

Demo für
www.mathe-cd.de

Geradengleichungen und lineare Funktionen

Geraden zeichnen
Geradengleichungen aufstellen
Schnittpunkte berechnen
Lotgeraden

Neue kompakte Fassung zum Wiederholen und Lernen.

Ein Lese- und Übungsheft

Datei Nr. 20010

Stand 1. Juli 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Nun habe ich zu diesem Thema zum 3. Mal einen Text geschrieben. Weil immer mehr Schulen die Mathematik-CD einsetzen, habe ich meine Darstellungsmethode geändert.

Dieser text ist nun ein großes Lesebuch ohne viel Theorie, die ich ans Ende verbannt habe.

Ohne große Einleitungen und Hinführungen werden die zu übenden Fragestellungen sofort an Musteraufgaben oder Beispielen geübt. Im Vordergrund steht also die Sicherung der im Unterricht gelernten Fakten und Methoden durch viele Beispiele und Übungen. Dennoch wurden einige Beispiele sehr ausführlich erklärt, damit das Verständnis der Methoden gefördert wird.

Drei für das Verständnis wichtige BEWEISE stehen am Ende des Textes:

$y = mx + n$ stellt eine Gerade dar.

Mit $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ erhält man die Steigung einer Geraden, die zu einer gegebenen Geraden senkrecht ist.

Herleitung der Punkt-Steigungsform.

Anwendungsaufgaben zu linearen Funktionen findet man im Heft 20012.

Dieser Text ist aus dem Text 12170 entstanden, den ich für die Klassen 7 bis 9 geschrieben habe. Er ist in weiten Teilen identisch. Da es nämlich ganz unterschiedlich ist, wie ausführlich die Lehrer diesen Stoff in der Sekundarstufe 1 (Mittelstufe) behandeln, überlasse ich es dem Leser, das wegzulassen, was er nicht braucht.

Die Lösungen aller Aufgaben findet man im Folgetext 20011.

Friedrich Buckel - Juni 2010

Inhalt

§ 1	Lineare Funktionen –Gleichungen mit 2 Unbekannten	5
1.1	Eine Gleichung mit <u>einer</u> Unbekannten	5
1.2	Eine Gleichung mit <u>zwei</u> Unbekannten hat eine unendliche Lösungsmenge	5
1.3	Lineare Funktionen	9
§ 2	Drei Grundaufgaben für Geraden	12
§ 3	Ursprungsgeraden	16
	Proportionalitäten	17
§ 4	Steigung und y-Achsenabschnitt	19
4.1	Das Absolutglied „n“ der Geradengleichung	19
4.2	Die Steigungszahl m in einer Geradengleichung	21
4.3	Zeichnen einer Geraden – 11 Beispiele	23
4.4	Besondere Geradengleichungen	30
4.5	Anmerkungen zum Schluss	31
	Parallele Geraden	31
4.6	Trainingsaufgaben zum Zeichnen	32
§ 5	Die Gleichung einer Geraden ermitteln	39
5.1	Berechnung von Streckenlängen aus zwei Punkten	39
5.2	Rechenübung: Berechnung der Steigung aus 2 Punkten	40
5.3	Na endlich: Eine Geradengleichung aus einer Zeichnung „ablesen“	41
5.4	Eine Geradengleichung aufstellen, wenn n nicht bekannt ist	43
5.5	Eine Geradengleichung aufstellen, wenn 2 Punkte gegeben sind.	45
	Vier Methoden mit je vier Beispielaufgaben	
	Sehr viele Aufgaben	ab 50
5.6	Die Gleichung einer Parallelen aufstellen	55
5.7	Orthogonale Geraden	57
§ 6	Den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen	59
6.1	Das Gleichsetzungsverfahren	59
6.2	Das Subtraktionsverfahren	61
6.3	Spezialfälle	62
6.4	Das Einsetzungsverfahren	64
6.5	Den Schnittpunkt zweier geraden aus der Gleichung $ax + by = c$ berechnen	65
	Beispiele zum Additionsverfahren	65
6.6	Schnittpunkt mit der x-Achse	70
6.7	Großes Beispiel	71

§ 7	Etwas Theorie	72
7.1	Warum stellt $y = mx + n$ eine Gerade dar?	72
7.2	Herleitung der Punkt-Steigungsform (2 Arten)	74
7.3	Warum gilt für orthogonale Geraden die Beziehung $m_h = -\frac{1}{m_g}$?	75
LERNBLATT: Geradengleichungen		76

§ 1 Lineare Funktionen - Gleichungen mit 2 Unbekannten (Ganz wenig Theorie zu Gleichungen, Funktionen, Schaubildern)

1.1 Eine Gleichung mit einer Unbekannten wie beispielsweise $2x - 3 = 9$

Eine wichtige Vorübung: WISSEN: So löst man diese Gleichung

Setzt man eine Zahl der Grundmenge G (das sind je nach Klassenstufe die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} oder die reellen Zahlen \mathbb{R}) in die Gleichung ein (man sagt „die **Probe machen**“, dann entsteht eine **Aussage**. Diese kann wahr oder falsch sein. Die Zahlen, die zu einer wahren Aussage führen, bilden die **Lösungsmenge der Gleichung**.

Beispiel: $x = 1$ einsetzen: $2 \cdot 1 - 3 = 9$, d.h. $-1 = 9$: Falsche Aussage.
 $x = 6$ einsetzen: $2 \cdot 6 - 3 = 9$, d.h. $9 = 9$: Wahre Aussage.

Um zu zeigen, dass 6 die einzige Zahl ist, welche zu einer wahren Lösung führt, stellt man die Gleichung um. Es gibt eine Reihe von Umformungen, die zu einer neuen Gleichung führen, die aber dieselbe Lösungsmenge. Man nennt sie **Äquivalenzumformungen**.

Gegebene Gleichung:	$2x - 3 = 9$	+3
Addition der Zahl 3:	$2x - 3 + 3 = 9 + 3$	auf beiden Seiten!
Zusammenfassen:	$2x = 12$:2
Division durch 2:	$x = 6$	

Jetzt steht eine so einfache Gleichung da, dass man ihr ansieht, welche Zahl zu einer wahren Aussage führt: Es ist NUR die Zahl 6.

Dann schreibt man die Lösungsmenge auf: $L = \{6\}$.

1.2 Eine Gleichung mit zwei Unbekannten hat eine unendliche Lösungsmenge

$$(a) \quad 2x - y - 3 = 0 \quad (b) \quad 2x - y = 3 \quad (c) \quad y = 2x - 3$$

Diese drei Gleichungen sind gleichwertig (äquivalent), denn man kann jede von ihnen in die andere umstellen. (Versuche es!).

Woraus besteht die Lösungsmenge einer Gleichung, wenn 2 Variable vorhanden sind?

Jede Lösung muss aus 2 Zahlen bestehen, denn man muss ja eine für x und (eventuell) eine andere für y einsetzen. Die Mathematiker haben sich darauf geeinigt, dass man diese beiden Zahlen als ein Zahlenpaar aufschreibt. Damit es nicht zu Missverständnissen kommt, hält man sich an die alphabetische Reihenfolge.

Aus $x = 5$ und $y = 7$ bildet man das Zahlenpaar $(5 | 7)$.

Aus $x = 2$ und $y = 4$ bildet man das Zahlenpaar $(2 | 4)$.

Jedes Zahlenpaar kann man in eine der drei Gleichungen einsetzen und so überprüfen, ob eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht. Versuche selbst „die Probe zu machen“.

Probe für (5 | 7):

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & 2x - y - 3 = 0 & \text{(b)} \quad 2x - y = 3 & \text{(c)} \quad y = 2x - 3 \\
 & 2 \cdot \boxed{5} - \boxed{7} - 3 = 0 & 2 \cdot \boxed{5} - \boxed{7} = 3 & \boxed{7} = 2 \cdot \boxed{5} - 3 \\
 \text{d. h.} & 0 = 0 & 3 = 3 & 7 = 7.
 \end{array}$$

In jedem Fall entsteht eine wahre Aussage. Das Paar (5 | 7) gehört also zur Lösungsmenge dieser Gleichungen, was man so schreibt: $(5 | 7) \in L$.

Probe für (2 | 4): $\boxed{4} = 2 \cdot \boxed{2} - 3$ d. h. $4 = 1$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & 2x - y - 3 = 0 & \text{(b)} \quad 2x - y = 3 & \text{(c)} \quad y = 2x - 3 \\
 & 2 \cdot \boxed{2} - \boxed{4} - 3 = 0 & 2 \cdot \boxed{2} - \boxed{4} = 3 & \boxed{4} = 2 \cdot \boxed{2} - 3 \\
 \text{d. h.} & -3 = 0 & 0 = 3 & 4 = 1.
 \end{array}$$

In jedem Fall entsteht eine falsche Aussage

Das Paar (2 | 4) gehört nicht zur Lösungsmenge: $(2 | 4) \notin L$.

Es sei verraten, dass es hier unendlich viele Paare gibt, welche die Gleichungen lösen.

Etwa: $(0 | -3)$, $(-1 | -5)$, $(\frac{7}{2} | 4)$, $(-\frac{5}{3} | -\frac{19}{3})$ usw.

Wer will, kann wie soeben in einer der drei Gleichungen die Probe machen um zu erkennen, dass wirklich ein Lösungspaar vorliegt. Es gibt eine einfache Methode zur Berechnung von Lösungspaaren.

Methode zur Berechnung von Lösungspaaren

1. Schritt: Man stellt die Gleichung so um, dass links y alleine steht.

Aus $2x - y - 3 = 0$ oder aus $2x - y = 3$ kommt man dann auf $y = 2x - 3$.

(In seltenen Fällen stellt man nach x um, wenn dies günstiger ist.)

2. Schritt: Man wählt irgendeine Zahl für x, setzt diese ein und berechnet dann den zugehörigen y-Wert.

Zu $x = 1$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{1} - 3 = -1$.

Zu $x = 5$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{5} - 3 = 7$

Zu $x = 0$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{0} - 3 = -3$

Zu $x = -1$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{-1} - 3 = -5$ usw.

Jetzt sind diese Zahlenpaare entstanden: $(1 | -1)$, $(5 | 7)$, $(0 | -3)$, $(-1 | -5)$ usw.

Sie alle sind Lösungspaare (kurz Lösungen) der Gleichung $y = 2x - 3$.

Jetzt erkennt man auch, dass es unendlich viele Möglichkeiten gib, für x eine Zahl zu wählen und dazu den passenden y-Wert zu berechnen.

Die Gleichung $y = 2x - 3$ besitzt somit unendlich viele Lösungspaare.

Geometrische (graphische) Darstellung der Lösungsmenge:

Zahlenpaare kann man in ein Koordinatensystem als Punkte eintragen.

Führt man dies mit den Lösungspaaren

$$(5|7), (1|-1), (0|-3), (-1|-5)$$

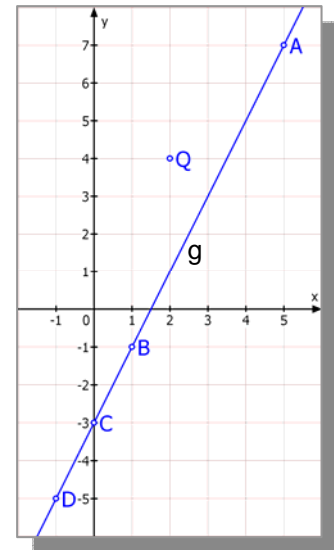
durch, erkennt man, dass sie alle auf einer Geraden liegen.

MERKE: Lösungsmenge einer linearen Gleichung auf einer Geraden

Rechts wurden diese vier Paare als Punkte A, B, C und D eingetragen.

Das Paar $(2|4)$ stellt keine Lösung der Gleichung dar. Der zugehörige Punkt Q liegt nicht auf der Geraden.

Man nennt $y = 2x - 3$ die Gleichung der Geraden.



Hinweise:

Wenn man Lösungen der Gleichung $y = 2x - 3$ berechnet, sagt man daher auch, dass man Punkte der Geraden g mit $y = 2x - 3$ berechnet. Dann gibt man den Punkten Namen und schreibt dies so auf: $A(5|7)$. Man sagt dann: A hat die **Koordinaten** $x = 5$ und $y = 7$.

Eine Gerade betrachtet man als **Punktmenge**. Mit den Symbolen der Mengenlehre kann man die Aussage „A liegt auf g “ dann auch so darstellen: $A \in g$, was nichts anderes heißt als „**A ist Element der Menge g** “, man sagt aber immer dazu: „**A liegt auf g** “.

Man nennt die Gleichung $y = 2x - 3$ eine **lineare Gleichung**, weil alle Variablen die Exponenten 1 haben. Denkt man an das Wort *lineal*, dann wird auch klar, warum man das Wort „linear“ gewählt hat: Die Lösungsmenge dieser linearen Gleichung kann man als Gerade in einem Koordinatensystem darstellen, wozu man ein Lineal benötigt.

Aufgabe 1

Berechne Lösungspaare zu den Gleichungen

a) $y = x - 1$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

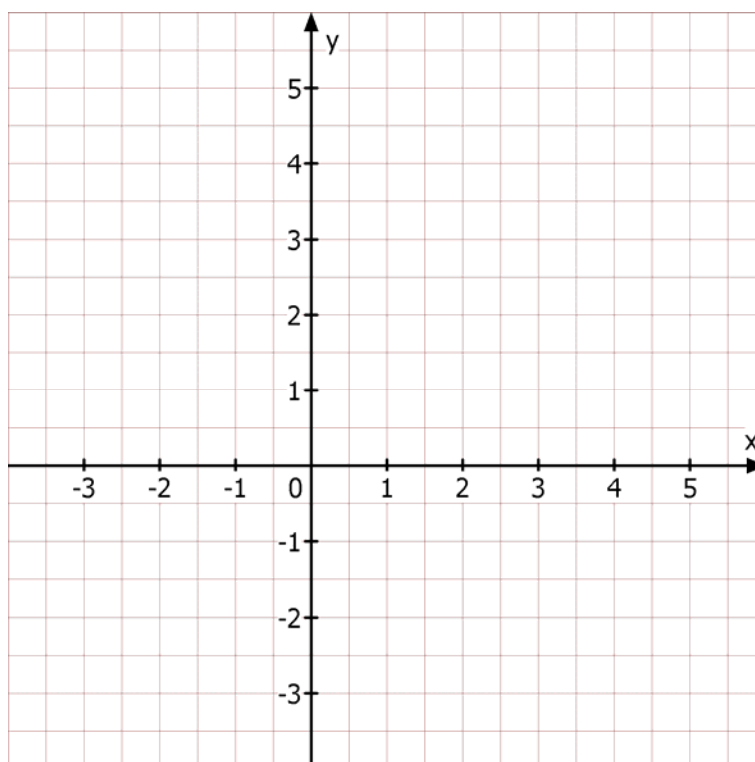
Verwende für x dazu die Zahlen aus dieser Menge: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Stelle dann die Lösungspaare als Punkte in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar

Und zeichne die zugehörigen Geraden ein.

Lösung:

	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$y = x - 1$								
$y = -2x + 4$								
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$								



1.3 Lineare Funktionen

Die oben gezeigte Berechnungsmethode, dass man zu einer Zahl x eine andere Zahl y berechnet, nennt man auch eine **Funktion, genauer eine lineare** Funktion, weil eben nur die Exponenten 1 vorkommen.

An diesen hochmathematischen Begriff muss man sich gewöhnen. Hier eine mögliche Erklärung:

Eine Funktion ist eine **eindeutige** Zuordnungs- oder Berechnungsvorschrift, die einer Zahl des **Definitionsbereichs** eine neue Zahl zuordnet, die man den **Funktionswert** nennt.

Kann man diese Zuordnungsvorschrift in eine Gleichung der Form $x \rightarrow f(x) = ax + b$ bringen, nennt man sie eine **lineare Funktion**.

Den Funktionswert $f(x)$ bezeichnet man oft y , dann heißt die Berechnungsvorschrift $y = ax + b$. Sehr oft schreibt man auch $y = mx + n$.

Die grafische Darstellung der Lösungsmenge im Koordinatensystem nennt man das Schaubild der Funktion. Lineare Funktionen haben als Schaubild eine Gerade.

Unsere Geradengleichung kann man also auch als lineare Funktion betrachten: $f(x) = 2x - 3$

Ich wiederhole jetzt die Berechnung von Lösungspaaren, verwende aber die Funktionsschreibweise:

Paarberechnung		Funktionswertberechnung
Zu $x = 1$ erhält man	$y = 2 \cdot \boxed{1} - 3 = -1$	$f(1) = 2 \cdot \boxed{1} - 3 = -1$
Zu $x = 5$ erhält man	$y = 2 \cdot \boxed{5} - 3 = 7$	$f(5) = 2 \cdot \boxed{5} - 3 = 7$
Zu $x = 0$ erhält man	$y = 2 \cdot \boxed{0} - 3 = -3$	$f(0) = 2 \cdot \boxed{0} - 3 = -3$
Zu $x = -1$ erhält man	$y = 2 \cdot \boxed{-1} - 3 = -5$	$f(-1) = 2 \cdot \boxed{-1} - 3 = -5$

Man erkennt sofort, dass die rechte Schreibweise viel kürzer ist.

Links musste man zuerst aufschreiben, welches x man einsetzt, und dann erst folgte die Berechnung des y -Werts (bzw. der y -Koordinate des Punktes).

Rechts (in der Funktionsschreibweise) schreibt man den x -Wert in die Klammer hinter f und schon kann man den Funktionswert berechnen, der nichts anderes ist, als der zugeordnete y -Wert.

x und y zusammen bilden dann das Lösungspaar bzw. die Koordinaten des Punktes im Koordinatensystem.

1.4 Zwei weitere Beispiele

(1) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ bzw. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Berechnung einiger Punkte für das Schaubild (für die Gerade).

1. Methode:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = -2 + 2 = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

2. Methode:

$$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = -2 + 2 = 0$$

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

Lösungspunkt

$$A(0|2)$$

$$B(1|\frac{3}{2})$$

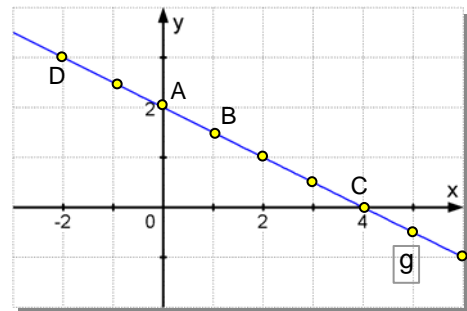
$$C(4|0)$$

$$D(-2|3)$$

Man kann beliebig lange weiter machen.

Für das Schaubild (die Gerade) braucht man in der Regel nur 2 Punkte, die möglichst weit auseinander liegen sollen, damit das Schaubild genauer wird.

Rechts wurden die vier „Lösungspunkte“, man sagt besser „Geradenpunkte“ eingetragen worden.



(2) $y = 3x - 3$ oder so: $f(x) = 3x - 3$

Berechnung zweier Punkte zum Zeichnen der Geraden:

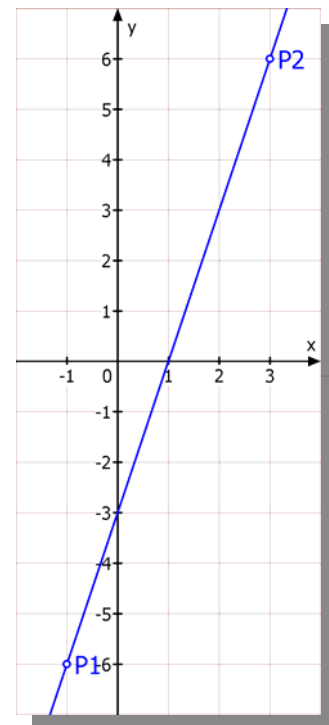
Ich wähle z. B. $x = -1 \Rightarrow y = 3 \cdot (-1) - 3 = -6$,
d. h. $P_1(-3|-6) \in g$

Und dann: $x = 3 \Rightarrow y = 3 \cdot 3 - 3 = 6$
d. h. $P_2(3|6) \in g$

In der Funktionsschreibweise sieht das so aus:

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 3 = -6 \quad \text{also } P_1(-3|-6) \in g$$

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \quad \text{also } P_2(3|6) \in g$$



Hinweis:

So wie das Beispiel (2) dargestellt worden ist, kommt man am schnellsten zum Ziel.

Zum Zeichnen der Lösungsmenge, also der Geraden benötigt man ja nur 2 Punkte, also reicht es, zwei Paare auf diese Weise zu berechnen.

Zusammenfassung

Jede Gleichung der Form $y = mx + n$ stellt eine Gerade im Koordinatensystem dar.

Zahlenpaare, welche durch Einsetzen in die Gleichung zu einer wahren Aussage führen, gehören zur Lösungsmenge der Gleichung.

Geometrisch gedeutet sind Zahlenpaare Punkte der Geraden, und die Gerade ist die geometrische Darstellung der Lösungsmenge.

Die Berechnung von Punkten der Geraden geschieht, indem man für x eine Zahl auswählt, diese einsetzt und dazu y berechnet.

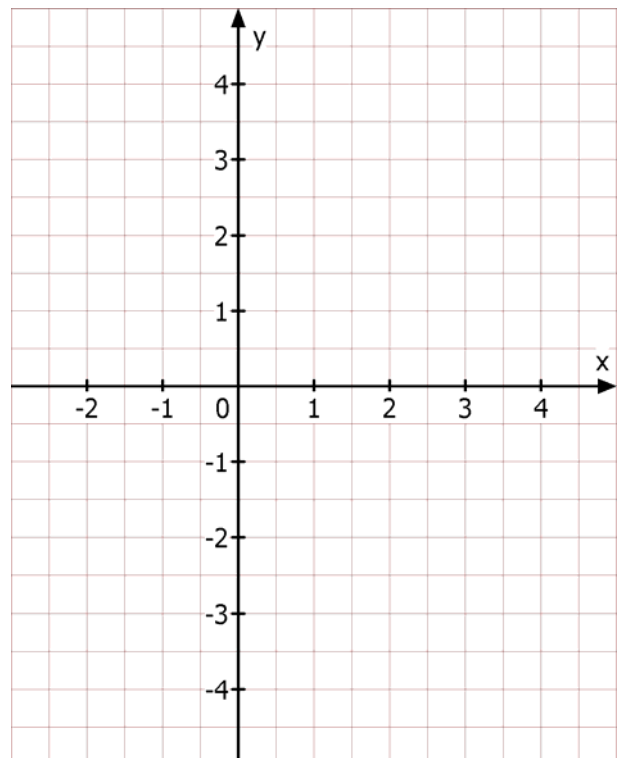
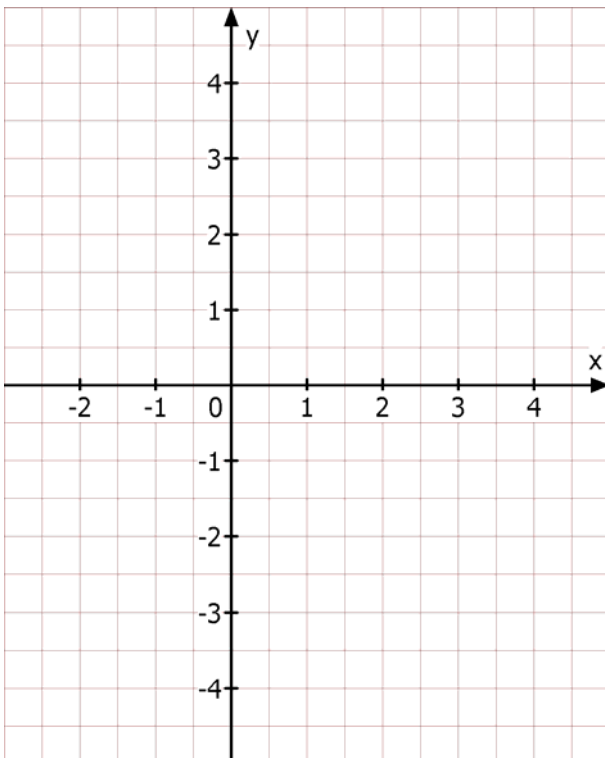
Die Funktionsschreibweise $f(x) = mx + n$ eignet sich dazu sehr gut

Aufgabe 2

Zeichne die folgenden Geraden in die Achsenkreuze.

Berechne zu jeder Geraden zwei Punkte, mit deren Hilfe die Geraden gezeichnet werden.

- | | |
|--|---|
| a) g: $y = -2x + 4$ und
k: $y = x - 3$ und | h: $y = \frac{1}{2}x + 1$ sowie
l: $y = -3x + 2$ |
| n) g: $y = \frac{3}{4}x - 2$ und
k: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ und | h: $y = -\frac{4}{3}x$ sowie
l: $y = \frac{5}{2}x$ |



§ 2 Drei Grundaufgaben für Geraden

Grundaufgabe 1: Die Punktprobe machen

Überprüfe, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt, deren Gleichung gegeben ist.

Beispiel 1

Gegeben sind $A(3|6)$, $B(-1|2)$ und $g: y = 3x - 3$.

Punktprobe mit A: Einsetzen der Koordinaten des Punktes $A(3|6)$:

Für y wird 6 und für x wird 3 eingesetzt:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{6} \quad \boxed{3} \\
 \uparrow \quad \uparrow \\
 y = 3x - 3
 \end{array}
 \longrightarrow
 \boxed{6 = 3 \cdot 3 - 3}$$

Weil die rechte Seite auch 6 ergibt, ist eine wahre Aussage entstanden.

Also gehört das Paar $(3|6)$ zur Lösungsmenge der Gleichung, oder was dasselbe ist:

Der Punkt $A(3|6)$ liegt auf g , was man so schreiben kann: $A \in g$.

Punktprobe mit $B(-1|2)$:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{2} \quad \boxed{-1} \\
 \uparrow \quad \uparrow \\
 y = 3x - 3
 \end{array}
 \longrightarrow
 \boxed{2 = 3 \cdot (-1) - 3}$$

Die durch Einsetzen entstandene Aussage lautet ausführlich $2 = -6$.

Weil sie eine falsche Aussage ist, liegt $B(-1|2)$ nicht auf g . Man schreibt auch $B \notin g$.

Beispiel 2

Gegeben ist die Gerade g durch $y = -\frac{1}{2}x + 3$ und zwei Punkte $P_1(4|1)$ und $P_2(-2|5)$.

Kurzlösung:

$(4|1)$ einsetzen: $\boxed{1} = -\frac{1}{2} \cdot \boxed{4} + 3$

Zusammenfassen: $1 = -2 + 3$

Dies ist eine wahre Aussage, also liegt P_1 auf g : $P_1 \in g$.

$(-2|5)$ einsetzen: $\boxed{5} = -\frac{1}{2} \cdot \boxed{-2} + 3$

Zusammenfassen: $5 = 1 + 3$

Dies ist eine falsche Aussage, also liegt P_2 nicht auf g : $P_2 \notin g$

Grundaufgabe 2:

Welche y-Koordinate muss A haben, damit A auf der Geraden g liegt?

Beispiel: Gegeben ist g: $y = 5x - 7$ und $A(2 | ?)$

Man setzt $x = 2$ in die Geradengleichung ein.

The diagram shows the equation $y = 5x - 7$ in a yellow box. A blue arrow points from the question mark in $A(2 | ?)$ to the y in the equation. Another blue arrow points from the 2 in $A(2 | ?)$ to the x in the equation. An orange arrow points to the right, where the calculation is shown in a yellow box with a red border: $y = 5 \cdot 2 - 7$ and $y_A = 10 - 7 = 3$.

Dies ist die y-Koordinate von A.

Ergebnis: $A(2 | 3)$

Grundaufgabe 3:

Welche x-Koordinate muss B haben, damit B auf der Geraden g liegt?

Beispiel: Gegeben ist g: $y = 5x - 7$ und $B(? | 3)$

Man setzt die gegebene y-Koordinate von B in die Geradengleichung ein und berechnet daraus x:

The diagram shows the equation $y = 5x - 7$ in a yellow box. A blue arrow points from the 3 in $B(? | 3)$ to the y in the equation. Another blue arrow points from the question mark in $B(? | 3)$ to the x in the equation. An orange arrow points to the right, where the calculation is shown in a yellow box with a red border: $3 = 5 \cdot x - 7$ with $| +7$ on the right, $10 = 5x$ with $| :5$ on the right, and $2 = x_B$ in blue.

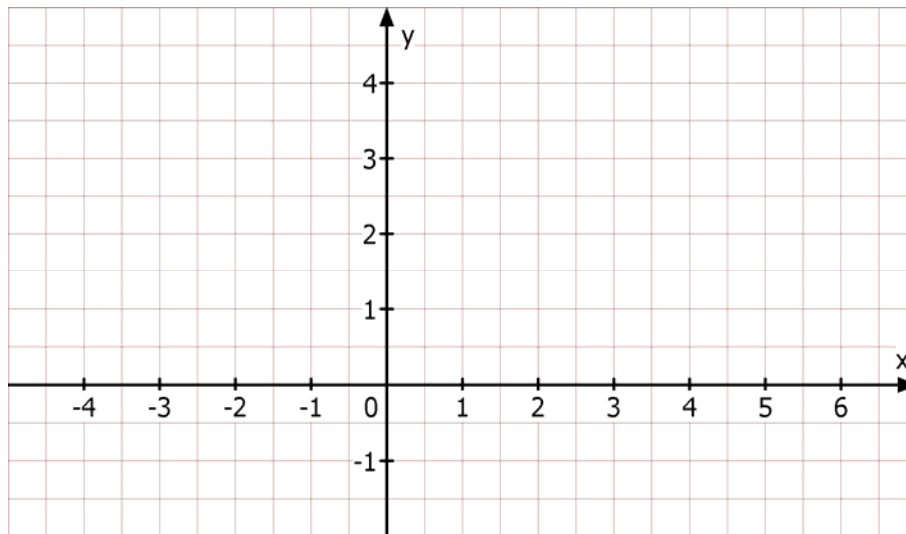
Das ist die gesuchte x-Koordinate von B.

Ergebnis: $B(2 | 3)$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gerade g durch die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

- Prüfe nach, welche der Punkte auf g liegen: $A(3 | \frac{1}{2})$, $B(6 | 5)$ und $C(-4 | 4)$.
- Berechne die fehlenden y -Koordinaten von $D(6 | ?)$, $E(0 | ?)$ und $F(\frac{3}{4} | ?)$, wenn sie auf g liegen.
- Berechne die fehlenden x -Koordinaten von $G(? | 8)$, $H(? | \frac{3}{2})$ und $I(? | 2)$, wenn sie auf g liegen.
- Trage 5 Punkte von g in ein geeignetes Koordinatensystem ein und zeichne g . (x -Achse von -4 bis 6)



Aufgabe 4

Gegeben ist die Gerade g durch $y = 4x - 5$.

- Prüfe nach, welche der Punkte auf g liegen: $A(-1 | 1)$, $B(-2 | -13)$ und $C(\frac{3}{2} | 1)$.
- Berechne die fehlenden y -Koordinaten von $D(2 | ?)$, $E(0 | ?)$ und $F(\frac{3}{4} | ?)$, wenn sie auf g liegen.
- Berechne die fehlenden x -Koordinaten von $G(? | 7)$, $H(? | -\frac{1}{2})$ und $I(? | -9)$, wenn sie auf g liegen.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gerade g durch $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

- Prüfe nach, welche der Punkte auf g liegen: $A(1 | 2)$, $B(-2 | \frac{1}{3})$ und $C(\frac{1}{2} | 2)$, wenn sie auf g liegen.
- Berechne die fehlenden y -Koordinaten von $D(-2 | ?)$, $E(0 | ?)$ und $F(9 | ?)$, wenn sie auf g liegen.
- Berechne die fehlenden x -Koordinaten von $G(? | -\frac{1}{3})$, $H(? | -\frac{1}{2})$ und $I(? | \frac{19}{6})$.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ und h durch $y = 2x + 1$.

- Auf g liegen die Punkte $A(3 | y)$ und $B(x | 4)$. Berechne x und y.
- Liegen $C(2 | 3)$ oder $D(-\frac{3}{2} | -\frac{5}{2})$ auf h?
- Zeige, dass der Schnittpunkt von g und h die x-Koordinate 1 hat. Berechne S.

Die Lösungen aller Aufgaben stehen im Text 20011.

§ 3 Ursprungsgeraden

Wir betrachten jetzt Gleichungen der Form

$$y = mx \text{ bzw. } f(x) = mx$$

Beispiel 1

$$y = 2x$$

Berechnung von drei Lösungspaaren:

$$x = -2 \Rightarrow y = 2 \cdot (-2) = -4 \quad \text{d.h. } A(-2|-4) \in g$$

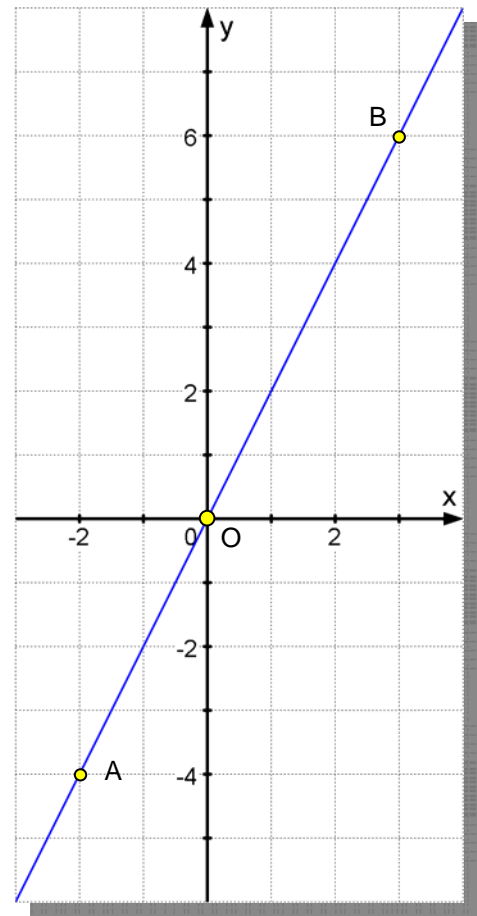
$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{d.h. } O(0|0) \in g$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{d.h. } B(3|6) \in g$$

Wichtige Beobachtung bei dieser Rechnung und dem Schaubild rechts:

Weil hinter $y = 2x$ kein Summand mehr steht, gibt es zu $x = 0$ auch „nur“ $y = 0$. Daher ist das Paar $(0|0)$ eine Lösung. Also geht die Gerade durch den Punkt $O(0|0)$, den man auch den Ursprung des Koordinatensystems nennt.

Eine Gerade durch den Ursprung nennt man eine Ursprungsgerade.



Beispiel 2

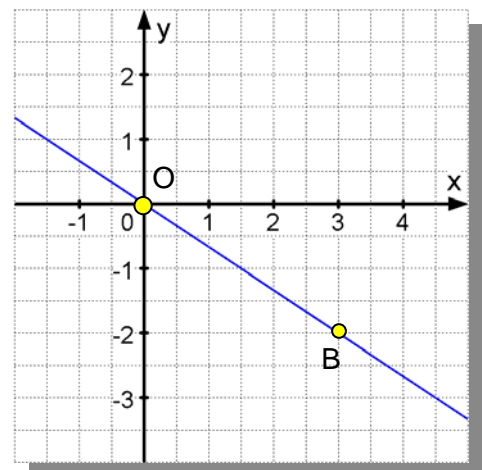
$$y = -\frac{2}{3}x$$

Die zugehörige Gerade ist eine Ursprungsgerade, denn es gilt:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot 0 = 0 \quad \text{d.h. } O(0|0) \in g$$

Zur Zeichnung reicht ein weiterer Punkt, etwa B;

$$x = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2 \quad \text{d.h. } B(3|-2) \in g$$



MERKE:

Jeder Gleichung der Form $y = m \cdot x$ hat als Schaubild eine Ursprungsgerade, denn für $x = 0$ erhält man stets $y = 0$.

Einschub – für die Interessierten:

Eine Anwendung davon sind Proportionalitäten

Es gibt einen eigenen Text für Proportionalitäten (10511), in dem man viele weitere Beispiele findet. Dort erfährt man auch, wie man geschickt Werte zu proportionalen Größen berechnen kann.

Zwei Größen x und y , zwischen denen eine Beziehung besteht, welche die Form $y = m \cdot x$ haben, nennt man zueinander proportional.

Beispiel 3

In Florenz kostet eine Kugel Eis 1,50 €.

2 Kugeln Eis kosten dann $1,50 \text{ €} \cdot 2 = 3,00 \text{ €}$

3 Kugeln Eis kosten dann $1,50 \text{ €} \cdot 3 = 4,50 \text{ €}$

4 Kugeln Eis kosten dann $1,50 \text{ €} \cdot 4 = 6,00 \text{ €}$

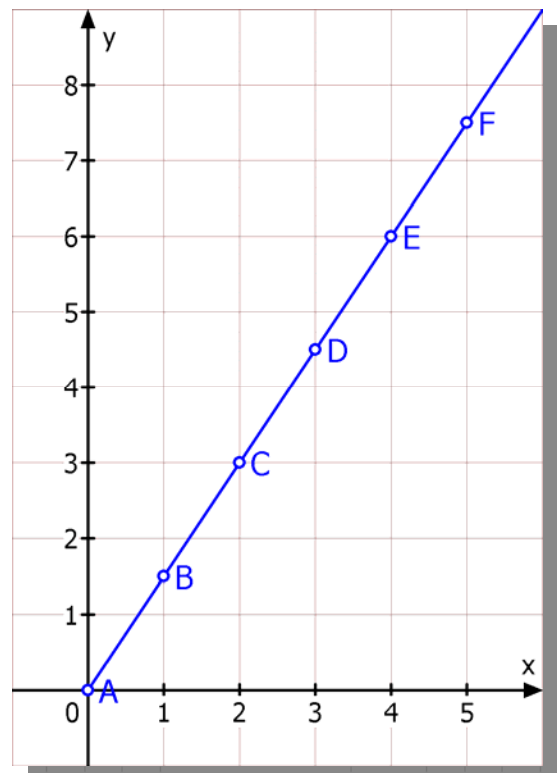
Die Formel dafür lautet erkennbar: $y = 1,50 \cdot x$

Hier ist immer der Preis y das 1,5-fache der Anzahl x der Kugeln.

Die Bruchform $\frac{y}{x} = 1,5$ ist sehr gut dafür geeignet, diese Beziehung zu überprüfen.

Marco hat hinter dem Dom für seine Familie eine Großportion von 13 Kugeln gekauft und dafür 19,50 € bezahlt. Seine Freundin Sara überlegt, ob es eventuell Mengenrabatt bekommen hat und gibt daher

in ihren Taschenrechner ein: $\frac{19,50}{13} = 1,50$. Das Ergebnis zeigt ihr, dass kein Preisnachlass gewährt worden ist. Ja, in Florenz ist das Eis offenbar etwas teurer als anderswo ...



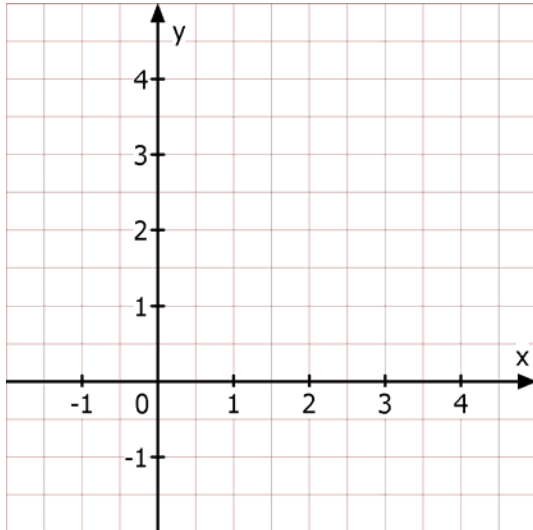
Weil der Quotient aus Preis und Anzahl konstant ist, nennt man die Beziehung Preis – Anzahl eine Proportionalität.

Ihre Gleichung ist $y = 1,50 \cdot x$ und ihr Schaubild eine Ursprungsgerade.

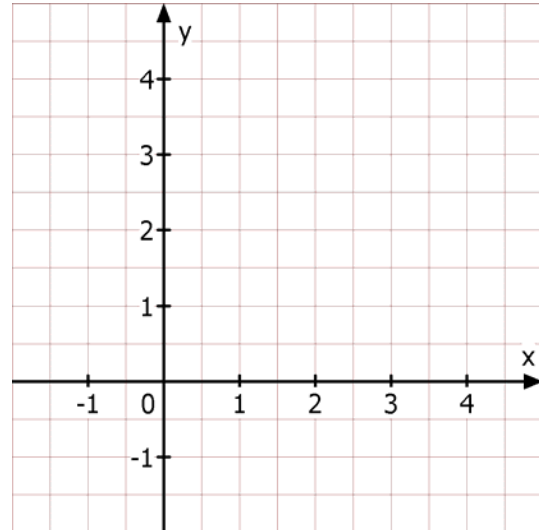
Aufgabe 7

Erstelle eine Wertetafel und zeichne die folgenden Geraden

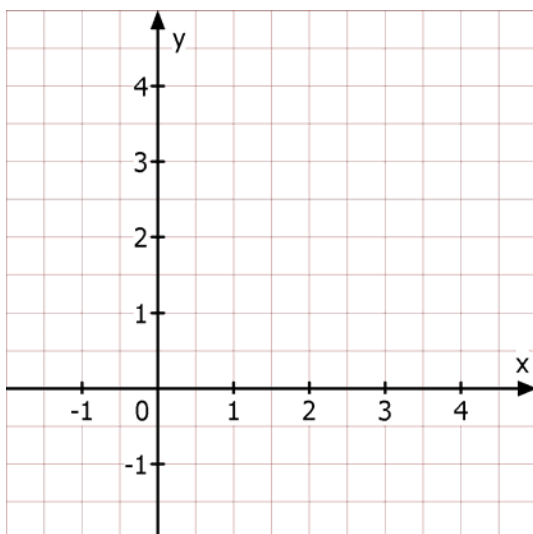
a) $y = -x$



b) $y = \frac{3}{2}x$



c) $y = -\frac{2}{3}x$



d) $y = 3x$

