ALGEBRA
Potenzen

Aufgaben mit Lösungen - Teil 1b

für den Unterricht:

Potenzen mit Summen

Die Aufgaben entstammen vor allem den Texten
12310 Potenzrechnern und
12500 Aufgabensammlung Potenzen und Wurzeln

Datei Nr. 12306

Stand 9. März 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der alte Text Potenzrechnen wurde völlig neu geschrieben und zu Trainingsheften in mehrere Teile zerlegt. So findet man auch schneller das, was man sucht.

Ferner können diese Texte auf diese Weise besser in innerschulischen Intranets wie „moodle" verwendet werden.

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300 Potenzen mit natürlichem Exponenten

12301 Potenzen mit negativen Exponenten

12302 Potenzen mit gebrochenen Exponenten
(Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)

12305 Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht (dieser Text)

12306 Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht

12310 Potenzrechnen (alter Text, alles in einem)

12311 Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)

12321 Lernprogramm
12333 Übung 4

12500 Gruße Aufgabensammlung
12510 Sammlung von Tests
(Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201 Quadratwurzeln
12202 Reelle Zahlen
12203 Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht

12205 Lernblatt: Wurzeln mit Variablen

12210 n-te Wurzeln
12211 Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Inhalt

Grundwissen

Aus den Texten 12102 und 12103

1. Die drei binomischen Formeln:

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beispiele: $(x+3)^2 = x^2 + \boxed{2} \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(3x+5)^2 = (3x)^2 + \boxed{2} \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Beispiele: $(4a-9b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 9b + (9b)^2 = 16a^2 - 72ab + 81b^2$

$(10-8z)^2 = 100 - 160z + 64z^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $(3a+2b)(3a-2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$

$(4x-5)(5+4x) = (4x-5)(4x+5) = (4x)^2 - 5^2 = 16x^2 - 25$

(2) Klammern mit höheren Potenzen:

(1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2n + 3ab^2 + b^3$

Beispiel: $(2x+5)^3 = ?$

$= (2x)^3 + \boxed{3} \cdot (2x)^2 \cdot 5 + \boxed{3} \cdot (2x) \cdot 5^2 + 5^3$

Die Klammern um 2x sind notwendig, damit man nicht nur x potenziert!

Es ist $(2x)^3 = (2x) \cdot (2x) \cdot (2x) = 8x^3$ Und es gilt: $(2x)^2 = 4x^2$.

$(2x+5)^3 = 8x^3 + \boxed{3} \cdot 4x^2 \cdot 5 + \boxed{3} \cdot 2x \cdot 25 + 125 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$.

Weitere Formeln und Beispiele siehe 12105.

Aufgaben zu binomischen Formeln mit Potenzen

Aufgabe 1

Beispiele:

a) $\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2\right)^2+2\cdot a^2\cdot b^2+\left(b^2\right)^2=a^4+2a^2b^2+b^4$

b) $\left(4^{-1}-a^3\right)^2=\left(4^{-1}\right)^2-2\cdot\left(4^{-1}\right)\cdot a^3+\left(a^3\right)^2=4^{-2}-2\cdot 4^{-1}a^3+a^6=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}a^3+a^6$

c) $\left(b^3-2b^2\right)^2$

d) $\left(a^{-2}+a^2\right)^2$

e) $\left(3^{-2}-2^{-1}\right)^2$

f) $(3a+4b)^2$

g) $\left(3a^2+4b\right)^2$

h) $\left(3a^2+4b^2\right)^2$

i) $\left(3a^3-4b^3\right)^2$

j) $\left(a^6-b^5\right)\left(a^6+b^5\right)$

k) $\left(2x^2+3x\right)\left(2x^2-3x\right)$

Aufgabe 2

Beispiele:

a) $\left(a^{-2}+a\right)^2-\left(a^{-2}-a\right)^2=a^{-4}+2a^{-2}\cdot a+a^2-\left[a^{-4}-2a^{-2}\cdot a+a^2\right]$

$=\cancel{a^{-4}}+\underbrace{2a^{-2}\cdot a}_{2a^{-1}}+\cancel{a^2}-\cancel{a^{-4}}+\underbrace{2a^{-2}\cdot a}_{2a^{-1}}-\cancel{a^2}=4a^{-1}=\frac{4}{a}$

b) $\left(a^3-2a^2\right)\left(a^3+2a^2\right)+\left(a^3+2a\right)^2=a^6-4a^2+a^6+\underbrace{2\cdot a^3\cdot 2a}_{=4a^4}+4a^2=2a^6+4a^4$

c) $\left(a^{-4}+b^{-2}\right)^2+\left(a^{-4}-b^{-2}\right)^2$

d) $\left(2^{-3}+3^2\right)^2-\left(2^{-3}-3^2\right)^2$

e) $(x^{-3}-2y^{-6})^2-(x^{-3}+2y^{-6})^2$

f) $\left(x^{-4}+y^4\right)^2-\left(x^{-4}-y^4\right)^2$

g) $\left(a^3+a^{-3}\right)\left(a^3-a^{-3}\right)-\left(a^3-a^{-3}\right)^2$

h) $\dfrac{\left(5u^2+4u\right)^2-\left(4u^2+5u\right)^2}{9u^2}$

Aufgaben zu Brüchen mit Potenzen

Aufgabe 3

Beispiel: $$\frac{x-x^2}{x^3}+\frac{2x^3-1}{2x^4}-\frac{1+4x}{x^2}=\frac{\left(x-x^2\right)\boxed{\cdot 2x}}{x^3\boxed{\cdot 2x}}+\frac{2x^3-1}{2x^4}-\frac{\left(1+4x\right)\boxed{\cdot 2x^2}}{x^2\boxed{\cdot 2x^2}}=$$

$$=\frac{2x^2-2x^3+2x^3-1-2x^2-8x^3}{2x^4}=\frac{-1-8x^3}{2x^4}$$

a) $\dfrac{1-x^2}{x^{n+1}}-\dfrac{x^{n+1}-2}{2x^{2n}}+\dfrac{4-2x^{-2}}{4x^{n-1}}$

b) $\dfrac{8x^6}{2x^n}-\dfrac{3x^4}{x^{n-2}}-\dfrac{x^8\cdot x^{1-n}}{x^{3-2n}}$

c) $\dfrac{8x^6}{2x^n}-\dfrac{3x^4}{x^{n-2}}-\dfrac{x^8\cdot x^{1+n}}{x^{3+2n}}$

d) $\dfrac{2x^{-2}-1}{2x^{n-1}}-\dfrac{1{,}5x^2+3}{3x^{n+1}}+\dfrac{2x^{n+1}-1}{2x^{2n}}$

Aufgabe 4

Beispiel: $$\frac{\left(x^2-4\right)^2}{\left(x-2\right)^2}-\frac{\left(x^2-4\right)^2}{\left(x+2\right)^2}=\frac{\left[\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\right]^2}{\left(x-2\right)^2}-\frac{\left[\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\right]^2}{\left(x+2\right)^2}$$

$$\frac{\cancel{\left(x^2-2\right)^2}\left(x^2+2\right)^2}{\cancel{\left(x-2\right)^2}}-\frac{\left(x^2-2\right)^2\cancel{\left(x^2+2\right)^2}}{\cancel{\left(x+2\right)^2}}=x^3+4x^2+4-\left[x^4-4x+4\right]=8x^2$$

a) $\dfrac{(25-a^2)^3}{(a+5)^3}$

b) $\dfrac{a^{k+2}-4a^k}{a^k+2a^{k-1}}$

c) $\dfrac{3}{a^2}-\dfrac{2a+1}{a^3-4a}-\dfrac{a+1}{a^3+2a^2}$

d) $\dfrac{5}{a^2}-\dfrac{4a+2}{a^3-9a}-\dfrac{a-15}{a^3-3a^2}$

e) $\dfrac{2a+1}{a^2b+ab^2}+\dfrac{2a-1}{a^2b-ab^2}-\dfrac{4a\cdot b^{-1}}{a^2-b^2}$

f) $\dfrac{\left(x^{-3}-x^3\right)^2-\left(x^{-6}-x^6\right)}{x^3+1}$