Grundlagentraining

Teil 1

Bruchrechnen

Für alle, die es benötigen,

z. B. zur Prüfungsvorbereitung in 10 …

Zu diesem Beispielen gibt es einen Leistungstest in 10249.

Ausführliche Texte zur Bruchrechnung findet man in:

10220	Einführung
10222	Addition und Subtraktion
10225	Testaufgaben
10240	Multiplikation und Division

Datei Nr. 10250

Stand: 16. Februar 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Dieser Text soll Schüler das nochmals zeigen, was sie können sollten.   Es werden die Grundlagen wiederholt, Beispiele gezeigt und zum Trainieren gibt es Aufgaben mit ausführlichen Lösungen.

Geeignet zur Prüfungsvorbereitung.

Zu diesen Beispielen gibt es einen Leistungstest in Nummer 12149

Hier stehen dann die Lösungen.

Wer also sich also zuerst testen möchte, bearbeite den Test zuerst!

Teil 1 Bruchrechnen

1.1 Addition und Subtraktion

Regel 1: Brüche werden **addiert/subtrahiert**, indem man sie zuvor auf einen gemeinsamen Nenner bringt und dann ihre Zähler addiert/subtrahiert.

Es ist günstig, den kleinsten gemeinsamen Nenner zu verwenden.
Diesen nennt man den Hauptnenner.

Der **Hauptnenner** ist das kgV (kleinste gemeinsame Vielfache) der einzelnen Nenner:

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$. Der kleinste gemeinsame Nenner ist hier 12.

Durch Erweitern kann man die Brüche so verändern, dass sie den Nenner 12 erhalten, ohne dabei ihren Wert zu verändern.

Erweitern heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren:

Den Bruch $\frac{3}{4}$ wird man mit 3 erweitern: $\frac{3\cdot\boxed{3}}{4\cdot\boxed{3}}=\frac{9}{12}$, den Bruch $\frac{2}{3}$ mit 4: $\frac{2\cdot\boxed{4}}{3\cdot\boxed{4}}=\frac{8}{12}$.

Ganze Rechnung: $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$

b) $\frac{11}{8}-\frac{5}{6}$ Viele glauben, dass der Hauptnenner das Produkt der beiden Nenner ist,

so wie das auch in a) der Fall war. Das wäre hier dann $6\cdot 8=48$.

Hier ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 6 jedoch bereits 24, denn man kann so rechnen:

$\frac{11}{8}$ wird mit 3 erweitert: $\frac{11\cdot\boxed{3}}{8\cdot\boxed{3}}=\frac{33}{24}$, $\frac{5}{6}$ wird mit 4 erweitert: $\frac{5\cdot\boxed{4}}{6\cdot\boxed{4}}=\frac{20}{24}$.

Ganze Rechnung: $\frac{11}{8}-\frac{5}{6}=\frac{11\cdot 3}{24}-\frac{5\cdot 4}{24}=\frac{33-20}{24}=\frac{13}{24}$

Wie man sieht, kann man nach dem Erweitern die beiden Brüche auf einen gemeinsamen Bruchstrich schreiben, denn sie haben dann denselben Nenner.

c) $\frac{4}{36}+\frac{11}{42}$ Sind die Nenner größere Zahlen, erkennt man den Hauptnenner oft nicht mehr sofort. Dann wendet man das Verfahren der Primfaktorzerlegung an:

Man schreibt nur gleiche Primfaktoren untereinander. Das Produkt der in den Spalten stehenden Primzahlen ergibt den Hauptnenner. Aus den fehlenden Primzahlen erhält man die Erweiterungszahlen.

$$\begin{array}{lll} 36 & = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot \square & \mid\ EZ=7 \\ 42 & = 2\cdot \square\cdot 3\cdot \square\cdot 7 & \mid\ EZ=6 \\ \hline HN & = \underbrace{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}_{36}\cdot 7=252 & \end{array}$$

Ganze Rechnung: $\frac{4}{36}+\frac{11}{42}=\frac{4\cdot\boxed{7}+11\cdot\boxed{6}}{252}=\frac{94}{252}=\frac{47}{126}$

d) $\frac{17}{36}+\frac{23}{24}-\frac{19}{18}$

Berechnung des Hauptnenners

(1) durch Kopfrechnung: Da 36 das Doppelte von 18 ist, muss man 18 nicht weiter beachten. Nun sucht man das kgV von 24 und 36. Und da sollte man feststellen, dass das Doppelte von 36, also 72 auch das Dreifache von 24 ist. Also ist 72 das kleinste gemeinsame Vielfache von 18, 36, 24.

(2) durch Primfaktorzerlegung:

$$36 = 4\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot\square \quad | \ EZ = 2$$
$$18 = 2\cdot 9 = 2\cdot\square\cdot 3\cdot 3\cdot\square \quad | \ EZ = 2\cdot 2 = 4$$
$$24 = 3\cdot 8 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot\square\cdot 2 \quad | \ EZ = 3$$
$$HN = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2 = 72$$

Ausführliche Berechnung:

$$\frac{17}{36}+\frac{23}{24}-\frac{19}{18}=\frac{17\cdot\boxed{2}}{72}+\frac{23\cdot\boxed{3}}{72}-\frac{19\cdot\boxed{4}}{72}=\frac{34+69-76}{72}=\frac{27}{72}=\frac{3}{8}$$

Man beachte, dass am Ende 27 und 72 den gemeinsamen Teiler 9 besitzen, so dass man durch 9 kürzen kann.

Trainingsaufgabe 1

e) $\frac{5}{9}+\frac{3}{4}$ f) $\frac{5}{9}+\frac{7}{18}$ g) $\frac{5}{9}+\frac{17}{24}$

h) $\frac{25}{44}-\frac{1}{5}$ i) $\frac{99}{40}-\frac{17}{60}$ j) $\frac{41}{81}-\frac{16}{27}$

j) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ k) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{19}{24}$ l) $\frac{4}{21}+\frac{5}{28}-\frac{2}{7}$

Berechne den Hauptnenner jetzt mit Primfaktorzerlegung:

m) $\frac{33}{56}+\frac{19}{36}$ n) $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}+\frac{1}{30}$ o) $\frac{7}{36}-\frac{3}{20}-\frac{5}{27}$

Die Lösungen stehen am Ende dieses Kapitels zum Bruchrechnen.

1.2 Gemischte Brüche

Ein Bruch, dessen Zähler größer als der Nenner ist, heißt unechter Bruch.
Der Name kommt daher, dass er noch mindestens 1 Ganzes enthält.
Wie viele Ganze in ihm enthalten sind, erhält man durch eine Division:

$\frac{29}{8}$ kann man als Divisionsaufgabe verstehen. Diese heißt: $29:8$. Man rechnet dann so:

8 ist in 29 3 mal enthalten, es bleibt der Rest 5 übrig. Also ist $29 = 3 \cdot 8 + 5$.

Für den Bruch bedeutet das: $\frac{29}{8} = 3 + \frac{5}{8}$.

Dann lässt man das Pluszeichen weg und schreibt abgekürzt: $\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$.

Dies nennt man einen gemischten Bruch. Man muss sich merken, dass zwischen der

Ganzen Zahl 3 und dem, Bruch ein unsichtbares Pluszeichen steht.

Ein gemischter Bruch ist also stets eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruch.

Man kann umgekehrt auch jeden gemischten Bruch in einen unechten Bruch verwandeln:

$6\frac{2}{3}$ stellt diese Summe dar: $6 + \frac{2}{3}$. 6 Ganze kann man auch als Drittel schreiben.

Weil 1 Ganzes $\frac{3}{3}$ sind, werden 6 Ganze zu 18 Dritteln, also gilt: $6\frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

Man rechnet jedoch kürzer so: $6\frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{18+2}{3} = \frac{20}{3}$

Die Zwischenrechnungen schreibt man nicht auf, so dass nur $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ auf dem Papier stehen sollte.

Beispiele dazu:

a) $5\frac{7}{6} = \frac{5 \cdot 6 + 7}{6} = \frac{30+7}{6} = \frac{37}{6}$ kurz: $5\frac{7}{6} = \frac{37}{6}$

b) $12\frac{5}{8} = \frac{12 \cdot 8 + 5}{8} = \frac{96+5}{8} = \frac{101}{8}$ kurz: $12\frac{5}{8} = \frac{101}{8}$

c) $9\frac{14}{25} = \frac{9 \cdot 25 + 14}{25} = \frac{225+14}{25} = \frac{239}{25}$ kurz: $9\frac{14}{25} = \frac{239}{25}$

Und umgekehrt:

d) $\frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$ denn 4 geht in 65 16 mal ($4 \cdot 16 = 64$), bleibt Rest 1.

e) $\frac{83}{11} = 7\frac{6}{11}$ denn $7 \cdot 11 = 77$, fehlen bis 83 noch 6.

f) $\frac{277}{23}$ Man vermutet vielleicht, dass man 11 Ganze benötigt: $11 \cdot 23 = 253$

Bleibt Rest 24. $\frac{277}{23} = 11\frac{24}{23}$ ist aber unkorrekt, denn in $\frac{24}{23}$ steckt

nochmals ein Ganzes. Richtig: $\frac{277}{23} = 12\frac{1}{23}$!

1.3 Addition und Subtraktion von gemischten Brüchen

a) $$4\frac{3}{8}+5\frac{1}{6}=\underbrace{(4+5)+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right)}_{\text{Nicht aufschreiben!}}=9+\frac{3\cdot\boxed{3}+1\cdot\boxed{4}}{24}=9\frac{13}{24}$$

Man addiert zuerst die Ganzen und dann die Brüche.

b) Dabei kann auch folgendes passieren:

$$11\frac{13}{25}+8\frac{19}{30}=19+\frac{13\cdot\boxed{6}+19\cdot\boxed{5}}{150}=19\frac{173}{150}=20\frac{23}{150}$$

$$\begin{array}{lll} 25 & =5\cdot 5\cdot\boxed{} & \mid EZ=6 \\ 30 & =5\cdot\boxed{}\cdot 2\cdot 3 & \mid EZ=5 \\ \hline HN & =\underbrace{5\cdot 5}_{25}\cdot 2\cdot 3=150 & \end{array}$$

Hier musste man aus dem Bruch $\frac{173}{150}$ noch 1 Ganzes herausziehen!

Es ist aber auch möglich, wenngleich oft sehr umständlich, die gemischten Brüche vor der Addition in unechte Brüche zu verwandeln. Das geht dann im Beispiel a) so:

$$4\frac{3}{8}+5\frac{1}{6}=\frac{35}{8}+\frac{31}{6}=\frac{35\cdot\boxed{3}+31\cdot\boxed{4}}{24}=\frac{105+124}{24}=\frac{229}{24}=9\frac{13}{24}$$

Die Rechnung wird umständlicher:

Zuerst muss man die Brüche umwandeln,

dann bekommt man im Zähler große Zahlen für die Erweiterung,

und am Ende muss man wieder einen gemischten Bruch herstellen.

Also: Finger weg von dieser Methode.

Bei der Subtraktion gibt es jedoch einen Fall, wo sie günstig ist.

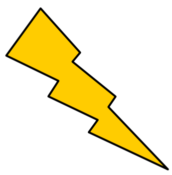
c) $$5\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=(5-3)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=2+\frac{2-1}{4}=2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$$

oder kürzer: $$5\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=2+\frac{2-1}{4}=2\frac{1}{4}$$

d) $$6-\frac{3}{4}=???$$

Hier wird man 6 in $5\frac{4}{4}$ umwandeln und dann so rechnen: $\boxed{6}-\frac{3}{4}=\boxed{5\frac{4}{4}}-\frac{3}{4}=5\frac{1}{4}$

e) $$5\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}=(5-3)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)=2+\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)$$



Wie soll man denn von 2 Vierteln 3 wegnehmen können?

Auch hier verfahren wir so dass wir ein Ganzes in 4 Viertel aufteilen:

Empfehlung: $$\boxed{5\frac{1}{2}}-3\frac{3}{4}=\boxed{5\frac{2}{4}}-3\frac{3}{4}=\boxed{4\frac{6}{4}}-3\frac{3}{4}=\underbrace{(4-3)+\frac{6-3}{4}}_{\text{Nicht aufschreiben!}}=1\frac{3}{4}$$

f) $$6\frac{2}{9}-\boxed{4\frac{2}{3}}=6\frac{2}{9}-\boxed{4\frac{6}{9}}=2\frac{2-6}{9}=\boxed{1\frac{9+2-6}{9}}=1\frac{5}{9}$$

Zuerst auf den Hauptnenner erweitern !

Man subtrahiert zuerst die Ganzen. Bei der Subtraktion der Zähler stellt man fest, dass 2 - 6 so nicht geht.

Also wandelt man ein Ganzes in weitere 9 Neuntel um!

Man hätte auch die gemischten Brüche zuerst in unechte Brüche verwandeln können:

$$6\frac{2}{9}-4\frac{2}{3}=\underbrace{\frac{54+2}{9}-\frac{12+2}{3}}_{\text{Nicht aufschreiben!}}=\frac{56}{9}-\frac{14}{3}=\underbrace{\frac{56-14\cdot\boxed{3}}{9}}_{\text{Nur im Kopf!}}=\frac{56-42}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$$

Kurz: $$\boxed{6\frac{2}{9}-4\frac{2}{3}=\frac{56}{9}-\frac{14}{3}=\frac{56-42}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}}$$

Trainingsaufgaben 2

a) Schreibe als unechte Brüche

$6\frac{2}{11}=$ $\qquad 12\frac{3}{4}=$ $\qquad 18\frac{1}{2}=$ $\qquad 4\frac{5}{36}=$

b) Schreibe als gemischte Brüche:

$\frac{13}{3}=$ $\qquad \frac{30}{7}=$ $\qquad \frac{50}{15}=$ $\qquad \frac{101}{48}=$

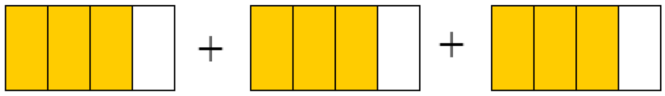
c) Berechne:

$3\frac{1}{4}+5\frac{1}{3}=$ $\qquad 12\frac{3}{8}+7\frac{5}{6}=$

$9\frac{3}{5}-4\frac{4}{10}=$ $\qquad 15\frac{1}{9}-8\frac{5}{6}=$

Lösungen am Ende des Textes.

1.4 Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl



Die Rechnung dazu lautet: $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

Diese Aufgabe kann man als Multiplikation schreiben: $\boxed{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\boxed{3}\cdot 3}{4} = \frac{9}{4}$

In Worten: **REGEL 1** **Eine Zahl wird mit einem Bruch multipliziert, indem man sie mit dem Zähler multipliziert.**

Beispiele:

a) $2\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{7}=\frac{10}{7}$ b) $5\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot 8}{3}=\frac{15}{3}$

c) $\frac{7}{9}\cdot 8=\frac{7\cdot 8}{9}=\frac{56}{9}$ d) $\frac{13}{50}\cdot 3=\frac{39}{50}$

Die Regel 1 sollte man in einem Falle nicht anwenden. Dazu dieses Beispiel:

e) $36\cdot\frac{5}{24}=\frac{36\cdot 5}{24}=\frac{180}{24}=\frac{15}{2}$

Zuerst wurde 36 mit 5 multipliziert, dann entstand die große Zahl 180, am Ende konnte (musste) man noch kürzen!

Die bessere Rechnung sieht so aus:

$36\cdot\frac{5}{24}=\frac{{}^{3}\cancel{36}\cdot 5}{{}_{2}\cancel{24}}=\frac{15}{2}$

Hier wurde <u>**vor**</u> der Multiplikation gekürzt!

Diesen Kürzungsvorgang kann man schon ganz zu Beginn vornehmen, wenn man weiß, dass Der Faktor <u>**vor**</u> dem Bruch eigentlich zum Zähler gehört:

${}^{3}\cancel{36}\cdot\frac{5}{{}_{2}\cancel{24}}=\frac{15}{2}$

So ist die Rechnung optimal kurz gelungen!

f) $\frac{25}{9}\cdot 18 = ?$ Zuerst nachdenken und erkennen: Man kann durch 9 kürzen!

$\frac{25}{\cancel{9}_{1}}\cdot\cancel{18}^{2} = \cancel{\frac{25\cdot 2}{1}} = 50$

Den mittleren Bruch schreibt man nicht auf.

g) $39\cdot\frac{31}{26} = ?$ Zuerst nachdenken und erkennen: Man kann durch 13 kürzen!

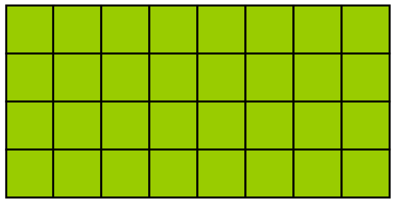
${}^{3}\cancel{39}\cdot\frac{31}{\cancel{26}_{2}}=\frac{93}{2}$

MERKE **Eine Zahl wird mit einem Bruch oder ein Bruch mit einer Zahl multipliziert, indem man diese Zahl mit dem Zähler multipliziert, <u>aber erst</u>, nachdem man sie (falls möglich) gegen den Zähler gekürzt hat.**

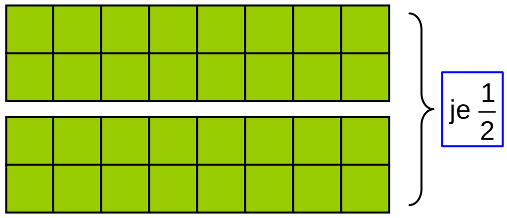
1.5 Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

Wir sollen eine Tafel Schokolade in gleich große Teile zerlegen.

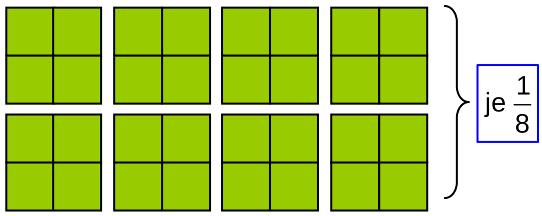
Zuerst sollen wir sie in 2 Teile zerlegen:



Wir brechen sie zum Beispiel der Länge nach durch.



Dann wird jeder Teil weiter in 4 gleiche Teile zerlegt. Die nächste Abbildung zeigt das Ergebnis.
Wir haben jetzt 8 Teile Schokolade.



Dazu die Rechnung:

1. Schritt: 1 Tafel geteilt durch 2 ergibt 2-mal $\frac{1}{2}$ Tafel.

2. Schritt: Jede halbe Tafel wird durch 4 geteilt:

Das ist diese Rechnung: $\frac{1}{2}:4$. Wir sehen das Ergebnis: $\frac{1}{2}:4=\frac{1}{8}$

Und jetzt die Frage: Wie kommt man ohne eine Abbildung auf das Ergebnis $\frac{1}{8}$?

REGEL: Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl geteilt,

indem man den NENNER mit dieser Zahl multipliziert-

Dies sieht dann so aus:

$$\frac{1}{2}:\boxed{2}=\frac{1}{2\cdot\boxed{2}}=\frac{1}{4}$$

Weitere Beispiele:

a) $\frac{24}{5}:7=\frac{24}{5\cdot 7}=\frac{24}{35}$ b) $\frac{3}{8}:5=\frac{3}{8\cdot 5}=\frac{3}{80}$ c) $\frac{12}{5}:2=\frac{12}{5\cdot 2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

WICHTIG: Am Beispiel c) erkennt man eine Vereinfachungsmöglichkeit:
Man kann durch 2 kürzen. Wenn man doch weiß, dass die 2 in den Nenner kommt, dann kann man sie auch schon vorher kürzen und die Rechnung wird einfacher, weil man sich die Multiplikation erspart:

$$\frac{{}^{6}\cancel{12}}{5}:\cancel{2}_{1}=\frac{6}{5}$$

Noch einige Beispiele dazu:

d) Schlechte Rechnung: $\frac{24}{25}:48=\frac{24}{25\cdot 48}=\frac{24}{1200}$ Es ist nicht gekürzt worden.

Topp-Rechnung: $\frac{{}^{1}\cancel{24}}{25}:\cancel{48}_{2}=\frac{1}{25\cdot 2}=\frac{1}{50}$ Es ist durch 12 gekürzt worden.

e) Schlechte Rechnung: $\frac{56}{13}:42=\frac{54}{13\cdot 42}=\frac{54}{546}$ Es ist nicht gekürzt worden.

Topp-Rechnung: $\frac{{}^{4}\cancel{56}}{13}:\cancel{42}_{3}=\frac{4}{13\cdot 3}=\frac{4}{39}$ Es ist durch 14 gekürzt worden.

f) Schlechte Rechnung: $3\frac{1}{4}:65=\frac{13}{4}:65=\frac{13}{4\cdot 65}=\frac{13}{260}$ Es ist nicht gekürzt worden.

Topp-Rechnung: $3\frac{1}{4}:65=\frac{{}^{1}\cancel{13}}{4}:\cancel{65}_{5}=\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$ Es ist durch 13 gekürzt worden.

MERKE: **Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man diese Zahl mit dem NENNER multipliziert. Man prüfe doch zuvor, ob man diese Zahl gegen den Zähler kürzen kann.**

Trainingsaufgabe 3

a)	$\frac{3}{5}\cdot 4=$	b)	$\frac{4}{9}:5=$	c)	$\frac{13}{16}\cdot 12=$	d)	$\frac{16}{13}:12$
e)	$\frac{25}{38}:40$	f)	$\frac{50}{33}\cdot 22$	g)	$4\frac{1}{6}\cdot 12$	h)	$5\frac{1}{3}:24$

1.6 Multiplikation zweier Brüche

Regel: **Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.**

Vorher sollte man kürzen!

Beispiele:

a) $\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{125}^{5}}{\cancel{88}_{11}} = \frac{15}{11} \quad \left(= 1\frac{4}{11}\right)$

b) $7\frac{1}{12} \cdot 5\frac{7}{34} = \frac{85}{12} \cdot \frac{177}{34} = \frac{5 \cdot \cancel{17}}{{}_4\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot 59}{2 \cdot \cancel{17}} = \frac{296}{8} \quad \left(= 36\frac{7}{8}\right)$

1.6 Division zweier Brüche

Regel: **Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.**

Vor der Multiplikation sollte man kürzen!

Beispiele:

a) $\frac{40}{39} : \frac{48}{65} = \frac{\cancel{40}^{5}}{\cancel{39}_{3}} \cdot \frac{\cancel{65}^{5}}{\cancel{48}_{6}} = \frac{25}{18}$

b) $32 : \frac{8}{15} = 32 \cdot \frac{15}{8} = \frac{\cancel{32}^{4} \cdot 15}{\cancel{8}_{1}} = 60$

c) $14\frac{2}{9} : 10\frac{2}{3} = \frac{128}{9} : \frac{32}{3} = \frac{\cancel{128}^{4}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{32}_{1}} = \frac{4}{3}$

Trainingsaufgabe 4

a) $\frac{15}{4} \cdot \frac{7}{20}$ b) $\frac{24}{25} \cdot \frac{125}{88}$ c) $3\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{11}$ d) $7\frac{1}{12} \cdot 5\frac{1}{34}$

e) $\frac{36}{35} : \frac{3}{7}$ f) $\frac{44}{27} : \frac{8}{81}$ g) $32 : \frac{8}{15}$ h) $9\frac{2}{7} : 2\frac{3}{5}$

i) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{11}}$ j) $\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{15}{4}}$.

Übersicht:

Multiplikation

	Regel	Beispiel
(1)	$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$	$\frac{15}{7}\cdot\frac{5}{12}=\frac{15\cdot 5}{7\cdot 12}=\ldots$
(2)	$\boxed{\frac{a}{b}\cdot z=\frac{a\cdot z}{b}}$	$\frac{15}{7}\cdot 8=\frac{15\cdot 8}{7}=\ldots$
(3)	$\boxed{z\cdot\frac{a}{b}=\frac{z\cdot a}{b}}$	$8\cdot\frac{15}{7}=\frac{8\cdot 15}{7}=\ldots$

Division

	Regel	Beispiel
(4a)	$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$	$\frac{15}{7}:\frac{12}{5}=\frac{15}{7}\cdot\frac{5}{12}=\frac{15\cdot 5}{7\cdot 12}=\ldots$
(4b)	$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$	$\frac{\frac{15}{7}}{\frac{12}{5}}=\frac{15}{7}\cdot\frac{5}{12}=\frac{15\cdot 5}{7\cdot 12}=\ldots$
(5)	$\boxed{\frac{a}{b}:z=\frac{a}{b\cdot z}}$	$\frac{15}{7}:12=\frac{15}{7\cdot 12}=\ldots$
(6)	$\boxed{z:\frac{a}{b}=z\cdot\frac{b}{a}=\frac{z\cdot b}{a}}$	$12:\frac{15}{7}=12\cdot\frac{7}{15}=\frac{12\cdot 7}{15}=\ldots$

Machte beachte stets:

Bevor man multipliziert sollte man kürzen.
Dadurch erhält man kleinere Zahlen und kann schneller rechnen.

1.8 Anwendungsaufgaben

a) Ordne der Größe nach $\frac{25}{36}$, $\frac{17}{20}$ und $\frac{23}{30}$.

Lösung:

Brüche kann man in aller Regel nur dann vergleichen, wenn man sie auf einen gemeinsamen Nenner gebracht hat. Dann erkennt man, wer am meisten „zählt“.

Wir bestimmen also den Hauptnenner und erweitern die Brüche so, dass sie diesen Nenner bekommen.

$$\begin{array}{llr}
36 = 4\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot \boxed{\;} & & |\,Ez = 5 \\
20 = 4\cdot 5 = 2\cdot 2\cdot \boxed{\;}\cdot \boxed{\;}\cdot 5 & & |\,Ez = 9 \\
30 = 6\cdot 5 = 2\cdot \boxed{\;}\cdot 3\cdot \boxed{\;}\cdot 5 & & |\,Ez = 6 \\
\hline
HN \quad = \quad 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 180 & &
\end{array}$$

Es folgt:

$$\frac{25}{36} = \frac{25\cdot\boxed{5}}{36\cdot\boxed{5}} = \frac{125}{180}, \quad \frac{17}{20} = \frac{17\cdot\boxed{9}}{20\cdot\boxed{9}} = \frac{153}{180}, \quad \frac{23}{30} = \frac{23\cdot\boxed{6}}{30\cdot\boxed{6}} = \frac{138}{180}$$

Jetzt kann man vergleichen und erhält: $\frac{25}{36} = \frac{125}{180} < \frac{17}{20} = \frac{153}{180} < \frac{23}{30} = \frac{138}{180}$.

b) Wie viele Meter sind $\frac{3}{8}$ von 12 km?

Lösung:

$\frac{3}{8}$ von 12.000 m sind $\frac{3}{\cancel{8}_1}\cdot \cancel{12\,000}^{1500}\,\text{m} = 3\cdot 1500\text{ m} = 4500\text{ m} \qquad (= 4{,}5\text{ km})$

c) Wie viele Minuten sind $\frac{5}{7}$ von 1 h 3 min?

Lösung:

Umrechnung: 1 h 3 min = 63 min

$\frac{5}{7}$ von 1 h 3 min sind dann: $\frac{5}{\cancel{7}_1}\cdot \cancel{63}^{9}\text{ min} = 5\cdot 9\text{ min} = 45\text{ min}$

d) Addiere das $\frac{2}{25}$ – fache der Summe von $\frac{5}{2}$ und $\frac{5}{13}$ zum $\frac{2}{11}$ – fachen ihrer Differenz.

Lösung:

$$\frac{2}{25}\cdot\underbrace{\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{13}\right)}_{\text{Summe}} + \frac{2}{11}\cdot\underbrace{\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{13}\right)}_{\text{Differenz}} = \frac{2}{25}\cdot\frac{65+10}{26} + \frac{2}{11}\cdot\frac{65-10}{26} = \frac{2}{25}\cdot\frac{75}{26} + \frac{2}{11}\cdot\frac{55}{26} = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 13} + \frac{1\cdot 5}{1\cdot 13} = \frac{3}{13} + \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$$

e) In einem Teesack befinden sich noch $7\frac{1}{2}$ kg Darjeeling-Tee, der zum Verkauf in 250 g – Packungen umgefüllt werden soll. Wie viele Packungen erhält man?

Lösung:

Wegen $250\text{ g} = \frac{1}{4}\text{kg}$ folgt: $7\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{15}{2} : \frac{1}{4} = \frac{15}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} = 30$

Man erhält also 40 Packungen Tee zu je 250 g.

f) In einem Teegeschäft stehen im Regal „Grüner Tee“ 12 Päckchen zu je 100 g Jasmin-Tee, 36 Päckchen „China-Surprise“ mit je $\frac{1}{8}$kg und 8 Päckchen „Ceylonstar“ mit je $\frac{3}{20}$ kg Tee.

Wir viel Tee ist das insgesamt?

Führe diese Rechnung zweimal durch, einmal mit Brüchen in der Einheit kg, das zweite Mal in g.

Lösung:

$$\cancel{12}^{6} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_5}\text{kg} + \cancel{36}^{9} \cdot \frac{1}{\cancel{8}_2}\text{kg} + \cancel{8}^{2} \cdot \frac{3}{\cancel{20}_5}\text{kg} = \frac{6}{5}\text{kg} + \frac{9}{2}\text{kg} + \frac{6}{5}\text{kg} = \frac{12+45+12}{10}\text{kg} = \frac{69}{10}\text{kg} = 6{,}9\text{ kg} = 6900\text{ g}$$

oder nachdem man weiß, dass $\frac{3}{20}\text{kg} = \frac{300\cancel{0}}{2\cancel{0}}\text{g} = 150\text{ g}$ sind:

$$12 \cdot 100\text{ g} + 36 \cdot 125\text{ g} + 8 \cdot 150\text{ g} = (1200 + 4500 + 1200)\text{g} = 6.900\text{ g}$$

Es handelt sich um 6.900 g Tee.

g) Eine pharmazeutische Fabrik stellt ein Stärkungsgetränk für Herz-Kreislauf-Erkrankungen her. Es gibt Abfüllgläser für $\frac{1}{4}$ Liter, $\frac{1}{5}$ Liter und für Kliniken Großflaschen mit $2\frac{1}{2}$ Litern Fassungsvermögen.

Es steht 500 Liter zur Verfügung. Davon sollen jeweils 1000 der beiden kleinen Flaschen gefüllt werden. Wie viele Klinikfalschen kann man dann noch abfüllen?

Lösung:

1. Abfüllung: $1000 \cdot \frac{1}{4}\text{ L} = 250\text{ L}$

2. Abfüllung: $1000 \cdot \frac{1}{5}\text{ L} = 200\text{ L}$

3. Abfüllung: Es sind von vorhanden: $500\text{ L} - 450\text{ L} = 50\text{ L}$

$$50 : 2\frac{1}{2} = 50 : \frac{5}{2} = \cancel{50}^{10} \cdot \frac{2}{\cancel{5}_1} = 20$$

1.9 Lösungen der Trainingsaufgaben

Trainingsaufgabe 1

e) $\frac{5}{9}+\frac{3}{4}=\frac{20+27}{36}=\frac{47}{36}\quad\left(=1\frac{11}{36}\right)$

f) $\frac{5}{9}+\frac{7}{18}=\frac{10+7}{18}=\frac{17}{18}$

g) $\frac{5}{9}+\frac{17}{24}=\frac{5\cdot 8+17\cdot 3}{72}=\frac{91}{72}$

h) $\frac{25}{44}-\frac{1}{5}=\frac{25\cdot 5-1\cdot 44}{220}=\frac{81}{220}$

i) $\frac{99}{40}-\frac{17}{60}=\frac{99\cdot 3-17\cdot 2}{120}=\frac{263}{120}$

j) $\frac{41}{81}-\frac{16}{27}=\frac{41-16\cdot 3}{81}=-\frac{7}{81}$

j) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20+15+12}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{47}{60}$

k) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{19}{24}=\frac{3\cdot 6+5\cdot 4+19}{24}=\frac{57}{24}=\frac{19}{8}\quad\left(=2\frac{1}{8}\right)$

l) $\frac{4}{21}+\frac{5}{28}-\frac{2}{7}=\frac{4\cdot 4+5\cdot 3-2\cdot 12}{84}=\frac{7}{84}=\frac{1}{12}$

Berechne den Hauptnenner jetzt mit Primfaktorzerlegung:

m) $\frac{33}{56}+\frac{19}{36}=\frac{33\cdot 9+19\cdot 14}{504}=\frac{297+266}{504}=\frac{563}{504}$

$$\begin{array}{l}
56=7\cdot 8=7\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\square\cdot\square \quad |\ EZ=9\\
36=4\cdot 9=\square\cdot 2\cdot 2\cdot\square\cdot 3\cdot 3 \quad |\ EZ=14\\
\hline
HN=7\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=504
\end{array}$$

n) $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}+\frac{1}{30}=\frac{5\cdot 15+7\cdot 10+1\cdot 6}{180}=\frac{151}{180}$

$$\begin{array}{l}
12=3\cdot 4=3\cdot 2\cdot 2\cdot\square\cdot\square \quad |\ EZ=15\\
18=2\cdot 9=3\cdot 2\cdot\square\cdot 3\cdot\square \quad |\ EZ=10\\
30=5\cdot 6=3\cdot 2\cdot\square\cdot\square\cdot 5 \quad |\ EZ=6\\
\hline
HN=3\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5=180
\end{array}$$

o) $\frac{7}{36}+\frac{3}{20}-\frac{5}{27}=\frac{7\cdot 15+3\cdot 27-5\cdot 20}{540}=\frac{86}{540}=\frac{43}{270}$

$$\begin{array}{l}
36=4\cdot 9=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot\square\cdot\square \quad |\ EZ=15\\
20=4\cdot 5=2\cdot 2\cdot\square\cdot\square\cdot 5\cdot\square \quad |\ EZ=27\\
27=3\cdot 9=\square\cdot\square\cdot 3\cdot 3\cdot\square\cdot 3 \quad |\ EZ=20\\
\hline
HN=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 3=540
\end{array}$$

Trainingsaufgabe 2

a) Schreibe als unechte Brüche

$6\frac{2}{11} = \frac{68}{11}$ $\qquad 12\frac{3}{4} = \frac{51}{4}$ $\qquad 18\frac{1}{2} = \frac{37}{2}$ $\qquad 4\frac{5}{36} = \frac{149}{36}$

b) Schreibe als gemischte Brüche:

$\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ $\qquad \frac{50}{15} = 3\frac{5}{15} = 3\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{101}{48} = 2\frac{5}{48}$

c) Berechne:

$3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} = 8 + \frac{3+4}{12} = 8\frac{7}{12}$ $\qquad 12\frac{3}{8} + 7\frac{5}{6} = 19 + \frac{9+20}{24} = 19\frac{29}{24} = 20\frac{5}{24}$

$9\frac{3}{5} - 4\frac{4}{10} = 5 + \frac{6-4}{10} = 5\frac{2}{10}$ $\qquad 15\frac{1}{9} - 8\frac{5}{6} = 7 + \frac{2-15}{18} = 6 + \frac{18+2-15}{18} = 6\frac{5}{18}$

Oder so: $\boxed{15\frac{1}{9}} - 8\frac{5}{6} = \boxed{14\frac{10}{9}} - 8\frac{5}{6} = 6 + \frac{20-15}{18} = 6\frac{5}{18}$

Trainingsaufgabe 3

a) $\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$

b) $\frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{9 \cdot 5} = \frac{4}{45}$

c) $\frac{13}{16} \cdot 12 = \frac{13 \cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{16}_{4}} = \frac{39}{4}$

d) $\frac{16}{13} : 12 = \frac{\cancel{16}^{4}}{13 \cdot \cancel{12}_{3}} = \frac{4}{39}$

e) $\frac{25}{38} : 40 = \frac{\cancel{25}^{5}}{38 \cdot \cancel{40}_{8}} = \frac{5}{304}$

f) $\frac{50}{33} \cdot 22 = \frac{50 \cdot \cancel{22}^{2}}{\cancel{33}_{3}} = \frac{100}{3}$

g) $4\frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{25 \cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{6}_{1}} = 50$

h) $5\frac{1}{3} : 24 = \frac{\cancel{16}^{2}}{3 \cdot \cancel{24}_{3}} = \frac{2}{9}$

Trainingsaufgabe 4

a) $\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{4}\cdot\frac{7}{\underset{4}{\cancel{20}}}=\frac{21}{16}$

b) $\frac{\overset{3}{\cancel{24}}}{\underset{1}{\cancel{25}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{125}}}{\underset{11}{\cancel{88}}}=\frac{15}{11}$

c) $3\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{11}=\frac{\cancel{11}}{3}\cdot\frac{9}{\cancel{11}}=3$

d) $7\frac{1}{12}\cdot5\frac{1}{34}=\frac{\overset{5}{\cancel{85}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}\cdot\frac{\overset{57}{\cancel{171}}}{\underset{2}{\cancel{34}}}=\frac{285}{8}$

e) $\frac{36}{35}:\frac{3}{7}=\frac{\overset{12}{\cancel{36}}}{\underset{5}{\cancel{35}}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}}=\frac{12}{5}$

f) $\frac{44}{27}:\frac{8}{81}=\frac{\overset{11}{\cancel{44}}}{\underset{1}{\cancel{27}}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{81}}}{\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{33}{2}$

g) $32:\frac{8}{15}=32\cdot\frac{15}{8}=\frac{\overset{4}{\cancel{32}}\cdot15}{\cancel{8}}=60$

h) $9\frac{2}{7}:2\frac{3}{5}=\frac{65}{7}:\frac{13}{5}=\frac{\overset{5}{\cancel{65}}}{7}\cdot\frac{5}{\cancel{13}}=\frac{25}{7}$

i) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{11}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{4}=\frac{33}{20}$

j) $\frac{\frac{5}{24}}{\frac{15}{4}}=\frac{\cancel{5}}{\underset{6}{\cancel{24}}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\underset{3}{\cancel{15}}}=\frac{1}{18}$.