STOCHASTIK

Tschebyscheff-Ungleichung

Aufgabensammlung

wird noch erweitert

Stand 18. April 2010

Datei Nr. 36112

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Aufgabe 2

Ein Sportschütze trifft bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0,8.

a) Er schießt 20-mal. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Er tritt jedes Mal.
B: Er trifft höchstens 18 mal
C: Er trifft mehr als 5-mal aber höchstens 15-mal.

b) Er schießt nun 400-mal. X sei die Anzahl der von ihm erzielten Treffer.

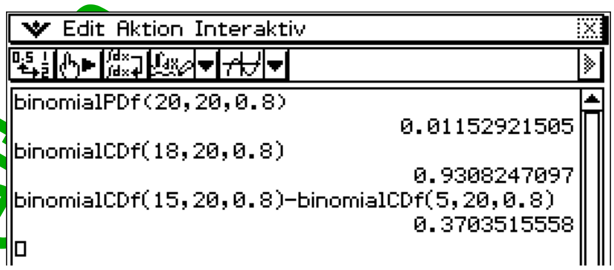
Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für X.

Schätze mit Hilfe der **Ungleichung von Tschebyscheff** die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass die Trefferzahl X vom Erwartungswert um weniger als 10 abweicht.

c) Wie oft muss er mindestens schießen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% die relative Häufigkeit der Treffer von der Trefferwahrscheinlichkeit 0,8 um weniger als 0,05 abweicht?

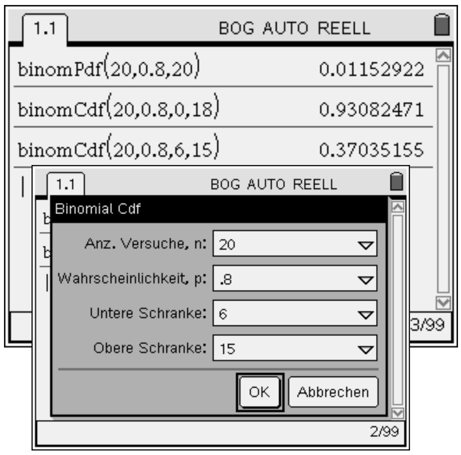
Lösung:

a) Hier liegt eine Binomialverteilung vor.



$$P(X=20)=f_B(20;20;0.8)=0{,}8^{20}=0{,}0115$$
$$P(X\le 18)=F_B(18;20;0.8)=0{,}9308$$
$$P(5<X\le 15)=P(X\le 15)-P(X\le 5)=0{,}3703$$

Die Funktion $F_B(k;n;p)$ ist die Verteilungsfunktion, mit der man $P(X\le k)$ berechnet.
Die obere Abbildung stammt von CASIO ClassPad.

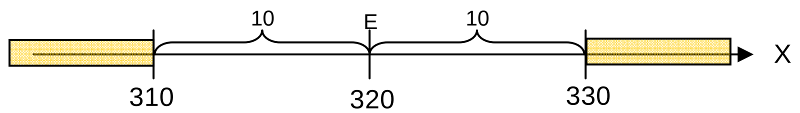


Mit TI Nspire kann man die 3. Aufgabe direkt berechnen: Man beachte, dass hier die Reihenfolge der Parameter anders ist. Das zeigt der Eingabe-Assistent für $F_B(n;p;a;b)$. Hier kann man also $P(5<X\le 15)=P(6\le X\le 15)=0{,}3703$ direkt berechnen, weil man hier auch die untere Schranke eingeben kann, währen sie bei CASIO stets 0 ist. Daher die Rechnung über die Differenz.

b) Die Tschebyscheff-Ungleichung lautet: $\boxed{P(|X-E|\ge c)\le \frac{\sigma^2}{c^2}}$

Hier ist gegeben: n = 400, p = 0,8. Daraus folgen:

Erwartungswert für X: $E(X)=n\cdot p=400\cdot 0{,}8=320$
Varianz von X: $V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=64$
Standardabweichung: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{64}=8$.



Die Abbildung zeigt das <u>Toleranzintervall</u> von Radius c = 10 um den Erwartungswert.
Die Tschebyscheff-Ungleichung beschreibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit für den rot markierten <u>Außenbereich</u> höchstens ist.

Dieser Außenbereich wird hier beschrieben durch $|X-320| \geq 10$.
Sein Gegenstück ist der Toleranzbereich mit: $|X-320| < 10$.

Nach Tschebyscheff gilt: $P(|X-320| \geq 10) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} = \frac{64}{100} = 0{,}64$

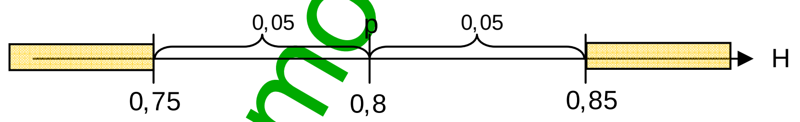
Dann folgt für den Innenbereich: $P(|X-320| < 10) \geq 1-0{,}64 = 0{,}36$

Das ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit,

c) Die nun gefragte <u>relative Häufigkeit</u> der Treffer wird so berechnet: $H = \frac{X}{n} = \frac{X}{400}$.

Diese soll laut Aufgabe von der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 um weniger als 5 % = 0,05 = c abweichen. Dies schreibt man als Ungleichung so: $|H-p| < 0{,}05$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür sollt mindestens 90% sein: $P(|H-0{,}8| < 0{,}05) \geq 0{,}9$ (1)
Hier geht es um den Innenbereich:



Den Außenbereich kann man mit der Tschebyscheff-Ungleichung beschreiben:

Diese lautet: $\boxed{P(|X-E| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}}$

Umrechnen auf H, also Betragsungleichung durch n dividieren: $P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{E}{n}\right| \geq \frac{c}{n}\right) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$

Dabei ist $\frac{X}{n} = H$ und $\frac{E}{n} = p = 0{,}8$. So entsteht daraus: $\underbrace{P\left(|H-0{,}8| \geq \frac{c}{n}\right)}_{\text{Außenbereich}} \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$

Der Innenbereich (Toleranzbereich) stellt das Gegenereignis dar und wird durch die Ungleichung $|H-0{,}8| < \frac{c}{n}$ beschrieben: $P\left(|H-0{,}8| < \frac{c}{n}\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{c^2}$ (2)

Laut Aufgabe ist $\frac{c}{n} = 0{,}05$: $P(|H-0{,}8| < 0{,}05) \geq 1-\frac{\sigma^2}{c^2}$

Die Bedingung der Aufgabe lautet: $\boxed{1-\frac{\sigma^2}{c^2} \geq 0{,}9}$ (vergleiche (1) und (2)!)

Einsetzen: $c = n \cdot 0{,}05$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = n \cdot 0{,}16$

ergibt: $1-\frac{n \cdot 0{,}16}{n^2 \cdot 0{,}05^2} \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1 \geq \frac{0{,}16}{n \cdot 0{,}05^2} \Leftrightarrow n \geq \frac{0{,}16}{0{,}1 \cdot 0{,}05^2} = 640$

Ergebnis: Der Schütze muss mindestens 640 mal schießen.