ALGEBRA

Potenzen Teil 1

mit natürlichen Exponenten

Trainingsheft zu den Grundlagen

Bitte Vorwort lesen!

Datei Nr. 12300

Stand 8. März 2009

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der alte Text Potenzrechnen wurde völlig neu geschrieben und zu Trainingsheften in mehrere Teile zerlegt. So findet man auch schneller das, was man sucht.

Ferner können diese Texte auf diese Weise besser in innerschulischen Intranets wie „moodle" verwendet werden.

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300 Potenzen mit natürlichem Exponenten (dieser Text)
12301 Potenzen mit negativen Exponenten
12302 Potenzen mit gebrochenen Exponenten
(Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)

12305 Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht
12306 Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht

12310 Potenzrechnen (alter Text, alles in einem)
12311 Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)

12321 Lernprogramm
12333 Übung 4

12500 Gruße Aufgabensammlung
12510 Sammlung von Tests
(Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201 Quadratwurzeln
12202 Reelle Zahlen
12203 Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht
12205 Lernblatt: Wurzeln mit Variablen
12210 n-te Wurzeln
12211 Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Inhalt

§ 1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$

a heißt die **Basis**, n der **Exponent** oder die Hochzahl.

Weil n eine <u>Anzahl</u> darstellt, muss n in dieser Definition eine natürliche Zahl sein!

Diese anfängliche Einschränkung des Exponenten auf natürliche Zahlen wird im Laufe der Zeit schrittweise fallen gelassen. Es zeigt sich nämlich, dass man negative ganze Zahlen zum Bruchrechnen verwenden kann (Text 12301) und dass sich mit Bruchzahlen im Exponenten Wurzeln aller Art darstellen kann (Text 12302). Vor allem dort lohnt sich dieser Einsatz, weil viele Berechnungen mit Potenzen einfacher werden.

Beispiele:

$$3^5 = \underbrace{3 \cdot 3}_{9} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{9} \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243$$

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^4 = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{16}{625}$$

Wer schon mit Wurzeln rechnen kann: $\left(\sqrt{2}\right)^4 = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{=2} \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{=2} = 4$

Man schreibt auch $\sqrt{2}^4 = 4$ ohne Klammern.

Vereinbarung

Um Klammern zu sparen gelte die Vorschrift:
1. Punkt vor Strich
2. Potenz von Punkt

Daher bedeutet $5 \cdot 2^3$ das Produkt $5 \cdot 8 = 40$ **und nicht** $(5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$.

Das ist wichtig in Termen wie $4x^2$

Soll man hier für x die Zahl 3 einsetzen, entsteht: $4 \cdot 3^2$

Die Berechnung davon geht so: $4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Falsch ist diese Rechnung: $4 \cdot 3^2 = 12^3 = 1728$.

Hier wurde versehentlich so gerechnet: $(4 \cdot 3)^3 = 12^3 = 1728$.

Diesen Fehler erlebt man oft …..

Potenzrechnen erfordert einen Grundschatz an Potenzen, die man auswendig wissen muss.

Diese sollte jeder ohne Nachdenken wissen:

Alle Quadratzahlen bis 20^2

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$
$11^2 =121$	$12^2 = 144$	$13^2 =169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$
$16^2 = 256$	$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$

und diese weiteren Potenzen

$2^3= 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$
$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$
$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	$6^{\prime 3} = 216$

Mit diesem „Grundpotenzschatz“ kommt man sehr weit!

§ 2 Rechengesetze für Potenzen mit gleicher Basis

2.1 Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$9^2 \cdot 9^3 = (9\cdot 9)\cdot(9\cdot 9\cdot 9) = 9^{2+3} = 9^5$$
$$4^5 \cdot 4 = (4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4)\cdot 4 = 4^{5+1} = 4^6$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m\,\text{Faktoren}} \cdot \underbrace{(a\cdot \ldots \cdot a)}_{n\,\text{Faktoren}} = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a}_{m+n\,\text{Faktoren}} = a^{m+n}$$

Regel 1a: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Wendet man diese Regel so an, dann verwandelt man ein Produkt von 2 Potenzen in eine Potenz.

Noch zwei Beispiele: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^9$

$$\sqrt{7}^3 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7}^4 = \underbrace{\sqrt{7}\sqrt{7}}_{=7}\,\underbrace{\sqrt{7}\sqrt{7}}_{=7} = 7\cdot 7 = 49$$

$$\sqrt{2}^3 \cdot \sqrt{2}^5 = \sqrt{2}^8 = \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{=2}\,\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{=2}\,\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{=2}\,\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{=2} = 16$$

Regel 1b: $\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$

Das ist die Richtungsumkehrung der Regel 1a. Man kann nämlich fast jede solche Regel in zwei Richtungen anwenden, also auch von rechts nach links und dann sieht sie so aus! Sie dient dazu, dann man – falls notwendig – eine Potenz zerlegen kann in ein Produkt aus zwei Potenzen:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2^n \cdot 2$$

$$\frac{2^9}{2^6} = \frac{2^{6+2}}{2^6} = \frac{\cancel{2^6}\cdot 2^2}{\cancel{2^6}} = 2^2$$ Durch 2^6 wurde gekürzt.

Eine wichtige Anwendung für später sei jetzt schon einmal gezeigt:
Kommen Bruchexponenten vor, die größer als 1 sind, dann zerlegt man sie in eine Summe, welche die Ganzen und einen echten Bruch enthält. Dann zerlegt man diese Potenz nach Regel 1b in ein Produkt, in dem man dann $4^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{4}$ also 2 schreiben kann.

Wer noch keine Wurzeln und deren Potenzschreibweise versteht, überspringe das Beispiel.

$$\boxed{4^{\frac{3}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4\cdot\sqrt{4} = 4\cdot 2 = 8}$$

Trainingsaufgabe 1

Fasse zusammen:

a) $5^3 \cdot 5^{11}$ b) $2^7 \cdot 2^{12}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$ d) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2$ e) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5$

Zerlege:

f) $3^7 = 3^4 \cdot ?$ g) $2^{11} = 2 \cdot ?$ h) $a^{n+2} = a^n \cdot ?$ i) 2^{a+b+c}

j) $z^{2n} = z^n \cdot ?$ k) $3^{2z+1} = ?\cdot 3$ l) $4^5 = \frac{4^8}{?}$ m) $\frac{3^9}{3^3} = \frac{3^{3+5}}{3^3} = \ldots$

2.2 Division von Potenzen mit gleicher Basis

Nebenstehenden Beispielen entnimmt man, dass man durch Kürzen den Exponenten verkleinert. Man subtrahiert den Exponenten des Nenners!

$$\frac{9^5}{9^3} = \frac{\cancel{9 \cdot 9 \cdot 9} \cdot 9 \cdot 9}{\cancel{9 \cdot 9 \cdot 9}} = 9^{5-3} = 9^2 = 81$$

$$\frac{2^{10}}{2^6} = \frac{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}} = 2^{10-6} = 2^4$$

Regel 2a: $\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}}$

$$\frac{7^{12}}{7^3} = 7^{12-3} = 7^9, \qquad \frac{8^3}{8^2} = 8^{3-2} = 8^1 = 8$$

$\frac{a^6}{a^6} = 1$ wenn man kürzt.

$\frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0$ nach Regel 2a.

Daher legt man fest:

$\boxed{a^0 := 1}$

Hinweis: Der Doppelpunkt zusammen mit dem Gleichzeitszeichen bedeutet „sei".
Denn a^0 hat zunächst keine Bedeutung, weil ja der Exponent die Anzahl der Faktoren angibt. Aber was sollen 0 Faktoren bedeuten? Auf Grund solcher Rechnungen wie eben erkennt man, dass die Festsetzung $a^0 = 1$ sinnvoll ist. Merken!

Ein Riesenproblem taucht aber in folgender Aufgabe auf: $\frac{9^3}{9^5} = 9^{3-5} = 9^{-2}$

Der Exponent -2 hat bisher keinerlei Bedeutung für uns, weil bisher laut Definition der Exponent die Anzahl der Faktoren ausmacht. Was sollen -2 Faktoren sein?

Daher werden in einem solchen Fall die Exponenten im Nenner subtrahiert:

$$\frac{9^3}{9^5} = \frac{\cancel{9 \cdot 9 \cdot 9}}{\cancel{9 \cdot 9 \cdot 9} \cdot 9 \cdot 9} = \frac{1}{9^{5-3}} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$$

Jetzt kann man alle Faktoren des Zählers wegkürzen, wonach nur noch Faktoren im Nenner übrig bleiben. Man errechnet, dass 5 – 3 = 2 Faktoren übrig bleiben. Jetzt entsteht also eine Potenz im Nenner. Wie geht man also vor?

Methode: Hat der Nenner einen höheren Exponenten als im Zähler, dann subtrahiert man im Nenner so:

Regel 2b: $\boxed{\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} \quad \text{wenn } m > n \text{ ist}}$

Es sei aber gleich erwähnt, dass man das Subtrahieren im Zähler aber auch zulässt. Die sich dann ergebende Potenz mit negativem Exponenten soll die gleiche Bedeutung haben wie die andere Berechnung:

$$\frac{2^4}{2^5} = \begin{cases} \frac{1}{2^{5-4}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \\ 2^{4-5} = 2^{-1} \end{cases} \qquad \frac{5^4}{5^7} = \begin{cases} \frac{1}{5^{7-4}} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \\ 5^{4-7} = 5^{-3} \end{cases} \qquad \frac{4}{4^8} = \begin{cases} \frac{1}{4^{8-1}} = \frac{1}{4^7} \\ 4^{1-8} = 4^{-7} \end{cases}$$

Das Rechnen mit negativen Exponenten wird in § 5 fortgesetzt.

Regel 2c: $\boxed{a^{m-n} = \frac{a^n}{a^m}}$

Wendet man die Regel 2a in umgekehrter Richtung an, also von rechts nach links, dann entsteht die sehr nützliche Umformungsregel 2c. Sie dient dazu Potenzen in einen Bruch aus 2 Potenzen zu zerlegen, wenn Bedarf dazu da ist.

Beispiele:

$2^5 = 2^{7-2} = \frac{2^7}{2^2}$ $\qquad$ $5^{n-2} = \frac{5^n}{5^2} = \frac{5^n}{25}$ $\qquad$ $2^{x-4} = \frac{2^x}{2^4} = \frac{2^x}{16}$ usw.

Trainingsaufgabe 2

a) $\frac{2^{17}}{2^9}$ $\qquad$ b) $\frac{3^3}{3^3}$ $\qquad$ c) $\frac{5^8}{5^7}$ $\qquad$ d) $\frac{12^5}{12^3}$

Trainingsaufgabe 3

Schreibe das Ergebnis auf 2 Arten, einmal als Potenz im Nenner, einmal mit einem negativen Exponenten.

a) $\frac{3^4}{3^5}$ $\qquad$ b) $\frac{2^4}{2^7}$ $\qquad$ c) $\frac{5^6}{5^8}$ $\qquad$ d) $\frac{c^2}{c^6}$

Trainingsaufgabe 4

Zerlege die Potenz in einen Bruch aus zwei Potenzen. Beende die folgenden Rechnungen:

a) $2^9 = 2^{11-?} = \frac{2^{11}}{?}$ $\qquad$ b) $3^3 = 3^{5-?} = ?$ $\qquad$ c) $9^{-2} = 9^{4-?} = ?$

d) 4^{n-1} $\qquad$ e) a^{3-x} $\qquad$ f) 8^{2x-3}