ALGEBRA

Potenzen Teil 3

mit gebrochenen Exponenten

Trainingsheft

Alle Regeln

Musterbeispiele – Trainingsaufgaben

Hier wird das Rechnen mit n-ten Wurzeln mit Hilfe der Potenzrechnung durchgeführt.

Datei Nr. 12302

Stand 11. März 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der alte Text Potenzrechnen wurde völlig neu geschrieben und zu Trainingsheften in mehrere Teile zerlegt. So findet man auch schneller das, was man sucht.

Ferner können diese Texte auf diese Weise besser in innerschulischen Intranets wie „moodle“ verwendet werden.

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

Inhalt

3. Fall: Der Wurzelexponent ist größer als der Wurzelgrad

a) $\sqrt{2}^5 = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$

Berechnung mit Wurzeln: $\sqrt{2}^5 = \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{=2}\,\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{=2}\,\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (1)

$\sqrt{2^5} = \sqrt{(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)\cdot 2} = 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (2a)

Oder so: $\sqrt{2^5} = \sqrt{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot 2} = 4\sqrt{2}$ (2b)

Berechnung mit Potenzen: $2^{\frac{5}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\cdot\sqrt{2}$ (3)

Hier ist die Potenzmethode sehr günstig. Der Wurzelexponent ergibt den Zähler, der Wurzelgrad den Nenner des gebrochenen Exponenten. **Diesen Bruch zerlegt man in Ganze plus Restbruch**. Dann wird nach der Potenzregel 1b die Potent mit der Summe im Exponenten zerlegt in ein Produkt zweier Potenzen. Das Ergebnis ist dann schnell angeschrieben. Dieses Herausholen der Ganzen aus dem Bruch-Exponenten entspricht genau dem, was man partielles Wurzelziehen nennt und in der Methode (2) blau und rot angedeutet worden ist.

b) $\sqrt[3]{5}^{10} = \sqrt[3]{5^{10}} = 5^{\frac{10}{3}}$

Berechnung mit Wurzeln: $\sqrt[3]{5}^{10} = \sqrt[3]{5}^9\cdot\sqrt[3]{5} = 5^3\cdot\sqrt[3]{5} = 125\cdot\sqrt[3]{5}$ (1)

$\sqrt[3]{5^{10}} = \sqrt[3]{5^9}\cdot\sqrt[3]{5} = 5^3\cdot\sqrt[3]{5} = 125\cdot\sqrt[3]{5}$ (2)

Berechnung mit Potenzen: $5^{\frac{10}{3}} = 5^{3+\frac{1}{3}} = 5^3\cdot 5^{\frac{1}{3}} = 125\cdot\sqrt[3]{5}$ (3)

Die Wurzelrechnungen wurden deutlich abgekürzt und verlangen $\sqrt[3]{5}^9 = \sqrt[3]{5^9} = 5^{\frac{9}{3}} = 5^3$!

c) $\sqrt[5]{4}^3 = \sqrt[5]{4^3} = 4^{\frac{3}{5}}$

ACHTUNG: Hier ist der Wurzelexponent zwar kleiner als der Wurzelgrad.
Aber man sollte erkennen, dass man 4 durch 2^2 ersetzen kann:

$\sqrt[5]{4}^3 = \sqrt[5]{2^2}^3 = \sqrt[5]{2}^6$ bzw. $\sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{\left(2^2\right)^3} = \sqrt[5]{2^6}$ bzw. $4^{\frac{3}{5}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{2\cdot\frac{3}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$

Berechnung mit Wurzeln: $\sqrt[5]{4}^3 = \sqrt[5]{2^2}^3 = \sqrt[5]{2}^6 = \sqrt[5]{2}^5\cdot\sqrt[5]{2} = 2\cdot\sqrt[5]{2}$ (1)

$\sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{\left(2^2\right)^3} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^5\cdot 2} = \sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2} = 2\cdot\sqrt[5]{2}$ (2)

Berechnung mit Potenzen: $4^{\frac{3}{5}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{2\cdot\frac{3}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = 2^{1+\frac{1}{5}} = 2^1\cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2\cdot\sqrt[5]{2}$ (3)

d) $\sqrt[3]{16}^5 = \sqrt[3]{16^5} = 16^{\frac{5}{3}}$

Berechnung mit Wurzeln:

$$\sqrt[3]{16}^5 = \sqrt[3]{16}^3 \cdot \sqrt[3]{16}^2 = 16 \cdot \sqrt[3]{2^4}^2 = 16 \cdot \sqrt[3]{2^8} = 16 \cdot \sqrt[3]{2^6 \cdot 2^2}$$
$$= 16 \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 16 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{4} = 64 \cdot \sqrt[3]{4} \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{16^5} = \sqrt[3]{16^3 \cdot 16^2} = \sqrt[3]{16^3} \cdot \sqrt[3]{16^2} = 16 \cdot \sqrt[3]{\left(2^4\right)^2} = 16 \cdot \sqrt[3]{2^8} =$$
$$= 16 \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 16 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{4} = 64 \cdot \sqrt[3]{4} \qquad (2)$$

Berechnung mit Potenzen:

$$16^{\frac{5}{3}} = \left(2^4\right)^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{20}{3}} = 2^{6+\frac{2}{3}} = 2^6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 64 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 64 \cdot \sqrt[3]{4}$$

Hier ist die Potenzmethode fast unschlagbar. Daher rechne ich die nächsten Beispiele nur noch in der Potenzmethode vor:

e) $\sqrt[3]{9}^2 = 9^{\frac{2}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt[4]{125}^5 = 125^{\frac{5}{4}} = \left(5^3\right)^{\frac{5}{4}} = 5^{\frac{15}{4}} = 5^{4+\frac{3}{4}} = 5^4 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 625 \cdot \sqrt[4]{5^3} = 625 \cdot \sqrt[4]{125}$

g) $\sqrt{32}^3 = (32)^{\frac{3}{2}} = \left(2^5\right)^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{25}{2}} = 2^{12+\frac{1}{2}} = 2^{12} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4095 \cdot \sqrt{2}$

h) $\sqrt[3]{243^2} = 243^{\frac{2}{3}} = \left(3^5\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{10}{3}} = 3^{3+\frac{1}{3}} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 27 \cdot \sqrt[3]{3}$

i) $\sqrt[7]{16}^3 = 16^{\frac{3}{7}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{12}{7}} = 2^{1+\frac{5}{7}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{5}{7}} = 2 \cdot \sqrt[7]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[7]{32}$

j) $\sqrt[5]{64^9} = 64^{\frac{9}{5}} = \left(2^6\right)^{\frac{9}{5}} = 2^{\frac{54}{5}} = 2^{10+\frac{4}{5}} = 2^{10} \cdot 2^{\frac{4}{5}} = 1024 \cdot \sqrt[5]{2^4} = 1024 \cdot \sqrt[5]{16}$

k) $\sqrt[3]{13}^8 = 13^{\frac{8}{3}} = 13^{2+\frac{2}{3}} = 13^2 \cdot 13^{\frac{2}{3}} = 169 \cdot \sqrt[3]{13^2} = 169 \cdot \sqrt[3]{169}$

Trainingsaufgaben 5

Ersetzte den Radikanden durch eine Potenz und berechne dann auf 2 Arten: Wurzeln und Potenzen

a)	$\sqrt[4]{9}$	b)	$\sqrt[4]{121}$	c)	$\sqrt[4]{144}$	d)	$\sqrt[4]{196}$
e)	$\sqrt[6]{27}$	f)	$\sqrt[6]{81}$	g)	$\sqrt[6]{125}$	h)	$\sqrt[6]{100}$

Trainingsaufgaben 6

Schreibe den Aufgabenterm als Potenz ohne Wurzeln und berechne dann das Ergebnis nach der gezeigten Methode.

a)	$\sqrt[5]{3^6}$	b)	$\sqrt[6]{27}^4$	c)	$\sqrt[3]{32}^5$	d)	$\sqrt[4]{8^5}$
e)	$\sqrt[7]{3^5}^3$	f)	$\sqrt{27}^5$	g)	$\sqrt[9]{144}^5$	h)	$\sqrt[13]{16^7}$
i)	$\sqrt{125}^3$	j)	$\sqrt[8]{8}^6$				

und viel später …

Trainingsaufgabe 26

Mache den Nenner rational, falls möglich:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{125}}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{128}}}$ d) $\sqrt[13]{27\sqrt[3]{81}}$

e) $\sqrt[3]{4\sqrt{128}}$ f) $\left(\sqrt{27\sqrt[3]{3}}\right)^{-6}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}$ h) $\dfrac{18}{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{36}}}$

i) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{49\sqrt{7}}}$ j) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{4}}$ k) $\left(\sqrt[5]{\dfrac{1024}{125}}\right)^{3}$ l) $\sqrt[8]{\left(\dfrac{16}{27}\right)^{-3}}$

m) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{81}{125}}\right)^{-2}$ n) $\sqrt[6]{\left(\dfrac{81}{64}\right)^{-2}}$ o) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\right)^{2}$ p) $\sqrt[8]{\left(\dfrac{16}{27}\right)^{-3}}$

q) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt{18}}\right)^{-1}$ r) $\dfrac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt[6]{98}}$ s) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt{24}}\right)^{2}$ (t) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{27}{4}\right)^{2}}$

u) $\left(\sqrt[5]{\dfrac{125}{81}}\right)^{-2}$ v) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt[3]{18}}\right)^{-3}}$ w) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{16}{9}}\right)^{3}$ x) $\left(\sqrt{\left(\dfrac{343}{81}\right)^{-1}}\right)^{-\frac{4}{3}}$

Alle Lösungen auf CD (20 Seiten!)