ALGEBRA

n-te Wurzeln

Einführung
und Grundeigenschaften

Bitte Vorwort lesen!

Speziell für Intranet entwickelt

Datei Nr. 12210

Friedrich W. Buckel

Stand: 11. März 2010

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese Einführung in das Rechnen mit 3. Wurzel, 4. Wurzeln usw. ist eine Auskopplung aus dem Text 12310 Potenzrechnen. Dort wurden diese n-ten Wurzeln im Zusammenhang mit Potenzrechnen eingeführt. Es zeigt sich schnell, dass damit das Rechnen an vielen Stellen deutlich vereinfacht wird. Doch da es Schüler bzw. Klassen gibt, die die Grundlagen für dieses Thema bereits vor der Behandlung der Potenzgesetze erlernen, habe ich die wichtigsten Themen hier zusammengestellt und dabei so weit wie möglich auf Potenzrechnen verzichtet.

Da manche Themen für n-te Wurzeln wirklich kaum ohne Potenzrechnung besprochen werden können, findet man dort also die Fortsetzung zu diesem Text. Und einige Kapitel des vorliegenden Textes werden dort anders besprochen, eben mit Verwendung der Potenzgesetzte, was Vorteile bringt. Einige Aufgaben dieses Textes werden in 12310 nochmals auf neue Weise gelöst, und zwar mittels Potenzrechnung.

Dieser Text wurde in seiner Struktur speziell für den Einsatz in schulinternen Intranetze entwickelt, wie Moodle und andere.

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201	Quadratwurzeln
12202	Reelle Zahlen
12203	Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht
12205	Lernblatt: Wurzeln mit Variablen
12210	n-te Wurzeln (dieser Text)
12211	Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300	Potenzen mit natürlichem Exponenten.
12301	Potenzen mit negativen Exponenten
12302	Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)
12305	Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht
12306	Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht
12310	Potenzrechnen (alter Text, alles in einem) – n-te Wurzeln, viele Aufgaben.
12311	Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)
12321	Lernprogramm
12333	Übung 4
12500	Gruße Aufgabensammlung
12510	Sammlung von Tests (Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Torgelow, den 8. März 2010 Friedrich Buckel

Inhalt

2. Fall: Dritte Potenzen und dritte Wurzeln als Umkehrung

Weil $2^3 = 8$ ist, legt man fest, dass die dritte Wurzel aus 8 die Zahl 2 sei und

schreibt dies so:	$\sqrt[3]{8} = 2$	denn	$2^3 = 8$
Oder:	$\sqrt[3]{27} = 3$	denn	$3^3 = 27$
Oder:	$\sqrt[3]{64} = 4$	denn	$4^3 = 64$

Definition:

$\sqrt[3]{8}$ wird definiert als diejenige nicht negative Zahl, deren 3. Potenz 8 ist.
$\sqrt[3]{5}$ wird definiert als diejenige nicht negative Zahl, deren 3. Potenz 5 ist.
$\sqrt[3]{a}$ wird definiert als diejenige nicht negative Zahl, deren 3. Potenz a ist.

Für alle Wurzeln gilt die Festlegung:
Der Radikand darf nicht negativ sein, d.h. $\text{Rad} \geq 0$.

Weitere Beispiele:

$\sqrt[3]{125} = 5$ denn $5^3 = 125$ Also ist auch: $\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125} = 5$

Nach der Definition ist aber auch: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

$$\boxed{\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{5}^3 = 5}$$

$\sqrt[3]{27} = 3$ denn $10^3 = 1000$ Also ist auch $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$

Nach der Definition ist aber auch $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$

$$\boxed{\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{3}^3 = 3}$$

Für Quadratzahlen gibt es diese Formel: $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$.

Für 3. Wurzeln gilt dagegen $\boxed{\sqrt[3]{x^3} = x}$
denn x und x^3 haben stets dasselbe Vorzeichen und dürfen nicht negativ sein.

MERKE:

$\sqrt[3]{7^3} = \sqrt[3]{7}^3 = 7$

$\sqrt[3]{(-7)^3} = \sqrt[3]{-7}^3 = -7$ ist aber Unsinn!

$\boxed{\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a}^3 = a}$ gilt nur für $a \geq 0$!

Hinweis:

Man kann die dritte Wurzel auch als Potenz schreiben: $\boxed{\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}}$

Nach den Regeln der Potenzrechnung folgt nämlich:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 = a$$

2.5 Nenner rational machen

1. Fall: Eine Quadratwurzel im Nenner:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Merke: $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

c) $\frac{16}{\sqrt{12}}$ Jetzt kann man umständlich vorgehen und mit $\sqrt{12}$ erweitern.

Die dingende Empfehlung heißt jedoch:

Zerlege den Radikanden in Faktoren und erweitere dann minimal.

Also rechnet man besser so: $\frac{16}{\sqrt{12}} = \frac{16\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

d) $\frac{45}{\sqrt{27}} = \frac{45\cdot\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{45\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 3} = 5\sqrt{3}$

e) $\frac{36}{\sqrt{18}} = \frac{36\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{2\cdot 3} = 6\sqrt{2}$

f) $\frac{12}{\sqrt{48}} = \frac{12\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16\cdot 3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\cancel{12}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4\cdot 3}} = \sqrt{3}$

g) $\frac{26}{\sqrt{52}} = \frac{26\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13\cdot 4}\cdot\sqrt{13}} = \frac{26\cdot\sqrt{13}}{2\cdot 13} = \sqrt{13}$

2 Fall: Ein dritte Wurzel im Nenner:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}} = \frac{3\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{3\sqrt[3]{9}}{3} = \sqrt[3]{9}$

Diese Methode sieht allgemein so aus:

$\frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{3} = \sqrt[3]{3}$

Dahinter steckt diese Methode:

$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}} = \frac{a\cdot\sqrt[3]{a}}{a} = \sqrt[3]{a}$

c) $\frac{24}{\sqrt[3]{16}} = \frac{24\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8\cdot 2}\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{24\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8}} = \frac{24\sqrt[3]{4}}{2\cdot 2} = 6\sqrt[3]{4}$

Man zerlegt den Radikanden in die Kubikzahl 8 und erweitert so, dass eine weitere Kubikzahl entsteht, so dass man im Nenner komplett die Wurzel ziehen kann. Wer Potenzrechnen kann, hat mit dieser Methode eine bessere Möglichkeit:

$\frac{24}{\sqrt[3]{16}} = \frac{24\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt[3]{4}}{2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt[3]{4}}{2^2} = 6\sqrt[3]{4}$

d) $$\frac{2}{\sqrt[3]{24}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3\cdot 8}\cdot\sqrt[3]{9}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27\cdot 8}} = \frac{2}{3\cdot 2}\sqrt[3]{9} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$$

e) $$\frac{12}{\sqrt[3]{54}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2\cdot 27}} = \frac{12\cdot\sqrt[3]{4}}{3\cdot\underbrace{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}_{\text{Ziel:}\sqrt[3]{8}}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$$

f) $$\frac{1}{\sqrt[3]{100}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{2\cdot 5}}{\sqrt[3]{4\cdot 25}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{8\cdot 125}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{2\cdot 5} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{10}$$

g) $$\frac{5}{\sqrt[3]{160}} = \frac{5}{\sqrt[3]{10\cdot 16}} = \frac{5}{\sqrt[3]{5\cdot 2\cdot 2\cdot 8}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{25\cdot 2}}{2\cdot\sqrt[3]{5\cdot 4}\cdot\sqrt[3]{25\cdot 2}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{50}}{2\cdot\sqrt[3]{125\cdot 8}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{50}}{2\cdot 5\cdot 2} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{50}$$

h) $$\frac{x^3y^4}{\sqrt[3]{x^4y^8}} = \frac{x^3y^4}{\sqrt[3]{x\cdot x^3\, y^6\cdot y^2}} = \frac{x^3y^4\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y}}{xy^2\cdot\sqrt[3]{x\cdot y^2}\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y}} = \frac{x^3y^4\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y}}{xy^2\cdot xy} = xy\sqrt[3]{x^2\cdot y}$$

3. Fall: Ein vierte Wurzel im Nenner:

a) $$\frac{16}{\sqrt[4]{8}} = \frac{16\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}} = \frac{16\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{16\sqrt[4]{2}}{2} = 8\sqrt[4]{2}$$

b) $$\frac{10}{\sqrt[4]{40}} = \frac{10\cdot\sqrt[4]{2\cdot 5^3}}{\sqrt[4]{8\cdot 5}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 5^3}} = \frac{10\cdot\sqrt[4]{2\cdot 5^3}}{\sqrt[4]{16\cdot 5^4}} = \frac{10\cdot\sqrt[4]{2\cdot 5^3}}{2\cdot 5} = \sqrt[4]{2\cdot 5^3} = \sqrt[4]{250}$$

Hier habe ich im Nenner mit 5^3 statt mit 125 erweitert (was ja dasselbe ist). Aber da man für die 4. Wurzel auf 5^4 kommen muss, kann man das kürzer so schreiben.

c) $$\frac{40}{\sqrt[4]{32}} = \frac{40\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{16\cdot 2}\cdot\sqrt[4]{2^3}} = \frac{40\cdot\sqrt[4]{8}}{2\cdot 2} = 10\cdot\sqrt[4]{8}$$

d) $$\frac{72}{\sqrt[4]{360}} = \frac{72\cdot\sqrt[4]{2\cdot 3^2\cdot 5^3}}{\sqrt[4]{2^3\cdot 3^2\cdot 5}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 3^2\cdot 5^3}} = \frac{72\cdot\sqrt[4]{2\cdot 9\cdot 125}}{\sqrt[4]{2^5\cdot 3^5\cdot 5^5}} = \frac{72\cdot\sqrt[4]{4500}}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{12}{5}\cdot\sqrt[4]{4500}$$

Hier habe ich doch einmal alles in Primfaktor-Potenzen zerlegt. Dann wurde so erweitert, dass jeder Primfaktor auf den Exponenten 5 gekommen ist. Zuvor hat man diese Zerlegung benötigt:

$$360 = 10\cdot 36 = 2\cdot 5\cdot 9\cdot 4 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$$

e) $$\frac{abc}{\sqrt[4]{a^5b^{10}c^3}} = \frac{abc\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{a^5b^{10}c^3}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}} = \frac{abc\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{a^8b^{12}c^4}} = \frac{abc\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}}{a^2b^3c} = \frac{\sqrt[4]{a^3b^2c}}{ab^2}$$

Trainingsaufgabe 11

a) $\frac{48}{\sqrt{24}}$ b) $\frac{54}{\sqrt{108}}$ c) $\frac{24}{\sqrt{288}}$ d) $\frac{14}{\sqrt{56}}$

e) $\frac{50}{\sqrt[3]{20}}$ f) $\frac{54}{\sqrt[3]{36}}$ g) $\frac{6}{\sqrt[3]{48}}$ h) $\frac{12}{\sqrt[3]{60}}$

i) $\frac{14}{\sqrt[3]{98}}$ j) $\frac{12abc}{\sqrt[3]{4a^2b}}$ k) $\frac{12a^2b}{\sqrt[3]{12ab^4}}$ l) $\frac{90xy^2z^3}{\sqrt[3]{18x^3y^5z^7}}$

m) $\frac{24}{\sqrt[4]{12}}$ n) $\frac{18}{\sqrt[4]{72}}$ o) $\frac{12abc}{\sqrt[4]{27a^2b^3c}}$ p) $\frac{12abc}{\sqrt[4]{48a^5b^4c^3}}$

Trainingsaufgabe 12

Beispiele:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{45}} = \sqrt[3]{\frac{2}{9\cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 3\cdot 25}{9\cdot 5\cdot 3\cdot 25}} = \sqrt[3]{\frac{150}{27\cdot 125}} = \sqrt[3]{\frac{150}{3^3\cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{150}}{3\cdot 5} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{150}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{ab^2c^3d^4}} = \sqrt[5]{\frac{a^4\cdot b^3\cdot c^2\cdot d}{ab^2c^3d^4\cdot a^4\cdot b^3\cdot c^2\cdot d}} = \sqrt[5]{\frac{a^4\cdot b^3\cdot c^2\cdot d}{a^5b^5c^5d^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^4b^3c^2d}}{abcd}$$

$$\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{75}} = \sqrt[3]{\frac{36}{75}} = \sqrt[3]{\frac{12\cdot 5}{25\cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{60}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{60}$$

Zuerst wurde <u>eine</u> Wurzel gebildet, dann gekürzt, erweitert, im Nenner die Wurzel gezogen und dann die Zählerwurzel als Faktor hinter den Bruch geschrieben.

a) $\sqrt{\frac{32}{24}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{81}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{45}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{36}}$

e) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{45}}$ f) $\frac{\sqrt[4]{18}}{\sqrt[4]{42}}$ g) $\sqrt[4]{\frac{32}{ab^2}}$ h) $\sqrt[4]{\frac{18}{25}}$