Wahrscheinlichkeitsrechnung

Warenprüfungen

Themenheft und Trainingsheft

Anwendung der Binomialverteilung
und der hypergeometrischen Verteilung

Datei Nr. 34220

Stand 23. Juni 2010

Wird noch fortgesetzt…

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Vorwort

Ein beliebtes Thema für umfangreichere Stochastik-Aufgaben ist die Fehlersuche.
Da gibt es defekte Geräte aller Art. Durch Tests will man herausfinden, wie hoch deren Anteil ist. Oder wenn sie 2 Fehler aufweisen, dann können diese einzeln oder zusammen in Erscheinung treten.
Dieses Aufgabenfeld scheint sich endlos auszudehnen.

Wenn man sich dieses Themas genauer annimmt, erkennt man, dass es einige prinzipielle Aufgabenstellungen gibt, die man nicht einfach so nebenbei mitbekommen soll, sondern, die man gezielt gründlich angehen sollte, weil der Lerneffekt und das Aha-Erlebnis groß sein kann.

Daher habe ich hier begonnen, eine Sammlung aufzubauen, aus der man auswählen kann, und die (auch Lehrern) zeigt, was es so alles gibt. Dabei bin ich sicher, dass auch ich noch vieles nicht kenne ☺.

§ 1 Warenprüfungsverfahren

1.1 Zur Überprüfung der Qualität einer Ware gibt es prinzipiell zwei Verfahren:

(1) Man kann die fertig produzierte Ware direkt der Produktion entnehmen. In diesem Falle wird man davon ausgehen, dass die Produktionsanlage mit einigermaßen konstanter Wahrscheinlichkeit immer wieder ein nicht der Norm entsprechendes Gerät produziert.
Ich nenne dieses dann der Einheitlichkeit halber „defekt".
Derjenige, der die Qualitätsprüfung vornimmt, arbeitet dann entweder im Auftrag des Herstellers oder des Verkäufers. Dessen Interesse an guter Qualität beruht natürlich darauf, dass er seine Kunden zufrieden stellen will.

(2) Es gibt aber auch den Abnehmer, der die Ware bestellt hat und nach Empfang erst einmal der Lieferung eine Stichprobe entnimmt, um sie auf Qualität zu prüfen. Wie groß diese Stichprobe sein wird, muss er abwägen. Hier steht Sicherheit gegen Kosten.
Es wird zu teuer, jedes Einzelstück zu überprüfen, dann aber hätte der Abnehmer die volle Sicherheit. Daher wird er sich auf eine Stichprobe beschränken und eine gewisse Unsicherheit in Kauf nehmen, um Kosten zu sparen. In diesem Fall ist es dann wichtig zu wissen, mit wie vielen defekten Geräten er rechnen kann, wie sicher das Testergebnis ist (denn es wurde ja nur eine Stichprobe überprüft), und ob er überhaupt den Angaben des Herstellers vertrauen kann.

Die Rechenverfahren, die man zu diesen Tests verwendet, richten sich nach der Testmethode.
Wir beschränken uns hier auf die beiden Verfahren, die man üblicherweise in der Schule behandelt.

(1) Bei der direkten Herstellungskontrolle nach der Produktion geht man, wie oben schon gesagt wurde, davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der die Fertigungsanlage defekte Geräte produziert, konstant ist. Dann entspricht das Testverfahren dem Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen". Denn nur dabei ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer „Kugel der Sorte 1" (= defektes Gerät) konstant. Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet man dann die **Binomialverteilung**.

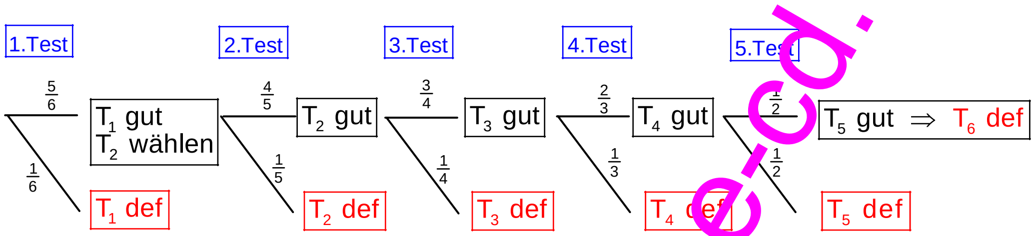
(2) Bei der Kontrolle einer Lieferung muss man unterscheiden, ob man „ahnungslos" testet und erst einmal herausfinden muss, wie viele defekte Geräte im Durchschnitt vorkommen. Dann kann man nichts voraussagen und auch wenig planen. Oder ob man eine Information darüber besitzt, mit welchem Prozentsatz defekter Geräte man rechnen muss. Dies kann man dann durch die Stichprobe überprüfen und dann entscheiden, ob man die Lieferung annimmt oder ablehnt. Kennt man eine zugrunde liegende Fehlerwahrscheinlichkeit, kann man berechnen, dass dann unter 100 Geräten z. B. 4 defekte und 96 brauchbare sein sollten. Dann verwendet man zur Rechnung die **hypergeometrische Verteilung**.

1.2 Das Modul-Prüfverfahren

Um mehrere Elemente einer Schaltung zu testen oder mehrere Blutuntersuchungen vorzunehmen, gibt es eine kostensparende Variante: Das sogenannte Modulverfahren.

Beispiel 1 - 1. Möglichkeit: Durchführung von Einzeltests.

In einer Schaltung mit 6 Transistoren ist genau einer defekt. Mit wie vielen Einzeltests und welchen Kosten muss man dann rechnen, wenn 1 Test 1,50 € kostet?



Erklärung:

Ein defekter Transistor ist sicher dabei. Beim 1. Test findet man ihn mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ findet man einen guten. Nun sind unter den restlichen 5 Transistoren 4 gute und 1 defekter, den man beim 2. Test mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ findet, während man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ einen 2. guten findet. Dann sind noch 3 gute und 1 defekter vorhanden, so dass man bei 3. Test mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ den defekten findet oder mit $\frac{3}{4}$ wieder einen guten. In diesem Fall sind noch 2 gute und 1 defekter vorrätig, so dass man mit $\frac{1}{3}$ den defekten findet oder mit $\frac{2}{3}$ einen der restlichen guten. In diesem Fall sind noch 2 vorrätig. Jetzt genügt 1 Test, um daraus den defekten zu entlarven. Dies ergibt nun folgende Tabelle: T_i bedeute „der i. Transistor".

Tabelle zur Berechnung des Erwartungswerts:

Z = Anzahl der Tests	Ereignis	Wahrscheinlichkeit	Preis K (€)
1	T_1 ist defekt	$\frac{1}{6}$	1,50
2	T_2 ist defekt	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$	3,00
3	T_3 ist defekt	$\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$	4,50
4	T_4 ist defekt	$\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	6,00
5	T_5 wird getestet. Entweder T_5 oder T_6 ist dann defekt	$\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{2}{6}$ (Es sind 2 Pfade!)	7,50

Berechnung des Erwartungswerts für die Anzahl der Tests (aus den Spalten 1 und 3):

$$E(Z)=\tfrac{1}{6}\cdot 1+\tfrac{1}{6}\cdot 2+\tfrac{1}{6}\cdot 3+\tfrac{1}{6}\cdot 4+\tfrac{2}{6}\cdot 5=\tfrac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+10)=\tfrac{20}{6}=\tfrac{10}{3}\approx 3{,}33$$

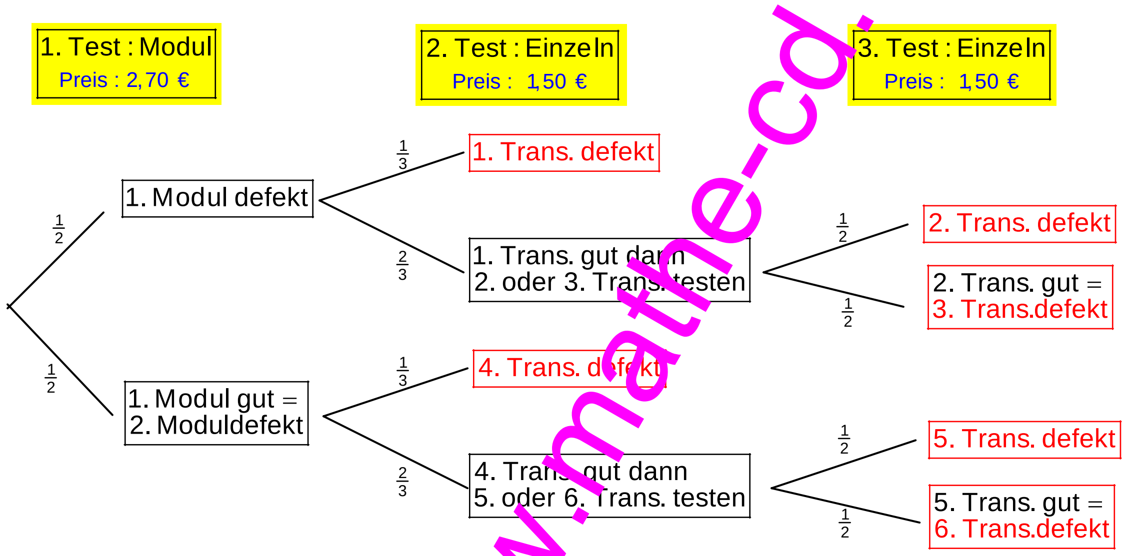
Berechnung des Erwartungswerts für die Kosten der Tests: (aus den Spalten 3 und 4):

$$E(K)=\tfrac{1}{6}\cdot 1{,}5+\tfrac{1}{6}\cdot 3+\tfrac{1}{6}\cdot 4{,}5+\tfrac{1}{6}\cdot 6+\tfrac{2}{6}\cdot 7{,}50=\tfrac{1}{6}\cdot(1{,}5+3+4{,}5+6+15)=\tfrac{1}{6}\cdot 30=5$$

Ergebnis: Man muss mit durchschnittlich 3,33 Tests rechnen und dafür 5 (€) bezahlen.

2. Möglichkeit: Durchführung von Modultests.

a) Jetzt fasst man (beispielsweise) 3 Transistoren zu einem Modul zusammen.
Ist das erste Modul fehlerhaft, dann muss es einer dieser drei Transistoren sein. Man testet den ersten, ist er gut, dann muss es der 2. oder 3. sein. Man hat dann entweder 2 oder 3 Tests durchgeführt. Ist das erste Modul aber gut, dann muss man die Transistoren des 2. Moduls einzeln testen. Man testet den ersten, ist er gut, dann muss es der 2. oder 3. sein. Man hat dann entweder 2 oder 3 Tests durchgeführt. Im Diagramm sieht das so aus:



Die Pfade 1 und 4 benötigen 2 Tests, die Pfade 2, 3, 5 und 6 benötigen 3 Tests.

Tabelle zur Berechnung des Erwartungswerts:

Info: Ein Modultest kostet 2,70 €, ein Einzeltest 1,50 €.

Weiter auf der Mathe-CD!