Lineare Ungleichungen
mit 2 Variablen

Anwendung

(Vorübungen für das Thema Lineare Optimierung)

Demoseiten für www.mathe-CD

Datei Nr. 12190 bzw. 52100

Stand 10. Dezember 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Vorwort

Dieser Text dient der Vorübung für Aufgaben der linearen Optimierung.
Er tritt für die Oberstufe noch einmal unter der Nummer 52100 in Erscheinung.
Die Texte für „lineare Optimierung" haben die Nummern 12191 (Sek 1) bzw. 52101 (Sek 2).
Und zusätzlich für Abiturienten ein Text für das Simplexverfahren 52111 (März 2010)

Demoseiten für www.mathe-CD

1 Lineare Ungleichungen mit 2 Variablen

1.1 Wiederholung: Lineare Gleichungen mit 2 Variablen wie $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 3}$

Grundlage 1:

Wenn eine Gleichung wie $\boxed{2x + 3 = 11}$ gelöst werden soll, sucht man diejenigen Zahlen, die man in die Gleichung einsetzen kann, so dass damit eine wahre Aussage entsteht.
Man nennt das „die <u>Probe</u> machen“. Hier gibt es nur eine einige Lösung, das ist die Zahl 4.
Die Probe sieht so aus: $\boxed{2 \cdot 4 + 3 = 11}$.
Das Ergebnis der linken Seite stimmt mit der Zahl rechts überein.
Durch dieses Einsetzen ist eine „wahres Aussage“ entstanden.

Für die Zahl 5 stimmt die Probe nicht: $\boxed{2 \cdot 5 + 3 = 11}$ ist eine falsche Aussage, denn links steht als Ergebnis 13, und 13 = 11 ist eben falsch. Die Zahlen, die durch Einsetzen zu einer wahre Aussage führen, bilden die **Lösungsmenge:** $L = \{4\}$ **.**

Nicht immer ist jede Zahl als Lösung brauchbar! Daher gehört zu jeder Gleichung eine Grundmenge, welche angibt, welche Zahlen der Rechnung zugrunde liegen.

In einer Klasse 5 kennt in der man in der Regel weder Bruchrechnen noch negative Zahlen.
Dort verwendet man als Grundmenge $G = N_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$. Bezüglich dieser Grundmenge haben beispielsweise die Gleichungen $\boxed{2x = 7}$ und $\boxed{4x + 10 = 2}$ keine Lösung.
Lösung der ersten Gleichung wäre die Bruchzahl $\frac{7}{2}$, denn $2 \cdot \frac{7}{2} = 7$ ist eine wahre Aussage.
Und Lösung der 2. Gleichung wäre -2, denn man erhält $4 \cdot (-2) + 10 = 2$. Aber beides Zahlen stehen nicht zur Vewrfügung.
Auch in manchen Anwendungsbereichen muss man den Definitionsbereich einschränken und kann nicht alle Zahlen zulassen. Dies ist dann zu beachten.

Grundlage 2:

Eine Gleichung mit 2 Variablen wie $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 3}$ ist anders zu behandeln.

Zunächst ist zu beachten, dass es 2 Variable gibt. Daher ist jede Lösung ein **<u>Zahlenpaar</u>**:

$(8 \mid 1)$ ist ein Lösungspaar, denn die Probe liefert die wahre Aussage: $1 = \frac{1}{2} \cdot 8 - 3$

$(3 \mid -\frac{3}{2})$ ist ein Lösungspaar, denn die Probe lautet: $-\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3 - 3$

$(\frac{3}{2} \mid 4)$ ist keine Lösung, denn die Probe liefert die falsche Aussage: $4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 3$.

WISSEN: Eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten hat, wenn man für x und y jeweils die Grundmenge $G = R$ verwendet, unendlich viele Lösungspaare, die man in einem Koordinatensystem als Punkte darstellen kann, die auf einer Geraden liegen.
Hat diese Gleichung die Form $y = m \cdot x + n$, dann nennt man m die Steigung der Geraden und n ihren y-Achsenabschnitt.

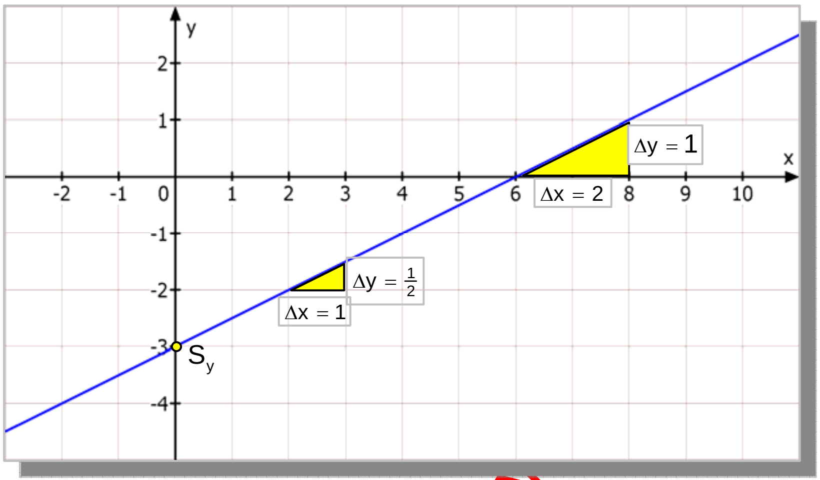
Demoseiten für www.mathe-CD

Stellt man die Gleichung $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 3}$ als Gerade dar, dann ist dies die geometrische Veranschaulichung der Lösungsmenge:

Ihre Steigung ist $m = \frac{1}{2}$. Das bedeutet, wenn man x um 1 vergrößert, nimmt y um $\frac{1}{2}$ zu.

Steigungsdreiecke, deren Katheten 1 und $\frac{1}{2}$ sind, bzw. Vielfache davon, verwenden dies.

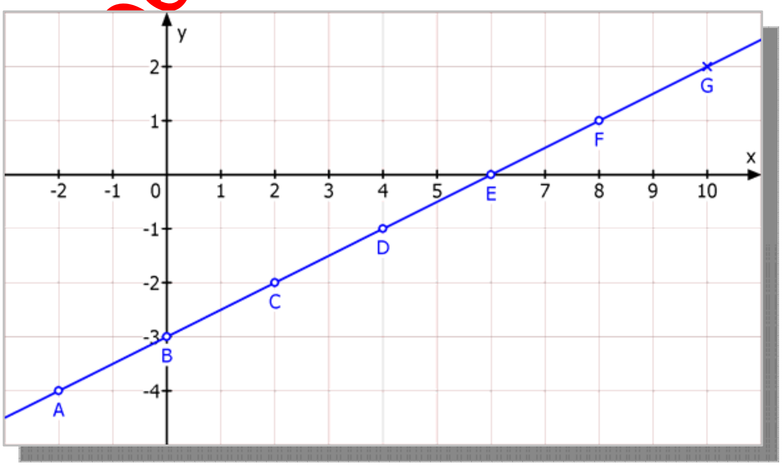
Der y-Achsenabschnitt ist -3. Das bedeutet, dass die Gerade die y-Achse bei y = -3 schneidet, also im Punkt $S_y(0\,|\,-3)$,



WISSEN: Diese Gerade stellt geometrisch die Lösungsmenge der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$ dar. Das heißt: Alle Punkte der Geraden sind im Grunde Zahlenpaare, welche die Lösung der Gleichung bilden!

Die Grundmenge für die Gleichung mit 2 Variablen schreibt man so auf: $G = R \times R$ oder auch $G = R^2$. Das erste R ist die Grundmenge für x, das zweite R für y. Und die Angabe $G = R \times R$ besagt, dass für x und y zunächst einmal beliebige reelle Zahlen zur Verfügung stehen.

Schränkt man den Definitionsbereich für beide Variablen auf die Menge Z der ganzen Zahlen ein, verwendet also $D = Z \times Z$, dann bleiben nur die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten übrig. In der folgenden Darstellung gehören also nur die mit A bis G bezeichneten Punkte zur Lösungsmenge der Gleichung, und natürlich auch die anderen, die nicht mehr ins Koordinatensystem passen.



Demoseiten für www

Gleich dazu eine **Anwendungsaufgabe**:

Hans erhält 10 € und will sich davon in der Tierhandlung Mäuse kaufen. Eine weiße Maus kostet 2 €, eine Springmaus 3 €. Wie viele kann er sich denn kaufen, wenn er das ganze Geld dafür ausgeben will.

Lösung:

Wir bezeichnen mit x die Anzahl der weißen Mäuse, mit y die der Springmäuse.

Dann lautet die Abrechnung für seinen Einkauf: $x \cdot 2\,€ + y \cdot 3\,€$

Will er die ganzen10 € ausgeben, gilt: $x \cdot 2\,€ + y \cdot 3\,€ = 10\,€$

Ohne die €-Zeichen: $2x + 3y = 10$ (1)

Zum Zeichnen der „Lösungsgeraden" stellen wir die Gleichung um:

Wir rechnen -2x: $3y = -2x + 10$

und dividieren dann durch 3: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$ (2)

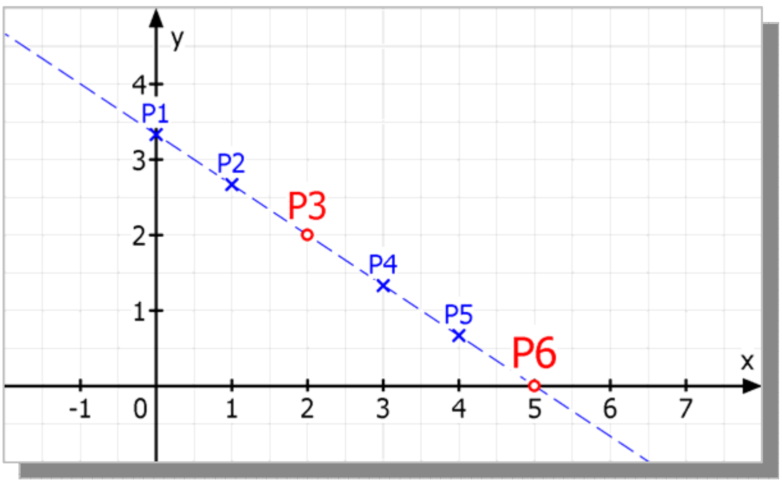
Die Gleichungen (1) und (2) sind gleichwertig (das heißt: Sie besitzen dieselbe Lösungsmenge). Die Gleichung (2) ist zum Anfertigen einer Zeichnung besser geeignet. Doch das Problem sind hier die Brüche mit dem Nenner 3. Also berechnet sich Hans einige Punkte der Geraden.

Zu x = 0:	$y = -\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$:	$P_1\left(0 \mid \frac{10}{3}\right)$
Zu x = 1:	$y = -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{10}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$	$P_2\left(1 \mid \frac{8}{3}\right)$
Zu x = 2:	$y = -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{10}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{6}{3} = 2$	$P_3\left(2 \mid 2\right)$
Zu x = 3:	$y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{10}{3} = -\frac{6}{3} + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$	$P_4\left(3 \mid \frac{4}{3}\right)$
Zu x = 4:	$y = -\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{10}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$	$P_4\left(4 \mid \frac{2}{3}\right)$
Zu x = 5:	$y = -\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{10}{3} = -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} = 0$	$P_6\left(5 \mid 0\right)$

Weil für Anzahlen nur die Zahlen aus $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; ...\}$ möglich sind, also $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt, gibt es nur zwei Paare, die für die Lösungsmenge brauchbar sind:

$L = \{(2 \mid 2), (5 \mid 0)\}$.

Als kauft er entweder 2 von jeder Sorte oder nur 5 weiße Mäuse!



Demoseiten für www.mathe-CD

1.2 Lineare Ungleichungen mit 2 Variablen

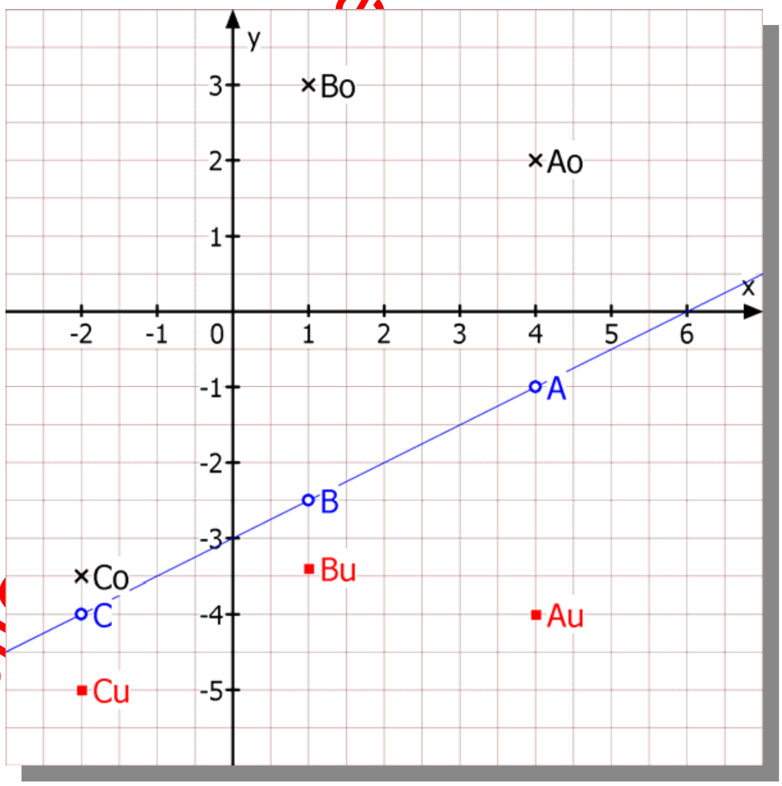
Beispiel 1: $\boxed{y \neq \frac{1}{2}x - 3}$

Es gibt 4 Arten von Ungleichungen, die hier denkbar sind:

$y < \frac{1}{2}x - 3$
$y \leq \frac{1}{2}x - 3$

$y > \frac{1}{2}x - 3$
$y \geq \frac{1}{2}x - 3$.

Wenn man die Lösungsmenge der zugehörigen Gleichung darstellen kann, also die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$, dann kann man auch sofort die Lösungsmengen dieser vier Ungleichungen angeben:



(1) Betrachte diese Punkte:

$A(4\,|\,-1)$ liegt <u>auf der Geraden,</u>
denn $y_A \boxed{=} \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 = -1$

$A_O(4\,|\,2)$ liegt <u>über der Geraden</u>,
denn $y_{Ao} = 2 \boxed{>} y_A$

$A_U(4\,|\,-4)$ liegt <u>unter der Geraden</u>,
denn $y_{Au} = -4 \boxed{<} y_A$

(2) Betrachte diese Punkte.

$B(1\,|\,-2{,}5)$ liegt <u>auf der Geraden,</u>
denn $y_B \boxed{=} \frac{1}{2} \cdot 1 - 3 = -2{,}5$

$B_O(1\,|\,3)$ liegt <u>über der Geraden</u>
denn $y_{Bo} = 3 \boxed{>} y_B$

$B_U(1\,|\,-3{,}4)$ liegt <u>unter der Geraden</u>,
denn $y_{Bu} = -3{,}4 \boxed{<} y_B$

(3) Für die Punkte C schreibe ich das anders auf: Sie haben alle 3 drei die x-Koordinate -2, aber für ihre y-Koordinaten gilt: $y_{Cu} < \boxed{y_C} < y_{Co}$.
Das heißt: C liegt auf der Geraden g, Co darüber und Cu darunter.

Beobachtung: Man kann anhand der y-Koordinaten erkennen, ob ein Punkt oberhalb der Geraden liegt oder unterhalb

$y = \frac{1}{2}x - 3$ gilt für alle Punkte <u>auf</u> der Geraden,
$y < \frac{1}{2}x - 3$ gilt für alle Punkte <u>unterhalb</u> der Geraden,
$y > \frac{1}{2}x - 3$ gilt für alle Punkte <u>oberhalb</u> der Geraden.

Demoseite-CD