

ALGEBRA

Potenzen Teil 2

mit negativen Exponenten

Trainingsheft

Alle Regeln

Musterbeispiele - Trainingsaufgaben

Datei Nr. 12301

Stand 8. März 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demoseiten für www.mathe-cd.de

Vorwort

Der alte Text Potenzrechnen wurde völlig neu geschrieben und zu Trainingsheften in mehrere Teile zerlegt. So findet man auch schneller das, was man sucht.

Ferner können diese Texte auf diese Weise besser in innerschulischen Intranets wie „moodle“ verwendet werden.

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

- 12300 Potenzen mit natürlichem Exponenten
- 12301 Potenzen mit negativen Exponenten (dieser Text)
- 12302 Potenzen mit gebrochenen Exponenten
(Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)
- 12305 Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht
- 12306 Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht
- 12310 Potenzrechnen (alter Text, alles in einem)
- 12311 Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)
- 12321 Lernprogramm
- 12333 Übung 4
- 12500 Große Aufgabensammlung
- 12510 Sammlung von Tests
(Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

- 12201 Quadratwurzeln
- 12202 Reelle Zahlen
- 12203 Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht
- 12205 Lernblatt: Wurzeln mit Variablen
- 12210 n-te Wurzeln
- 12211 Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Inhalt

§ 6	Potenzen mit negativen ganzen Exponenten	4
6.1	Was bedeuten negative Exponenten	4
6.2	Rechnen mit negativen Exponenten - Musterbeispiele	5
6.3	Rechnen mit negativen Exponenten – Aufgaben	8
	Lösungen der Trainingsaufgaben	11 - 19

Demoseiten für www.mathe-cd.de

5. Potenzieren von Potenzen

$$\text{a) } (3^{-2})^3 = 3^{-2 \cdot 3} = \boxed{3^{-6}} = \frac{1}{3^6} \quad \longleftrightarrow \quad (3^{-2})^3 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 = \frac{1^3}{(3^2)^3} = \frac{1}{3^6} = \boxed{3^{-6}}$$

$$\text{b) } (5^2)^{-4} = 5^{2 \cdot (-4)} = \boxed{5^{-8}} = \frac{1}{5^8} \quad \longleftrightarrow \quad (5^2)^{-4} = \frac{1}{(5^2)^4} = \frac{1}{5^8} = \boxed{5^{-8}}$$

$$\text{c) } (2^{-4})^{-3} = 2^{12} \quad \longleftrightarrow \quad (2^{-4})^{-3} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2^{12}}} = 2^{12}$$

Die Anwendung des Gesetzes $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ liefert also dasselbe Ergebnis, wie wenn man zuerst die negativen Exponenten beseitigt und dann nur noch mit positiven Exponenten rechnet.

Daher kann man unbedenklich so rechnen wie die nächsten Beispiele zeigen:

$$\text{d) } (12^{-3})^{-2} = 12^6 \quad \text{e) } (8^{-3})^2 = 8^{-6} = \frac{1}{8^6}$$

$$\text{f) } (5^3)^{-1} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad \text{g) } \left((2^{-3})^{-2}\right)^{-3} = 2^{(-3) \cdot (-2) \cdot (-3)} = 2^{-18} = \frac{1}{2^{18}}$$

Eine wichtige Folgerung

Was ergibt dann

$$\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$$

oder

$$\frac{1}{5^{-4}} = 5^4$$

Das kann man beweisen:

$$\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 2^3 \quad \text{oder so: } \frac{1}{2^{-3}} = (2^{-3})^{-1} = 2^{(-3) \cdot (-1)} = 2^3$$

$$\frac{1}{5^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{5^4}} = 5^4 \quad \text{oder so: } \frac{1}{5^{-4}} = (5^{-4})^{-1} = 5^4$$

Merke: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $\frac{1}{a^{-n}} = (a^{-n})^{-1} = a^n$



Und für Brüche gilt:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

$$\left(\frac{2^{-3}}{3^2}\right)^{-4} = \frac{2^{12}}{3^{-8}} = 2^{12} \cdot 3^8 \quad (\text{Mehr geht nicht!}) \quad \left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left[\frac{2^{10}}{3^{10}}\right]$$

6.3 Rechnen mit negativen Exponenten - Aufgaben

Trainingsaufgabe 1

Berechne:

a) 2^{-4}	b) 5^{-3}	c) 9^{-2}	d) 7^{-1}
e) 2^{-6}	f) 3^{-3}	g) 4^{-4}	h) 8^{-3}

Trainingsaufgabe 2

a) $4^{-2} \cdot 4^{-3}$	b) $5^7 \cdot 5^{-3}$	c) $2^{12} \cdot 2^{-7}$	d) $3^{-15} \cdot 3^{12}$
e) $3^{-15} \cdot 3^6$	f) $5^{-2} \cdot 5^{-8}$	g) $2^4 \cdot 2^{-8}$	h) $7^3 \cdot 7^{-7} \cdot 7^{-12} \cdot 7^5$

Trainingsaufgabe 3

a) $\frac{4^{-2}}{4^{-5}}$	b) $\frac{3^2}{3^{-7}}$	c) $\frac{2^{-8}}{2^2}$	d) $\frac{2^3}{2^{-7}}$
e) $\frac{5^{-13}}{5^{-8}}$	f) $\frac{7^8}{7^4}$	g) $\frac{3^{-8}}{3^{-12}}$	h) $\frac{2^3}{2^{-5} \cdot 2^{13}}$

Trainingsaufgabe 4

Potenzen, die man auf eine gemeinsame Basis bringen sollte:

a) $9^4 \cdot 3^{-4}$	b) $16^{-5} \cdot 2^{11}$	c) $49^{-3} \cdot 7^6$	d) $100^{-3} \cdot 1000^2$
e) $\frac{2^5}{4^6}$	f) $\frac{8^{-3}}{32^{-2}}$	g) $\frac{27^{-2}}{9^4}$	h) $\frac{64^3}{16^5}$

Trainingsaufgabe 5

a) $2^4 \cdot 3^4$	b) $4^3 \cdot 3^3$	c) $2^{-4} \cdot 5^{-4}$	d) $3^{-2} \cdot 6^{-2}$
e) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$	f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 8^{-3}$	g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^{-2}$	h) $9^{-5} \cdot 2^{-5} \cdot 3^3 \cdot 6^3$

Trainingsaufgabe 6

a) $\frac{4^{-3}}{2^{-3}}$	b) $\frac{28^{-2}}{7^{-2}}$	c) $\frac{3^{-7}}{21^{-7}}$	d) $\frac{3^{-2} \cdot 20^{-3}}{12^{-2} \cdot 5^{-3}}$
e) $\frac{3^{-5}}{12^{-5}}$	f) $\frac{24^5}{8^5}$	g) $\frac{6^{-3}}{3^{-3}}$	h) $\frac{9^{-5}}{18^{-5}}$

Trainingsaufgabe 7

a) $25^3 \cdot 5^{-4}$ b) $32^{-3} \cdot 8^5$ c) $27^{-5} \cdot 9^8$ d) $32^3 \cdot 8^{-7}$
 e) $48^{-7} \cdot 24^7$ f) $12^4 \cdot 18^{-2}$ g) $48^3 \cdot 72^{-2}$ h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Trainingsaufgabe 8

a) $(2^3)^4$ b) $(5^2)^{-4}$ c) $(2^{-4})^{-3}$ d) $(a^3)^0$
 e) $(3^{-2})^3$ f) $(5^{-1})^3$ g) $(4^{-3})^{-2}$ h) $(3^{-2})^{-5}$
 i) $(4^{-3})^2$ j) $(3^{-1})^{-1}$ k) $\left(\frac{1}{2^{-3}}\right)^4$ l) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-3}$
 m) $\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-2}$ n) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^2$ o) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ p) $\left(\frac{2^3}{3^{-3}}\right)^{-2}$

Trainingsaufgabe 9

Zerlege in Primfaktoren und vereinfache dann so weit wie möglich:

a) $(54x^2y^{-3})^4 \cdot (162x^3 \cdot y^{-4})^{-3}$ b) $(32^2 \cdot a^{-3} \cdot b^2)^2 \cdot (36 \cdot a^5 \cdot b^{-2})^3$
 c) $(12^3 \cdot a^2 \cdot b^3)^{-2} \cdot (48^2 \cdot a^{-3} \cdot b^2)^3$ e) $(18x^3y^2z)^4 \cdot (3^{-3}x^{-2}y^3z^{-2})^{-2}$

Trainingsaufgabe 10

Vereinfache und gib das Ergebnis einmal ohne Bruchstrich und einmal mit Bruchstrich aber positiven Exponenten an:

a) $\frac{5^3 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-3}}{5^{-3} \cdot 2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^2}$ b) $\frac{(4a^3 \cdot 12^3 b^{-2} \cdot 18a^{-2} b^5)^3}{(54^2 a^3 \cdot 36b^{-4})^{-2}}$

Trainingsaufgabe 11

Vereinfache und gib das Ergebnis einmal ohne Bruchstrich und einmal mit Bruchstrich aber positiven Exponenten an:

a) $\frac{(p^3q^{-1})^{-2} \cdot (p^2r^{-1})^2}{r^2s^5 \cdot (qs^{-5})^{-1}}$ b) $\frac{a^{-4}b^8 \cdot (b^{-4}c^{-3})^{-4}}{(c^5b^{-2})^3 \cdot a^{-4}b^5}$
 c) $\frac{(a^4b^{-2})^{-1} \cdot (a^3c^{-2})^2}{(c^{-2}d^3)^2 \cdot b^3d^{-4}}$ d) $\frac{(8ab^3)^{-2} \cdot (9a^{-3}b^2)^4}{(12a^2b^{-2})^3 \cdot (4a^2b^3)^{-3}}$

Trainingsaufgabe 12

Vereinfache und gib das Ergebnis einmal ohne Bruchstrich und einmal mit Bruchstrich aber positiven Exponenten an:

$$\text{a) } \frac{(x^{-3}y^2)}{(z^{-3}y^2)^4} : \frac{(z^{-3}x^2)^{-2}}{(x \cdot y^{-1})^3}$$

$$\text{b) } \frac{(x^2y^{-3})^{-3}}{z^7y^{-3}} : \frac{x^{-4}y^5}{(x^4z^3)^{-4}}$$

$$\text{c) } \frac{(8x^{-2}y^3)^2}{(75x^2y^2z)^3} : \frac{(12x^{-3}yz^2)^{-4}}{(125x^{-3}z\sqrt{z})^2}$$

$$\text{d) } \left(\frac{k^{-3}l}{m^{-3}n^4}\right)^{-2} : \left(\frac{k^3l^{-3}}{m^{-1}n^{-4}}\right)^2$$

$$\text{e) } \frac{(x^{-3}y^2)^{-4}}{(x^{-1}z^{-5})^3} : \frac{(x^4z^{-4})^2}{(y^5z^{-3})^{-4}}$$

$$\text{f) } \left(\frac{p^{-2}q^3}{r^2s^4}\right)^{-3} : \left(\frac{p^3q^{-3}}{r^{-3}s^{-4}}\right)^2$$

Trainingsaufgabe 13

Löse die Klammern auf und fasse zusammen:

$$\text{a) } (a^{-4} + b^{-2})^2 + (a^{-4} - b^{-2})^2 \quad \text{b) } (2^{-3} + 3^2)^2 - (2^{-3} - 3^2)^2$$

$$\text{c) } (x^{-3} - 2y^{-6})^2 - (x^{-3} + 2y^{-6})^2 \quad \text{d) } (x^{-4} + y^4)^2 - (x^{-4} - y^4)^2$$

$$\text{e) } (a^3 + a^{-3})(a^3 - a^{-3}) - (a^3 - a^{-3})^2$$

Demoseiten für www.mathe-cd.de

Lösungen

auf der CD

Lösungsmusterseiten für www.mathe-cd.de