

ALGEBRA

Quadratwurzeln

Übungsaufgaben
z. B. für den Unterricht

Das ausführliche Themenheft zu Quadratwurzeln
hat die Nummer 12201

Datei Nr. 12203

Stand 9. März 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist eine Auskopplung der Aufgaben aus dem umfangreicheren Text 12201, in dem das Rechnen mit Quadratwurzeln sehr ausführlich behandelt wird.

Diesen Text kann man beispielsweise gut für Unterrichtszwecke (Moodle) verwenden.

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201	Quadratwurzeln
12202	Reelle Zahlen
12203	Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht (dieser Text)
12205	Lernblatt: Wurzeln mit Variablen
12210	n-te Wurzeln
12211	Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300	Potenzen mit natürlichem Exponenten.
12301	Potenzen mit negativen Exponenten
12302	Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)
12305	Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht
12306	Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht
12310	Potenzrechnen (alter Text, alles in einem) – n-te Wurzeln, viele Aufgaben.
12311	Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)
12321	Lernprogramm
12333	Übung 4
12500	Große Aufgabensammlung
12510	Sammlung von Tests (Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Inhalt

1	Voraussetzungen	4
	1.1 Was ist eine Quadratwurzel	4
	1.2 Quadratwurzeln kann man als Potenzen schreiben	4
	1.3 Diese Quadratwurzeln sollte man auswendig wissen	4
2	Multiplikation von Wurzeln – WISSEN	5
	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{a^2} = a $,	5
	Partielles Wurzelziehen	5
	Trainingsaufgaben (1 – 7) dazu	6
	Lösungen dazu	19 - 21
3	Potenzieren von Wurzeln – WISSEN	7
	$\sqrt{2^{2n}} = 2^n$, $\sqrt{a^n} = \sqrt{a^n}$	7
	Trainingsaufgaben (8 – 9) dazu	8
	Lösungen dazu	21 - 22
4	Dividieren von Wurzeln – WISSEN	9
	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	9
	Trainingsaufgaben (10 – 12) dazu	10
	Lösungen dazu	23
5	Den Nenner rational machen – WISSEN	11
	Trainingsaufgaben (13 – 15) dazu	12
	Lösungen dazu	24 - 26
6	Summen von Wurzeln – WISSEN	13
	Trainingsaufgaben (16 – 22) dazu	14
	Lösungen dazu	27 – 30
7	Nenner mit Summen rational machen – WISSEN	16
	Trainingsaufgaben (23 – 26) dazu	17
	Lösungen dazu	31 - 36
	LÖSUNGEN aller Aufgaben	18 - 36

1. Voraussetzungen!

1.1 Was ist eine Quadratwurzel?

Unter $\sqrt{2}$ versteht man diejenige **nicht negative Zahl**, deren Quadrat 2 ergibt: $(\sqrt{2})^2 = 2$ (1)

Man muss „**nicht negativ**“ verlangen, damit das Wurzelziehen ein eindeutiges Ergebnis bekommt. Sonst könnte man ja $\sqrt{4} = \pm 2$ rechnen, denn sowohl $2^2 = 4$, wie auch $(-2)^2 = 4$!

Den Term unter der Wurzel nennt man **Radikand**. Daher kann man sagen:

Unter \sqrt{a} versteht man die Zahl, deren Quadrat den Radikanden ergibt: $(\sqrt{a})^2 = a$ (2)

Und weil eine Quadratzahl nie negativ ist, darf auch der Radikand einer Wurzel nie negativ sein, sonst kann man die Wurzel nicht berechnen. Man schreibt daher oft: $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ (3)

Das heißt eben: Die Wurzel aus -2 ist keine reelle Zahl, sie existiert also nicht (in der Menge der reellen Zahlen). Die meisten Quadratwurzeln kann man nur näherungsweise angeben, denn sie sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

1.2 Quadratwurzeln kann man als Potenzen schreiben:

Man definiert: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ (4). Das passt genau zur Formel (2) oder (1)!

Denn dort steht, dass das Quadrat einer Wurzel den Radikand ergibt.

Genau dasselbe passiert, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ quadriert: $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^1 = a$ (5)

Daher war es naheliegend, Formel (3) per Definition zuzulassen.

1.3 Diese Quadratwurzeln sollte man auswendig wissen:

$1^2 = 1$	also	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	also	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	also	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	also	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	also	$\sqrt{25} = 5$
$6^2 = 36$	also	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	also	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	also	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	also	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	also	$\sqrt{100} = 10$
$11^2 = 121$	also	$\sqrt{121} = 11$
$12^2 = 144$	also	$\sqrt{144} = 12$
$13^2 = 169$	also	$\sqrt{169} = 13$
$14^2 = 196$	also	$\sqrt{196} = 14$
$15^2 = 225$	also	$\sqrt{225} = 15$
$16^2 = 256$	also	$\sqrt{256} = 16$

2. Multiplikation von Wurzeln - WISSEN

2.1 Die Regel (1):

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (1a)$$

Beispiele:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$$

2.2 Umkehrung der Regel (1):

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (1b)$$

Beispiele:

$$\sqrt{144 \cdot 81} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{81} = 12 \cdot 9 = 108$$

$$\sqrt{900} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\sqrt{640000} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{100} = 8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$$

2.3 Eine wichtige Formel:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (2)$$

Warum ist $\sqrt{a^2} = a$ falsch?

Nehmen wir den Fall $a = -3$ (also a negativ). Dann wäre $a^2 = 9$ und die falsche

Formel $\sqrt{a^2} = a$ würde bedeuten: $\sqrt{9} = -3$. Dies kann aber nicht sein, denn per Definition ist eine Wurzel eine nicht negative Zahl.

Den Betrag darf man nur dann weglassen, wenn klar ist, dass $a \geq 0$ sein soll!

2.4 Partielles Wurzelziehen:

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \quad \text{für } a \geq 0 \text{ und } b \geq 0.$$

Beispiele:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{2} \cdot |a|$$

$$\sqrt{20x^2} = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} = 2\sqrt{5} \cdot |x|$$

$$\sqrt{144ab^2} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2} = 12 \cdot \sqrt{a} \cdot |b|$$

Achtung:

a) Es sei $u > 0$:

$$\sqrt{12u^2v} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot u^2 \cdot v} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{u^2} \cdot \sqrt{v} = 2\sqrt{3} \cdot u \cdot \sqrt{v}$$

Denn wegen $u > 0$ ist $\sqrt{u^2} = |u| = u$!

b) Warum wird hier der Betrag nicht benötigt: $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$??

Die Antwort lautet:

Weil zusätzlich \sqrt{a} dasteht! Denn für \sqrt{a} muss ja $a \geq 0$ sein, sonst ist dieser Term \sqrt{a} sinnlos.

Trainingsaufgaben dazu

Aufgabe 1

- | | | | | | | | |
|----|--------------------------------------|----|-----------------------------|----|-------------------------------|----|------------------------------|
| a) | $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ | b) | $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$ | c) | $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ | d) | $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$ |
| e) | $\sqrt{1210} \cdot \sqrt{0,1}$ | f) | $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$ | g) | $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$ | h) | $\sqrt{0,2} \cdot \sqrt{20}$ |
| i) | $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{27}$ | j) | $\sqrt{75} \cdot \sqrt{12}$ | k) | $\sqrt{120} \cdot \sqrt{0,3}$ | l) | $\sqrt{48} \cdot \sqrt{12}$ |

Aufgabe 2

- | | | | | | | | |
|----|-----------------------|----|----------------------|----|------------------------|----|-----------------------|
| a) | $\sqrt{144 \cdot 64}$ | b) | $\sqrt{81 \cdot 25}$ | c) | $\sqrt{169 \cdot 196}$ | d) | $\sqrt{25 \cdot 256}$ |
|----|-----------------------|----|----------------------|----|------------------------|----|-----------------------|

Aufgabe 3

Zerlege in Faktoren aus denen man die Wurzeln ziehen kann.

- | | | | | | | | |
|----|--------------------|----|------------------|----|-----------------------|----|------------------|
| a) | $\sqrt{3600}$ | b) | $\sqrt{4000000}$ | c) | $\sqrt{12100}$ | d) | $\sqrt{6250000}$ |
| d) | $\sqrt{810000000}$ | e) | $\sqrt{1960000}$ | f) | $\sqrt{169000000000}$ | | |

Aufgabe 4

Ziehe teilweise die Wurzeln:

- | | | | | | | | |
|----|--------------|----|---------------|----|---------------|----|-----------------|
| a) | $\sqrt{125}$ | b) | $\sqrt{80}$ | c) | $\sqrt{63}$ | d) | $\sqrt{300}$ |
| e) | $\sqrt{128}$ | f) | $\sqrt{405}$ | g) | $\sqrt{48}$ | h) | $\sqrt{288}$ |
| i) | $\sqrt{8}$ | j) | $\sqrt{50}$ | k) | $\sqrt{98}$ | l) | $\sqrt{363}$ |
| m) | $\sqrt{250}$ | n) | $\sqrt{2000}$ | o) | $\sqrt{1440}$ | p) | $\sqrt{400000}$ |

Aufgabe 5

Ziehe teilweise die Wurzeln. Die Variablen a, b, x, y usw. seien positiv!

- | | | | | | | | |
|----|----------------|----|-----------------|----|------------------|----|------------------|
| a) | $\sqrt{16x}$ | b) | $\sqrt{2a^2}$ | c) | $\sqrt{y^3}$ | d) | $\sqrt{18u^2}$ |
| e) | $\sqrt{50c^2}$ | f) | $\sqrt{a^3b^4}$ | g) | $\sqrt{25x^3}$ | h) | $\sqrt{48t^3}$ |
| i) | $\sqrt{t^5}$ | j) | $\sqrt{96a^2b}$ | k) | $\sqrt{xy^2z^3}$ | l) | $\sqrt{8u^2v^3}$ |

Aufgabe 6

Ziehe die Wurzeln. Die Variablen a, b seien beliebige reelle Zahlen.

- | | | | | | | | |
|----|----------------|----|-----------------|----|---------------|----|----------------|
| a) | $\sqrt{36a^2}$ | b) | $\sqrt{100b^2}$ | c) | $\sqrt{4x^3}$ | d) | $\sqrt{16a^4}$ |
|----|----------------|----|-----------------|----|---------------|----|----------------|

Aufgabe 7

Berechnung von Produkten durch partielles Wurzelziehen:

$$\sqrt{32} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{16 \cdot 2} \cdot \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}_{\text{vertauschen!}} = \sqrt{16} \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_2 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Hier muss man nacheinander mehrfach die Wurzel partiell ziehen.

- | | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| a) | $\sqrt{1568}$ | b) | $\sqrt{2025}$ | c) | $\sqrt{648}$ | d) | $\sqrt{2028}$ |
| e) | $\sqrt{1575}$ | f) | $\sqrt{2888}$ | g) | $\sqrt{3380}$ | h) | $\sqrt{4320}$ |

Lösung Aufgabe 25

$$\text{a) } \frac{5}{\sqrt{5}-2} = \frac{5 \cdot (\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{5(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 5\sqrt{5} + 10$$

$$\text{b) } \frac{5}{\sqrt{5}+3} = \frac{5 \cdot (\sqrt{5}-3)}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)} = \frac{5(\sqrt{5}-3)}{5-9} = -\frac{5}{4}(\sqrt{5}-3) = \frac{15}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{5}$$

$$\text{c) } \frac{4}{2+\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2}) \cdot (2-\sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{2})}{2} = 2 \cdot (2-\sqrt{2})$$

$$\text{oder } 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{d) } \frac{12}{\sqrt{12}-\sqrt{10}} = \frac{12 \cdot (\sqrt{12}+\sqrt{10})}{(\sqrt{12}-\sqrt{10})(\sqrt{12}+\sqrt{10})} = \frac{12(\sqrt{12}+\sqrt{10})}{12-10} = 6(2\sqrt{3}+\sqrt{10})$$

$$= 12\sqrt{3} + 6\sqrt{10}$$

$$\text{e) } \frac{24}{\sqrt{11}-\sqrt{5}} = \frac{24 \cdot (\sqrt{11}+\sqrt{5})}{(\sqrt{11}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{11}+\sqrt{5})} = \frac{24 \cdot (\sqrt{11}+\sqrt{5})}{11-5} = \frac{24 \cdot (\sqrt{11}+\sqrt{5})}{6}$$

$$= 4(\sqrt{11}+\sqrt{5}) = 4\sqrt{11} + 4\sqrt{5}$$

$$\text{f) } \frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{27}} = \frac{5 \cdot (\sqrt{12}-\sqrt{27})}{(\sqrt{12}+\sqrt{27}) \cdot (\sqrt{12}-\sqrt{27})} = \frac{5 \cdot (\sqrt{12}-\sqrt{27})}{12-27} = \frac{5 \cdot (\sqrt{12}-\sqrt{27})}{-15}$$

$$= -\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{27})}{3} = -\frac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{3})}{3} = -\frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Eine viel elegantere Lösung entsteht dann, wenn man erkennt, dass beide Nennerradikanden durch partielles Wurzelziehen vereinfacht werden können:

$$\frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{27}} = \frac{5}{\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3}} = \frac{5}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad !!!$$

$$\text{g) } \frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{(3+\sqrt{7}) \cdot (3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{(3+\sqrt{7})^2}{9-7} = \frac{9+6\sqrt{7}+7}{2} = \frac{16+6\sqrt{7}}{2}$$

$$= 8+3\sqrt{7}$$

$$\text{h) } \frac{15+\sqrt{200}}{15-\sqrt{200}} = \frac{(15+10\sqrt{2})^2}{(15-10\sqrt{2}) \cdot (15+10\sqrt{2})} = \frac{225+300\sqrt{2}+200}{225-200} = \frac{425+300\sqrt{2}}{25}$$

$$= 17+12\sqrt{2}$$

$$i) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{7-3} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{oder} = \frac{1}{4}\sqrt{14} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

$$j) \frac{12+\sqrt{120}}{12-\sqrt{120}} = \frac{(12+\sqrt{120})^2}{(12-\sqrt{120}) \cdot (12+\sqrt{120})} = \frac{144+2 \cdot 12\sqrt{120}+120}{144-120}$$

$$= \frac{264+24 \cdot \sqrt{120}}{24} = \frac{264}{24} + \sqrt{120} = 11 + \sqrt{120} = 11 + \sqrt{4 \cdot 30} = 11 + 2 \cdot \sqrt{30}$$

$$k) \frac{8-\sqrt{12}}{8-\sqrt{3}} = \frac{(8-2\sqrt{3}) \cdot (8+\sqrt{3})}{(8-\sqrt{3}) \cdot (8+\sqrt{3})} = \frac{64+8\sqrt{3}-16\sqrt{3}-2 \cdot 3}{64-3} = \frac{58-8\sqrt{3}}{61}$$

$$l) \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{1-5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{6}{4} + \frac{2}{4}\sqrt{5} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$m) \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}+2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{5+4\sqrt{5}+4}{5-4} = 9+4\sqrt{5}$$

$$n) \frac{\sqrt{288}+16}{\sqrt{288}-16} = \frac{(\sqrt{288}+16)^2}{(\sqrt{288}-16) \cdot (\sqrt{288}+16)} = \frac{288+32 \cdot \sqrt{288}+256}{288-256}$$

$$= \frac{544+32 \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}{32} = 17+12\sqrt{2}$$

$$o) \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{5+2\sqrt{15}+3}{2} = 4+\sqrt{15}$$

$$p) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{3}+3}{5-3} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$$

$$q) \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{7-2\sqrt{35}+5}{7-5} = \frac{12-2\sqrt{35}}{2} = 6-\sqrt{35}$$

$$r) \frac{(4\sqrt{5}+5\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5}-\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{6})} = \frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot \sqrt{30} + 5\sqrt{30} + 5 \cdot 6}{5-6} = \frac{50+9\sqrt{30}}{-1}$$

$$= -50-9\sqrt{30}$$