Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hypergeometrische Verteilung

Themenheft und Trainingsheft

Datei Nr. 34211

Stand 17. April 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo für www.mathe-cd.de

Inhalt

Demo für www.mathe-cd.de

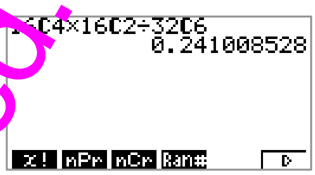
2.3 Einige Beispiele - Weitere Aufgabe findet man in § 4

Wie man mit den verschiedenen Rechnern die Ergebnisse ermittelt wird ausführlich noch in den Abschnitten 2.7 bis 2.9 beschrieben. Hier geht es im Wesentlichen um das Aufstellen der Berechnungsformeln.

a) In einem **Skatspiel** gibt es 16 rote Karten und 16 schwarze Karten.
Man entnimmt ohne Zurücklegen 6 Karten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei 4 rote und 2 schwarze Karten?

Lösung:

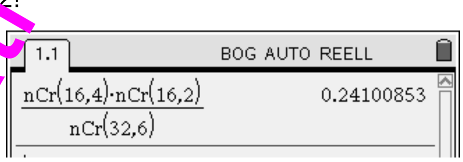
$$\boxed{P = \frac{\binom{16}{4}\cdot\binom{16}{2}}{\binom{32}{6}} = 0{,}241}$$



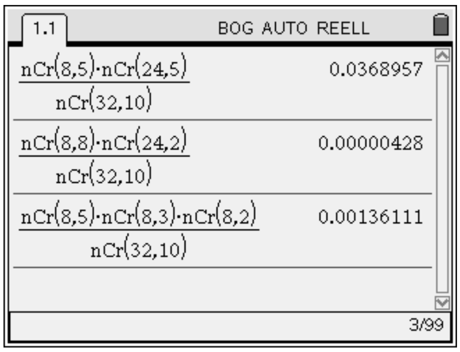
Berechnung mit einem besseren Taschenrechner:

Manuelle Berechnung: $$P = \frac{\frac{16!}{4!\cdot 12!}\cdot\frac{16\cdot 15}{2}}{\frac{32!}{6!\cdot 26!}} = \frac{16!\cdot 8\cdot 15\cdot 6!\cdot 26!}{4!\cdot 12!\cdot 32!} = ...$$

Oder mit dem CAS-Rechner TI Nspire:



b) In einem **Skatspiel** gibt es 4 Spielfarben: Kreuz, Pik, Herz, Karo. Jede mit 8 Bildern.
Dem Spieler werden 10 Karten ausgeteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er dabei genau
A: 5 Kreuzkarten?
B: alle 8 Herzkarten?
C: 5-mal Kreuz, 3-mal Pik und 2-mal Karo?



Lösung:

$$P(A) = \frac{\binom{8}{5}\cdot\binom{24}{5}}{\binom{32}{10}} = 0{,}0369$$

$$P(B) = \frac{\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2}}{\binom{32}{10}} = \frac{1\cdot\frac{24\cdot 23}{2}}{\binom{32}{10}} = \frac{12\cdot 23}{\binom{32}{10}} = ... = 0{,}000.004$$

$$P(C) = \frac{\binom{8}{5}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{32}{10}} = 0{,}0014$$

Bei C wurde die erweiterte hypergeometrische Verteilung benötigt. Dabei werden die Karten aus 3 Sorten gezogen:

5 Kreuzkarten: 5 aus 8 geht auf $\binom{8}{5}$ Arten.

3 Pikkarten: 3 aus 7 geht auf $\binom{8}{3}$ Arten.

2 Karokarten: 2 aus 8 geht auf $\binom{8}{2}$ Arten.

Diese Möglichkeiten werden für den Zähler multipliziert.

Demo für www.mathe-cd.de

c) Busfahrer können einen Einzelfahrschein (E) haben, eine Dauerkarte (D) besitzen, oder sie können **Schwarzfahrer** (S) sein. Die Karten löst man im Bus an einem Automaten. Gestern befanden sich im Bus der Linie 108 um 14 Uhr 12 Personen mit einem Dauerfahrschein im Bus, 8 hatten eine Einzelkarte gelöst und 3 waren Schwarzfahrer.

Der Kontrolleur kann aus Personalmangel nur von einer Station bis zur nächsten kontrollieren. Er kann in dieser Zeit nur eine Stichprobe von 12 Personen kontrollieren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter

A: genau 10 Personen mit einem gültigen Fahrausweis?
B: alle drei Schwarzfahrer?
C: kein Schwarzfahrer?
D: höchstens 1 Schwarzfahrer?
E: 3 mit Einzelfahrschein und kein Schwarzfahrer?
F: mindestens 10 mit einem Dauerfahrschein?
G: 6 mit Einzelkarten, 4 mit einer Dauerkarte und 2 Schwarzfahrer?

Lösung:

$$P(A)=\frac{\binom{20}{10}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{23}{12}}=\frac{\frac{20!}{10!\cdot 10!}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}}{\frac{23!}{12!\cdot 11!}}=\frac{20!\cdot 3\cdot 12!\cdot 11!}{10!\cdot 10!\cdot 23!}=\frac{3\cdot 12\cdot 11\cdot 11}{23\cdot 22\cdot 21}\approx 0{,}4099$$

```
1.1                BOG AUTO REELL
nCr(20,10)·nCr(3,2)
-------------------        0.40993789
    nCr(23,12)
```

Sehr oft kann man wie hier gezeigt günstig kürzen.

Beispiele:

$$\frac{12!}{10!}=\frac{12\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}}=132$$

$$\frac{20!}{23!}=\frac{\cancel{20!}}{23\cdot 22\cdot 21\cdot \cancel{20!}}=\frac{1}{23\cdot 22\cdot 21}$$

$$P(B)=\frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{20}{9}}{\binom{23}{12}}=\frac{20!\cdot 12!\cdot \cancel{11!}}{9!\cdot \cancel{11!}\cdot 23!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{23\cdot 22\cdot 21}\approx 0{,}1242$$

$$P(C)=\frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{20}{12}}{\binom{23}{12}}=\frac{20!\cdot \cancel{12!}\cdot 11!}{\cancel{12!}\cdot 8!\cdot 23!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{23\cdot 22\cdot 21}\approx 0{,}093$$

$$P(D)=\frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{20}{12}}{\binom{23}{12}}+\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{20}{11}}{\binom{23}{12}}=\frac{\binom{20}{12}+3\cdot\binom{20}{11}}{\binom{23}{12}}=\ldots\approx 0{,}4658$$

Wissen:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\quad \text{z. B.}$$

$$\binom{12}{10}=\binom{12}{12-10}=\binom{12}{2}$$

$$\binom{12}{9}=\binom{12}{3},\quad \binom{10}{7}=\binom{10}{3}$$

Ferner:

$$\binom{n}{1}=n,\quad \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

$$P(E)=\frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{12}{9}}{\binom{23}{12}}=\frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{23}{12}}=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot 10\cdot 12!\cdot 11!}{\cancel{3!}\cdot \cancel{3!}\cdot 23!}=\ldots\approx 0{,}0091$$

```
nCr(20,12)·nCr(3,0)+nCr(20,11)·nCr(3,1)
---------------------------------------
              nCr(23,12)
                                0.4658[illegible]851
nCr(8,3)·nCr(12,9)
------------------              0.0091[illegible]
    nCr(23,12)
```

```
nCr(12,10)·nCr(13,2)+12·13+1
----------------------------
         nCr(23,12)
                                0.00392359
nCr(8,6)·nCr(12,4)·nCr(3,2)
---------------------------     0.03075266
        nCr(23,12)
```

$$P(F)=\frac{\binom{12}{10}\cdot\binom{13}{2}+\binom{12}{11}\cdot\binom{13}{1}+\binom{12}{12}\cdot\binom{13}{0}}{\binom{23}{12}}=\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{13}{2}+\binom{12}{1}\cdot\binom{13}{1}+\binom{12}{0}\cdot\binom{13}{0}}{\binom{23}{12}}$$

$$=\frac{\frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{13\cdot 12}{2}+12\cdot 13+1\cdot 1}{\binom{23}{12}}=\frac{66\cdot 78+12\cdot 13+1}{\binom{23}{12}}=\ldots\approx 0{,}0039$$

$$P(G)=\frac{\binom{8}{6}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{23}{12}}=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{23}{12}}=\frac{28\cdot\binom{12}{4}\cdot 3}{\binom{23}{12}}=\frac{28\cdot 3\cdot 12!\cdot 12!\cdot 11!}{4!\cdot 8!\cdot 23!}=\ldots\approx 0{,}0308$$

Demo für www.mathe-cd.de

2.4 Erwartungswert und Varianz der hypergeometrische Verteilung

Es gelten diese Formeln:

Erwartungswert: $\boxed{E(X) = n \cdot \frac{M}{N}}$

Varianz: $\boxed{V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}}$

Diese Formeln kann man auch anders aufschreiben.

$p = \frac{M}{N}$ ist der Anteil, mit der die Merkmalsausprägung „Sorte 1" in der Grundgesamtheit vorkommt, also die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine „Kugel dieser Sorte zieht".

Dann erhält man:

Erwartungswert: $\boxed{E(X) = n \cdot p}$

Varianz: $\boxed{V_{hyp}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}}$

Hier fühlt man sich stark an die Formeln der Binomialverteilung erinnert. Dort gilt:

Für die Binomialverteilung für den Erwartungswert dasselbe, und für Varianz gilt

$$\boxed{V_{Bin}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Die Varianzformeln der hypergeometrische Verteilung und der Binomialverteilung unterscheiden sich also nur durch den Faktor $\frac{N-n}{N-1}$, den man auch Korrekturfaktor nennt. Kürzt man diesen Bruch durch N, dann folgt $\frac{N-n}{N-1} = \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{n}}$. Ist also n groß, dann wird $\frac{1}{n}$ sehr klein und der Nenner etwa 1. Analoges gilt für den Fall, dass n sehr klein gegenüber N wird, dann wird $\frac{n}{N} << 1$, also $\frac{n}{N} \approx 0$ und somit der Zähler etwa 1.

Hinweis:

Herleitungen dazu findet man im Internet z. B. unter dem Link:

http://www.reiter1.com/Glossar/Hypergeometrische_Verteilung_Mittelwert_Varianz.htm#Merkmal

oder bei http://fed.matheplanet.com/mpr.php?stringid=4876602

Demo für www.mathe-cd.de

Ein Beispiel zum Einsatz von Erwartungswert und Varianz:

Aus einer Kiste mit 1000 Transistoren werden 100 entnommen und getestet. Die Fehlerwahrscheinlichkeit wurde mit p = 0,1 angegeben. Mit wie vielen defekten kann man rechnen?

a) Zunächst wollen wir mit der Binomialverteilung rechnen, d. h. wir verwenden das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“. Es sei X die Zufallsvariable „Anzahl der defekten Transistoren“. Dann folgt für den Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

In welchem Intervall streut die Zufallsvariable X zu 95,5%? Dazu berechnet man die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$ und berechnet dazu die $2\sigma-$Umgebung. Sie hat den Radius $r = \sigma = 3$ und wird daher gekennzeichnet durch:
$10-3 \le X \le 10+3$ bzw. $7 \le X \le 13$ bzw. durch $X \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

In ihr liegen (wenn $\sigma > 3$ ist) die X-Werte zu etwa 95,5%, was man so aufschreiben kann:

$$P(7 \le X \le 13) \approx 0{,}955 \text{ oder } P(|X-10| \le 3) \approx 0{,}995.$$

b) Nun rechnen wir „hypergeometrisch“. Dazu muss man genau festlegen, wie viele gute und defekte Teile vorhanden sind. Wir berechnen, dass ausgehend von 10% defekten unter den 1000 Transistoren 100 defekte und 900 gute sein dürften.

Weiter auf der Mathe-CD

Demo für www.mathe-cd.de