INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

Matrizenrechnung

Alle Texte aus der Mathematik-CD

Übersicht über die Texte
mit zusammen 430 Seiten

Datei Nr. 62000

Stand 24. November 2009

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

1. Der Gauß-Algorithmus Datei Nr. 62 011

Inhalt

§ 1	Drei Gleichungen mit drei Unbekannten 13 ausführliche Beispiele	2
§ 2	Drei Gleichungen mit vier Unbekannten 6 ausführliche Beispiele	13
§ 3	Vier Gleichungen mit vier Unbekannten 10 ausführliche Beispiele	18
§ 4	Vier Gleichungen mit drei Unbekannten 3 ausführliche Beispiele	29

2. Formale Matrizenrechnung Datei Nr. 62 111

Inhalt

§ 1 Was sind Matrizen? 1

§ 2 Formales Rechnen mit Matrizen 5

2.1 Gleichheit von Matrizen 5

2.2 Addition von Matrizen 6

Rechengesetze für die Matrizenaddition 7

Existenzgesetze für die Matrizenaddition 9

2.3 Vielfache von Matrizen 11

Rechengesetze für die S-Multiplikation 11

2.4 Subtraktion von Matrizen 12

2.5 Multiplikation von Matrizen 13

2.5.1 Erinnerung an das Skalarprodukt der Vektorrechnung 13

2.5.2 Einführung der Matrizenmultiplikation 14

Rechnen mit der Einheitsmatrix 19

Potenzieren von Matrizen 21

2.5.3 **Trainingsaufgaben** 22

2.5.4 Rechengesetze für die Matrizen-Multiplikation 23

2.5.5 Existenzgesetze für die Matrizen-Multiplikation 24

2.6 Transponieren von Matrizen 25

§ 3 Gleichungen mit Matrizen – Gauß-Verfahren 27

3.1 Matrizengleichung mit einem Variablenvektor 27

Elementare Matrizenumformungen 28

3.2 Matrizengleichung mit zwei Variablenvektoren 32

3.3 Weitere unterschiedliche Gleichungen 35

3.4 Unterschiedliche Gleichungen: $A \cdot X = B$ und $X \cdot A = B$ 39

3.5 **Trainingsaufgaben** 43

§ 4 Inverse Matrizen 44

4.1 Lineare Zahlengleichung mit einer Variablen 44

4.2 Lösung einer Matrizengleichung mit einer inversen Matrix 46

Wichtiges zu inversen Matrizen 47

4.3 Berechnung inverser Matrizen mit dem Gauß-Verfahren 48

4.4 **Trainingsaufgaben zu inversen Matrizen** 52

4.5 Alternative Berechnungsverfahren für inverse Matrizen 53

Das Wichtigste über Determinanten 53

Berechnung einer inversen (3,3)-Matrix mit Determinanten 55

Inverse (2,2)-Matrizen und Diagonalmatrizen 56

§ 5 Formales Lösen komplizierter Matrizengleichungen 57

§ 6 Lösen von Matrizengleichungen nach Aufgaben aus dem Abitur
für berufliche Schulen in BW 60

6.1 Musteraufgaben 60

6.2 Trainingsaufgaben 71

§ 7 **Lösungen der Trainingsaufgaben** 72

7.1 Trainingsaufgaben aus 2.5.3 (Matrizen-Multiplikation) 72

7.2 Trainingsaufgaben aus 3.5 (Matrizengleichungen) 80

7.3 Trainingsaufgaben aus 4.4 (Inverse Matrizen) 88

7.4 Trainingsaufgaben aus 6.2 (Umfassendere Teile aus Abituraufgaben) 98

3. Lösbarkeit von LGS Datei Nr. 62 112

Für dieses Themenheft habe ich mir vorgenommen, nicht nur zu zeigen, wie man Lineare Gleichungssysteme (Abkürzung: LGS) löst, sondern auch darzustellen, warum es dabei drei Möglichkeiten gibt:
Eine LGS kann eine eindeutige Lösung haben, gar keine oder unendlich viele.
Etwas anderes ist nicht möglich. Um dies zeigen zu können, benötigt man Kenntnisse der Vektorrechnung. Diese können aber in diesem Heft nicht auch noch grundlegend vermittelt werden. Daher sind diese Paragraphen, die den Hintergrund vermitteln, darauf angewiesen, dass der Leser Grundkenntnisse besitzt. Sie können im Text 61015 ausführlich nachgelesen werden. Hier der Überblick über den Inhalt dieses Heftes.

In § 1 bespreche ich kurz, was Linearkombinationen sind, und dass man sie benötigt, um Vektoren aus anderen zu erzeugen.

In § 2 geht es um Vektoren mit 2 Stellen (aus dem zweidimensionalen Vektorraum R^2). Es wird gezeigt, wie man untersucht, ob ein Vektor aus einem, zwei oder drei Vektoren als Linearkombination dargestellt werden kann. In manchen Fällen geht das, in anderen nicht. Das Entscheidende daran soll jedoch die Erkenntnis sein, dass hinter jeder dieser Aufgaben ein LGS steht. Die Frage, ob ein Vektor als Linearkombination darstellbar ist, ist also zugleich die Frage, ob das zugehörigen LGS lösbar ist. Der Leser soll erfahren, welche vektorielle Situation der Grund dafür ist, dass ein LGS eindeutig lösbar ist oder gar nicht oder auf unendlich viele Weisen.
Dies wird nur exemplarisch gezeigt. Eine gründliche Theorie würde den Rahmen und Zweck dieses Textes sprengen.

In § 3 wird der Spieß umgedreht. Die in § 2 aus Vektoraufgaben entstandenen Gleichungssysteme werden vorgegeben. Deren Lösbarkeit ist jetzt das Thema. Dazu schauen wir nach, welche Vektorprobleme sich im LGS verstecken. Dann werden die Systeme mit dem Gauß-Verfahren bearbeitet, und es wird erklärt, wie man an Hand des Matrixranges die Lösbarkeit vorhersagen kann. Dazu gibt es einige Trainingsaufgaben

In § 4 wird die Vektortheorie für den dreidimensionalen Vektorraum R^3 kurz wiederholt. Dazu wird zuerst geklärt, was die lineare Unabhängigkeit von 3 Vektoren bedeutet und wie man sie nachweist. Damit kann man dann die Darstellbarkeit von Vektoren des R^3 untersuchen, was gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen ist. Also wieder ein Paragraph zur Vektortheorie. Viele Beispiele runden den Abschnitt ab.

In § 5 werden nun die Gleichungssysteme, die in § 4 bei der Frage nach der Darstellbarkeit der Vektoren entstanden sind, unabhängig davon untersucht. Sinn und Ziel ist es jetzt, dass man erkennt, dass solche LGS einen vektoriellen Hintergrund haben, der erklärt, warum es Lösungen geben kann oder auch nicht. Aber auch, dass man lernt, diese Lösungen zu bestimmen.

In § 6 wird geübt: Es werden verschiedenartige Matrizengleichungen gelöst.

In § 7 kommt die Theorie wieder an die Reihe. Ersetzt man die Absolutglieder durch Nullen, steht auf der einen Seite der Nullvektor. Man nennt das LGS dann homogen, sonst inhomogen.
Ja und dazu gibt es einiges zu erzählen. Denn diese Gleichungen haben besondere Eigenschaften, und es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen einem inhomogenen und dem zugehörigen homogenen LGS, denn man elegant für Proben ausnützen kann.

In § 8 werden LGS mit Parametern (Formvariablen) behandelt.
Die Fallunterscheidungen haben zur Folge, dass alle Möglichkeiten der Lösbarkeit auftreten.
Dieser Abschnitt ist echtes Abiturtraining!

In § 9 gibt es 15 Seiten Musterlösungen zu den Trainingsaufgaben.

Wer weniger die Theorie sucht und einfach Matrizengleichungen aller Art auf Abiturniveau lösen und trainieren will, kann im Text 62113 stundenlang üben. An Hand von Abituraufgaben für berufliche Gymnasien in Baden-Württemberg gibt es viele Aufgaben und natürlich die Musterlösungen dazu.

Hinweis

1 *Wie gut ein Schüler mit diesem Themenheft klar kommt, hängt natürlich davon ab, was er im Unterricht erfahren hat. Wurde ihm nur erzählt, wie man LGS löst und blieb der vektorielle Aspekt auf der Strecke, dann muss er/sie eben viel überspringen und sich auf die Beispiele beschränken, die für ihn geeignet sind. Das geht hier.*

2 *Ich verwende zur Lösung quadratischer Gleichungen* $ax^2+bx+c=0$ *stets die „Mitternachts-Formel“* $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ *und NIE die p-q-Formel, weil diese in vielen Fällen deutlich günstiger ist. Wer jedoch die p-q-Formel anwenden möchte, sollte das tun.*

Inhalt von 62112

§ 1	**Mit Linearkombinationen neue Vektoren erzeugen**	1
§ 2	**Erzeugen von Vektoren im R^2**	2
	Die Lineare Hülle von 2 Vektoren	3
	Umkehrung: Darstellung eines Vektors durch 2 Vektoren	4
	Der Nullvektor-Trick	8
	Übersicht	9
	Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren	9
§ 3	**Lineare Gleichungssysteme im R^2**	10
	Darstellung eines Gleichungssystems als Vektorgleichung	10
	Darstellung eines Gleichungssystems als Matrixgleichung	11
	Lösungsmenge bei unendlich vielen Lösungen	12
	Rang einer Matrix und Satz über die Lösbarkeit	**13**
	Trainingsaufgaben 1 und 2	14
§ 4	**Erzeugung von Vektoren im R^3**	15
	4.1 Lineare Abhängigkeit dreier Vektoren des $\mathbf{R}^3$	15
	4.2 Zunächst die Ergebnisse für den $\mathbf{R}^3$	16
	4.3 Fünf Beispiele für Vektordarstellung und Gleichungssysteme	18
§ 5	**Lineare Gleichungssysteme im R^3 – in Matrixform**	26
	Untersuchung der 5 Beispiele aus § 4 mit Matrizentheorie	27
	Trainingsaufgabe 3	33
§ 6	**Trainingsabschnitt für Matrizengleichungen**	34
	6.1 LGS mit eindeutiger Lösung	34
	6.2 Unlösbare LGS	35
	6.3 LGS mit unendlich vielen Lösungen	36
§ 7	**Homogene und inhomogene LGS – Etwas Theorie**	39
	Trainingsaufgabe 4	44
	Trainingsaufgabe 5	45
	Trainingsaufgabe 6	47
	Anwendung zur Probe einer Lösung mit unendlich vielen Vektoren	51
	Trainingsaufgabe 7	51
§ 8	**Matrizengleichungen mit Parametern**	52
	5 große Musteraufgaben im Abiturstil	52
§ 9	**Lösungen der Trainingsaufgaben**	70

4. Vektoren und Matrizen Datei Nr. 62 113

Vorwort

Dieses Heft enthält ausnahmslos Abituraufgaben von beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg. Sie sind fast alle sehr alten Datums. Dies hat den Vorteil, dass sie wesentlich umfangreicher sind als die neuen Aufgaben, die oft nur halb so lang sind, sich aber mit denselben Themen beschäftigen. Ihnen wird ein weiteres Heft gewidmet.

Im folgenden Inhaltsverzeichnis sind sie nach Themen geordnet:

a) Die ersten 5 Aufgaben sind alle vom etwa gleichen Typ: Aus einer Matrix A_t wird ein Gleichungssystem gebildet. Dazu gibt es eine Reihe von Zusatzaufgaben. Es handelt sich stets um 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

b) In Aufgabe 6 geht es um die Lineare Un-/Abhängigkeit dreier Vektoren des $\mathbf{R}^3$.

c) Aufgabe 7 zeigt, wie man mit einer Matrix Vektoren auf andere Vektoren abbilden kann.

d) Die Aufgaben 8, 9 und 10 beschäftigen sich mit Gleichungssystemen des $\mathbf{R}^4$.

Sämtlichen Lösungen stammen von mir persönlich.

Friedrich Buckel

Inhalt

Aufgabe 1 - Abitur 1988: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix}$ 4

Aufgabe 2 - Abitur 1987: $A_t = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 & 0 \\ 1 & 2 & -3t \\ -t & t^2 & -3t \end{pmatrix}$ 11

Aufgabe 3 - Abitur 1994: $A_u = \begin{pmatrix} u & 2u & 3u \\ 2u & 5u+1 & 4u \\ 5u & 12u+2 & u^2+12u-6 \end{pmatrix}$ 15

Aufgabe 4 - Abitur 1994: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -t \end{pmatrix}$ 19

Aufgabe 5 - Abitur 1990: $A_t = \begin{pmatrix} t & -2 & t \\ -2t & 3 & -t \\ t & -t^2 & 0 \end{pmatrix}$ 24

Aufgabe 6 - Abitur 1991: $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2-t \end{pmatrix}, \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \vec{c}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t+4 \end{pmatrix}$

Lineare Abhängigkeit dieser Vektoren. 28

Aufgabe 7 - Abitur 1982: Abbildung von Vektoren durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 36

Aufgabe 8 - Abitur 1987: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ t & 3 & 2t & 3+t \\ 2 & 0 & 3t^2-8 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & t^2+t-2 \end{pmatrix}$ 41

Aufgabe 9 - Abitur 1982: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ t & 2 & 3t & 2+t \\ 1 & 0 & 2t^2+5 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & t^2-t-3 \end{pmatrix}$ 46

Aufgabe 10 - Abitur 1992: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 50

5. Anwendungsaufgaben 1 Datei Nr. 62 311

Arbeiten mit Bedarfstabellen –
Herstellung von Zwischen- und Endprodukten aus Rohstoffen,
Kostenberechnungen

Mit 10 Original-Abituraufgaben aus Baden-Württemberg
und sehr ausführlichen Lösungen.

Inhalt

1. **Einfache Aufgaben zum Einstieg** 3

Beispiel 1 3
Beispiel 2 5
Beispiel 3 7
Beispiel 4 (Bedarfstabellen und Stücklisten) 8
Beispiel 5 (Belieferung von Firmen) 11
Beispiel 6 (Lohnkosten) 12
Beispiel 7 (Addition von Bedarfstabellen) 15
Beispiel 8 (Addition von Bedarfstabellen) 17
Trainingsaufgaben 17
Lösungen dazu 18

2. **Große Musteraufgaben zur Weiterführung** 21

MA1 (Abitur 2005 am WG in BW) 21
MA2 (Abitur 1993 am WG in BW) 26
MA3 (Abitur 2003 am WG in BW) 34
MA4 (Abitur 2001 am WG in BW) 41
MA5 (Abitur 1981 am WG in BW) 49
MA6 (Abitur 1983 am WG in BW) 53
MA7 (Abitur 1988 am WG in BW) 58
MA8 (Abitur 1992 am WG in BW) 63
MA9 (Abitur 2008 am WG in BW) 68
MA10 (Abitur 2006 am WG in BW) 72

6. Anwendungsaufgaben 2 Datei Nr. 62 321

Betriebliche Verflechtungen - Leontief-Modell

Inhalt

1. **Einfache Aufgabe zum Einstieg** 3

Einführung in die innerbetriebliche Verflechtung anhand einer
Abituraufgabe 1993 aus Baden-Württemberg 3 – 15

Input-Output-Tabelle 4
Die Leontief-Annahme 4
Produktionsvektor, Konsumvektor 6
Inputmatrix 8
Hochrechnung auf eine gewünschte Produktion 9
Übersicht 10

2. **Weitere Abituraufgaben aus BW mit Musterlösungen** 16
2.1 Aufgabe 2 (Abitur 2006) 16
Lösung 17
2.2 Aufgabe 3 (Abitur 2005) 22
Lösung 23
2.3 Aufgabe 4 (Abitur 2008) 28
Lösung 29
2.4 Aufgabe 5 (Abitur 1990) 33
Lösung 34

Fortsetzung folgt

7. Anwendungsaufgaben 3 Datei Nr. 62 331

Übergangsmatrizen - Prozess-Diagramme - Markow-Ketten
Viele Berechnungen werden mit dem CAS-Rechner TI Nspire durchgeführt.

Inhalt

1	Einführende Beispiele	3
	Beispiel 1	3
	Beispiel 2 (Wechsel der Automarke - Prozessdiagramm)	6
	Beispiel 3 (Wohnortwechsel)	8
	Beispiel 4 (Wählerwanderung)	10
2	Prozessdiagramme zu Spielen	13
	Beispiel 5 (Mensch ärgere dich nicht)	13
	Beispiel 6 (Glücksrad für 2 Personen)	16
	Definition: Markow-Kette	21
	Beispiel 7 (Münze werfen - 1)	22
	Beispiel 8 (Münze werfen - 2)	26
	Beispiel 9 (Würfeln - 1)	29
	Beispiel 10 (Würfeln - 2)	32
	Trainingsaufgaben	34
	Lösungen dazu	35

Hinweis

Dieses Thema gehört eigentlich in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn es werden Zustände dergestalt beschrieben, dass man angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die einzelnen Zustände eintreten. Dann erfolgt eine Zustandsänderung, was beispielsweise in einem Spiel durch Würfeln geschehen kann. Auf Grund der Wahrscheinlichkeit der Zustandsveränderungen kann man die neuen Zustände vorhersagen. Benötigt werden: Baumdiagramme und die Berechnungen dazu wie Pfadregeln und totale Wahrscheinlichkeit.
Wir finden diesen Stoff bei der Matrizenrechnung, weil diese Rechenart das Ganze wesentlich vereinfacht.