left(\frac{-25}{\sqrt{29 \cdot 35}}\right)$	141.6934974
$\cos^{-1}\left(\frac{54}{\sqrt{114 \cdot 29}}\right)$	20.08804416
$\cos^{-1}\left(\frac{60}{\sqrt{35 \cdot 114}}\right)$	18.21845843
$141.69+20.09+18.22$	180

11) Berechne die Schnittwinkel zwischen folgenden Geraden.

(Überprüfe zuerst, ob sie sich schneiden!!)

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}_a + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_u$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_b + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_v$

Überprüfung mit einer Determinante, ob sich g und h schneiden.

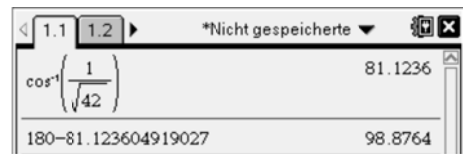
$$D = \left| \vec{u} \vec{v} \overline{AB} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 + 8 + 0 + 16 - 0 - 8 = 0$$

Also sind diese Vektoren komplanar, die Geraden liegen somit in einer Ebene.

Und da sie nicht parallel sind ($\vec{v} \neq k \cdot \vec{u}$), müssen sie sich schneiden.

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 - 1 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 16} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{21} \cdot 2}$$

$$\gamma_1 = 81,1^\circ, \quad \gamma_2 = 98,9^\circ$$



b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$D = \left| \vec{u} \vec{v} \overline{AB} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -75 + 50 - 6 + 75 + 6 - 50 = 0$$

g und h schneiden sich. (Ausführlicher Text sieh bei a)

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|15 - 10 - 5|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \quad \text{Die Geraden sind zueinander orthogonal.}$$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

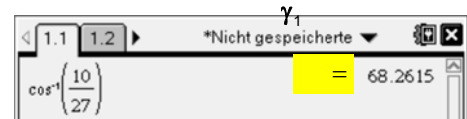
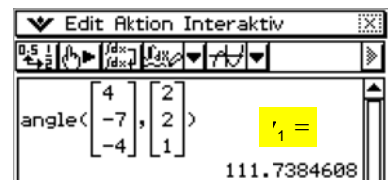
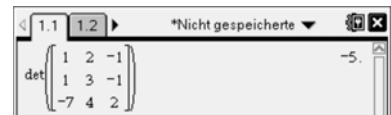
$$D = \left| \vec{u} \vec{v} \overline{AB} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -7 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 14 - 4 - 21 + 4 - 4 \neq 0$$

g und h schneiden sich nicht.

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

g und h schneiden sich in ihrem gemeinsamen Aufpunkt.

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|8 - 14 - 4|}{\sqrt{16 + 49 + 16} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{10}{9 \cdot 3} = \frac{10}{27}$$



Die obere Abbildung zeigt eine ClassPad-Berechnung, die untere TI Nspire. Hier wurde unsere Formel angewandt, welche Betragsstriche verwendet, damit man den kleineren Winkel erhält!

Beide Lösungen sind also richtig, weil es genau diese zwei Schnittwinkel gibt.

12) Bestimme t so, dass das Dreieck $A(1|5|-1)$, $B(3|2|-2)$, $C(1|t|-3)$ rechtwinklig wird.

Lösung

Es folgt: $\overline{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-t \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-t \\ 1 \end{pmatrix}$

Bedingung: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$

d. h. $0 + (5-t)(2-t) + 2 = 0$

$$10 - 2t - 5t + t^2 + 2 = 0$$

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

Es gibt somit 2 Lösungen: $C_1(1|4|-3)$, $C_2(1|3|-3)$.

13) Gegeben sind die Punkte $P(4|2|-1)$, $Q(0|3|-3)$. Der Punkt R ist ein beliebiger Punkt der

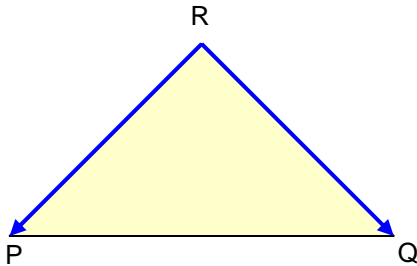
Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimme R so dass das Dreieck PQR rechtwinklig wird.

Lösung

Koordinaten von R:

$$R(2+2r \mid -1-5r \mid 5+r)$$

1. Versuch: Rechter Winkel bei R: Bedingung: $\overline{PR} \cdot \overline{QR} = 0$



$$\begin{pmatrix} 2+2r-4 \\ -1-5r-2 \\ 5+r+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+2r-0 \\ -1-5r-3 \\ 5+r+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2r-2)(2r+2) + (-5r-3)(-5r-4) + (r+6)(r+8) = 0$$

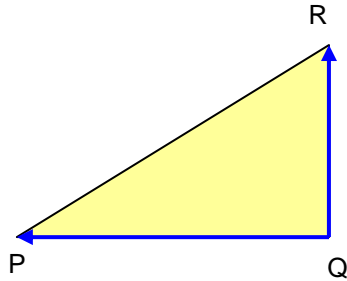
$$(4r^2 - 4) + (25r^2 + 35r + 12) + (r^2 + 14r + 48) = 0$$

$$30r^2 + 49r + 56 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 30 \cdot 56}}{2 \cdot 30} \notin \mathbb{R}$$

Weil der Radikand negativ wird, gibt es keine Lösung.

2. Versuch: Rechter Winkel bei Q: Bedingung: $\overline{QP} \cdot \overline{QR} = 0$ (oder $\overline{PQ} \cdot \overline{QR} = 0$ usw.)



$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+2r-0 \\ -1-5r-3 \\ 5+r+3 \end{pmatrix} = 0$$

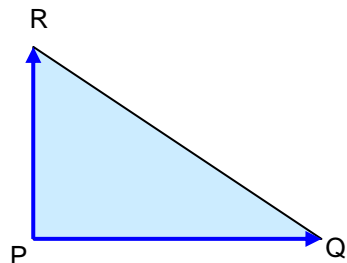
$$4 \cdot (2+2r) - (-4-5r) + 2(r+8) = 0$$

$$8+8r+4+5r+2r+16=0 \Leftrightarrow 15r = -28 \Leftrightarrow r = -\frac{28}{15}$$

Es folgt:

$$\vec{x}_{R,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{28}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{15} \\ \frac{25}{3} \\ \frac{47}{15} \end{pmatrix} \Leftrightarrow R_1 \left(-\frac{26}{15} \mid \frac{25}{3} \mid \frac{47}{15} \right)$$

3. Versuch: Rechter Winkel bei P: Bedingung: $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = 0$ usw.)



$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+2r-4 \\ -1-5r-2 \\ 5+r+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4 \cdot (2r-2) - (-5r-3) + 2(r+6) = 0$$

$$8r-8+5r+3+2r+12=0 \Leftrightarrow 15r = -7 \Leftrightarrow r = -\frac{7}{15}$$

Es folgt:

$$\vec{x}_{R,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{7}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{68}{15} \end{pmatrix} \Leftrightarrow R_1 \left(\frac{16}{15} \mid \frac{4}{3} \mid \frac{68}{15} \right)$$

14) Gegeben sind: $E_1: 2x - y - 2z = 12$, $E_2: 12x - 12y + z = 34$, $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

a) Winkel zwischen E_1 und E_2 :

$$\cos \gamma_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{144+144+1}} = \frac{|24+12-2|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{289}} = \frac{34}{3 \cdot 17} = \frac{2}{3}$$

$\cos^{-1}(2/3)$	48.1896851
180-Ans	131.8103149

b) Winkel zwischen E_1 und E_3 :

Bestimmung einer Koordinatengleichung von E_3 : Normalenvektor $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$$\text{Bedingung: } \vec{u} \cdot \vec{n}_3 = 0 \quad 2n_1 + n_2 = 0 \quad (1)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_3 = 0 \quad -n_1 + 3n_2 + n_3 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Wähle } n_1 = z \in \mathbf{R}: \text{ in (1): } 2z + n_2 = 0 \Leftrightarrow n_2 = -2z$$

$$\text{in (2): } -z - 6z + n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = 7z$$

$$\text{Normalenvektoren: } \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ 7z \end{pmatrix}, \text{ für } z = 1: \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel zwischen E_1 und E_3 :

$$\cos \gamma_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+4+49}} = \frac{|2+2-14|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{54}} = \frac{|-10|}{3 \cdot \sqrt{54}} = \frac{10}{3\sqrt{54}}$$

$\cos^{-1}(10/(3\sqrt{54}))$	63.02451589
180-Ans	116.9754841

c) Winkel zwischen g und E_1 :

$$\sin \gamma_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+9+33}} = \frac{|4-3+12|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{13}{3 \cdot 7}$$

$\sin^{-1}(13/21)$	38.24661988
180-Ans	141.7533801

d) Winkel zwischen h und E_2 :

$$\sin \gamma_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{144+144+1} \cdot \sqrt{4+1+144}} = \frac{|24-12-12|}{\sqrt{289} \cdot \sqrt{149}} = 0 \quad \gamma_1 = 0^\circ: h \text{ ist parallel zu } E_2.$$

15) Für welches k sind $E_1: 4x + ky - (2-k)z = 4$ und $E_2: x - 2y + z = 4$ orthogonal?

Bedingung:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2k + 2 - k = 0 \Leftrightarrow -3k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$