

ALGEBRA

Potenzen Teil 3

mit gebrochenen Exponenten

Trainingsheft

Alle Regeln

Musterbeispiele – Trainingsaufgaben

Hier wird das Rechnen mit n-ten Wurzeln mit Hilfe der Potenzrechnung durchgeführt.

Datei Nr. 12302

Stand 11. März 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der alte Text Potenzrechnen wurde völlig neu geschrieben und zu Trainingsheften in mehrere Teile zerlegt. So findet man auch schneller das, was man sucht.

Ferner können diese Texte auf diese Weise besser in innerschulischen Intranets wie „moodle“ verwendet werden.

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300	Potenzen mit natürlichem Exponenten
12301	Potenzen mit negativen Exponenten
12302	Potenzen mit gebrochenen Exponenten (dieser Text) (Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)
12305	Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht
12306	Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht
12310	Potenzrechnen (alter Text, alles in einem)
12311	Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)
12321	Lernprogramm
12333	Übung 4
12500	Große Aufgabensammlung
12510	Sammlung von Tests (Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201	Quadratwurzeln
12202	Reelle Zahlen
12203	Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht
12205	Lernblatt: Wurzeln mit Variablen
12210	n-te Wurzeln
12211	Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Inhalt

§ 7	Potenzen mit gebrochenen Exponenten	4
§8	Rechnen mit gebrochenen Exponenten	6
8.1	Wurzeln potenzieren – Schreibweisen	6
	Wurzeln potenzieren – Berechnung der Ergebnisse	7
	1. Fall: Wurzelexponent kleiner als Wurzelgrad	7
	2. Fall: Wurzelexponent ist ein Vielfaches des Wurzelgrads	8
	3. Fall: Wurzelexponent größer als Wurzelgrad !!!!	9
8.2	Wurzeln mit negativen Zahlen potenzieren	12
	Spielregel: Den Nenner rational machen	13
	Mit Bruchzahlen potenzieren	14
	Trainingsaufgaben 8 bis 16	15
8.3	Multiplikation von Wurzeln – und als Potenzrechnung	17
	(1) Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten	17
	(2) Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis	18
	(3) Multiplikation von total verschiedenartigen Wurzeln	20
8.3	Division von Wurzeln – und als Potenzrechnung	21
	(1) Division von Potenzen mit gleichem Exponenten	21
	(2) Division von Potenzen mit gleicher Basis	22
	(3) Rationalmachen des Nenners	23
8.4	Verschachteln von Wurzeln – auch als Potenzrechnung	26
8.5	Komplizierte Aufgabenstellungen für Fortgeschrittene	27
	Lösungen aller Trainingsaufgaben	31 - 51

Demoseite

3. Fall: Der Wurzelexponent ist größer als der Wurzelgrad

$$a) \quad \sqrt{2^5} = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Berechnung mit Wurzeln:} \quad \sqrt{2^5} = \underbrace{\sqrt{2} \sqrt{2}}_{=2} \underbrace{\sqrt{2} \sqrt{2}}_{=2} \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2^5} = \sqrt{(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad (2a)$$

$$\text{Oder so: } \sqrt{2^5} = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2} = 4\sqrt{2} \quad (2b)$$

$$\text{Berechnung mit Potenzen:} \quad 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{2} \quad (3)$$

Hier ist die Potenzmethode sehr günstig. Der Wurzelexponent ergibt den Zähler, der Wurzelgrad den Nenner des gebrochenen Exponenten. **Diesen Bruch zerlegt man in Ganze plus Restbruch.** Dann wird nach der Potenzregel 1b die Potenz mit der Summe im Exponenten zerlegt in ein Produkt zweier Potenzen. Das Ergebnis ist dann schnell angeschrieben. Dieses Herausheben der Ganzen aus dem Bruch-Exponenten entspricht genau dem, was man partielles Wurzelziehen nennt und in der Methode (2) blau und rot angedeutet worden ist.

$$b) \quad \sqrt[3]{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{10}} = 5^{\frac{10}{3}}$$

$$\text{Berechnung mit Wurzeln:} \quad \sqrt[3]{5^{10}} = \sqrt[3]{5^9} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^3 \cdot \sqrt[3]{5} = 125 \cdot \sqrt[3]{5} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{5^{10}} = \sqrt[3]{5^9} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^3 \cdot \sqrt[3]{5} = 125 \cdot \sqrt[3]{5} \quad (2)$$

$$\text{Berechnung mit Potenzen:} \quad 5^{\frac{10}{3}} = 5^{3+\frac{1}{3}} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 125 \cdot \sqrt[3]{5} \quad (3)$$

Die Wurzelrechnungen wurden deutlich abgekürzt und verlangen $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{5^9} = 5^3 = 5^3!$

$$c) \quad \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{4^3} = 4^{\frac{3}{5}}$$

ACHTUNG: Hier ist der Wurzelexponent zwar kleiner als der Wurzelgrad.

Aber man sollte erkennen, dass man 4 durch 2^2 ersetzen kann:

$$\sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{2^{2 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^6} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{(2^2)^3} = \sqrt[5]{2^6} \quad \text{bzw.} \quad 4^{\frac{3}{5}} = (2^2)^{\frac{3}{5}} = 2^{2 \cdot \frac{3}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\text{Berechnung mit Wurzeln:} \quad \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2} = 2 \cdot \sqrt[5]{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{(2^2)^3} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2} = 2 \cdot \sqrt[5]{2} \quad (2)$$

$$\text{Berechnung mit Potenzen:} \quad 4^{\frac{3}{5}} = (2^2)^{\frac{3}{5}} = 2^{2 \cdot \frac{3}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = 2^{1+\frac{1}{5}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \sqrt[5]{2} \quad (3)$$

$$d) \quad \sqrt[3]{16^5} = \sqrt[3]{16^5} = 16^{\frac{5}{3}}$$

Berechnung mit Wurzeln: $\sqrt[3]{16^5} = \sqrt[3]{16^3} \cdot \sqrt[3]{16^2} = 16 \cdot \sqrt[3]{2^4^2} = 16 \cdot \sqrt[3]{2^8} = 16 \cdot \sqrt[3]{2^6 \cdot 2^2}$
 $= 16 \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 16 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{4} = 64 \cdot \sqrt[3]{4} \quad (1)$

$$\sqrt[3]{16^5} = \sqrt[3]{16^3 \cdot 16^2} = \sqrt[3]{16^3} \cdot \sqrt[3]{16^2} = 16 \cdot \sqrt[3]{(2^4)^2} = 16 \cdot \sqrt[3]{2^8} =$$

 $= 16 \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 16 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{4} = 64 \cdot \sqrt[3]{4} \quad (2)$

Berechnung mit Potenzen: $16^{\frac{5}{3}} = (2^4)^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{20}{3}} = 2^{6+\frac{2}{3}} = 2^6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 64 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 64 \cdot \sqrt[3]{4}$

Hier ist die Potenzmethode fast unschlagbar. Daher rechne ich die nächsten Beispiele nur noch in der Potenzmethode vor:

$$e) \quad \sqrt[3]{9^2} = 9^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$f) \quad \sqrt[4]{125^5} = 125^{\frac{5}{4}} = (5^3)^{\frac{5}{4}} = 5^{\frac{15}{4}} = 5^{4+\frac{3}{4}} = 5^4 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 625 \cdot \sqrt[4]{5^3} = 625 \cdot \sqrt[4]{125}$$

$$g) \quad \sqrt{32^3} = (32)^{\frac{3}{2}} = (2^5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{25}{2}} = 2^{12+\frac{1}{2}} = 2^{12} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4096 \cdot \sqrt{2}$$

$$h) \quad \sqrt[3]{243^2} = 243^{\frac{2}{3}} = (3^5)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{10}{3}} = 3^{3+\frac{1}{3}} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 27 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$i) \quad \sqrt[7]{16^3} = 16^{\frac{3}{7}} = (2^4)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{12}{7}} = 2^{1+\frac{5}{7}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{5}{7}} = 2 \cdot \sqrt[7]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[7]{32}$$

$$j) \quad \sqrt[5]{64^9} = 64^{\frac{9}{5}} = (2^6)^{\frac{9}{5}} = 2^{\frac{54}{5}} = 2^{10+\frac{4}{5}} = 2^{10} \cdot 2^{\frac{4}{5}} = 1024 \cdot \sqrt[5]{2^4} = 1024 \cdot \sqrt[5]{16}$$

$$k) \quad \sqrt[3]{13^8} = 13^{\frac{8}{3}} = 13^{2+\frac{2}{3}} = 13^2 \cdot 13^{\frac{2}{3}} = 169 \cdot \sqrt[3]{13^2} = 169 \cdot \sqrt[3]{169}$$

Trainingsaufgaben 5

Ersetze den Radikanden durch eine Potenz und berechne dann auf 2 Arten: Wurzeln und Potenzen

$$a) \quad \sqrt[4]{9} \quad b) \quad \sqrt[4]{121} \quad c) \quad \sqrt[4]{144} \quad d) \quad \sqrt[4]{196}$$

$$e) \quad \sqrt[6]{27} \quad f) \quad \sqrt[6]{81} \quad g) \quad \sqrt[6]{125} \quad h) \quad \sqrt[6]{100}$$

Trainingsaufgaben 6

Schreibe den Aufgabenterm als Potenz ohne Wurzeln und berechne dann das Ergebnis nach der gezeigten Methode.

$$a) \quad \sqrt[5]{3^6} \quad b) \quad \sqrt[6]{27^4} \quad c) \quad \sqrt[3]{32^5} \quad d) \quad \sqrt[4]{8^5}$$

$$e) \quad \sqrt[7]{3^5} \quad f) \quad \sqrt{27^5} \quad g) \quad \sqrt[9]{144^5} \quad h) \quad \sqrt[13]{16^7}$$

$$i) \quad \sqrt{125^3} \quad j) \quad \sqrt[8]{8^6}$$

und viel später ...

Trainingsaufgabe 26

Mache den Nenner rational, falls möglich:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{125}}}$	b) $\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}}$	c) $\frac{4}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{128}}}$	d) $\sqrt[13]{27\sqrt[3]{81}}$
e) $\sqrt[3]{4\sqrt{128}}$	f) $(\sqrt{27\sqrt[3]{3}})^{-6}$	g) $\frac{1}{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}$	h) $\frac{18}{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{36}}}$
i) $\frac{7}{\sqrt[3]{49\sqrt{7}}}$	j) $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{4}}$	k) $\left(\sqrt[5]{\frac{1024}{125}}\right)^3$	l) $\sqrt[8]{\left(\frac{16}{27}\right)^{-3}}$
m) $\left(\sqrt[6]{\frac{81}{125}}\right)^{-2}$	n) $\sqrt[6]{\left(\frac{81}{64}\right)^{-2}}$	o) $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)^2$	p) $\sqrt[8]{\left(\frac{16}{27}\right)^{-3}}$
q) $\left(\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt{18}}\right)^{-1}$	r) $\frac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt[6]{98}}$	s) $\left(\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt{24}}\right)^2$	t) $\left(\sqrt[3]{\frac{27}{4}}\right)^2$
u) $\left(\sqrt[5]{\frac{125}{81}}\right)^{-2}$	v) $\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt[3]{18}}\right)^{-3}}$	w) $\left(\sqrt[4]{\frac{16}{9}}\right)^3$	x) $\left(\sqrt{\left(\frac{343}{81}\right)^{-1}}\right)^{-\frac{4}{3}}$

Alle Lösungen auf CD (20 Seiten!)