Zahlenfolgen

vom Typ $a_{n+1} = a_n \cdot q + r$

Themenheft mit Trainingsaufgaben

Rekursive und explizite Behandlung der Folgen vom Typ

$$a_{n+1} = a_n \cdot q + r$$

Anwendung: Exponentielle Wachstumsfunktionen!

Datei Nr. 40020

(Fortsetzung des Textes 40011)

Friedrich Buckel

Stand: 19. Januar 2010

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Wichtiges Vorwort

Auf Folgen des Typs $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot q + r}$ kommt man, wenn man Wachstumsfolgen untersucht. Etwa beschränktes Wachstum, beschränkte Abnahme, Ratenzahlungen und vieles weitere aus der Finanzmathematik. Damit ist klar, dass die explizite Form auf einer Exponentialfunktion beruht.

Ich zeige in den ersten Seiten wie man sich da herantastet und wie man den angegebenen Ansatz beweisen kann. Im Kapitel 2 ist eine Unterrichtseinheit konzipiert, in der man sich (auch mit exponentieller Regression) an das Ergebnis herantastet.

Im Text 18250 wurde Finanzmathematik als spezielles Thema der Wachstumsfunktionen in der Sekundarstufe 1 besprochen. Dieser auch ganz überarbeitete und erweiterte Text verwendet denselben exponentiellen Ansatz wie hier geschehen. Dort zeige ich vor allem, dass man für die gängigen Formeln des Ratensparens, der Rentenzahlung und der Darlehensrechnung nicht mehr die Formeln der geometrischen Reihen benötigt, wie es meistens gemacht wird. Mit diesem exponentiellen Ansatz erhält man dieselben Ergebnisse – verbunden mit mehr Verständnis, wie ich meine. Eine Formel habe ich hier auch damit bewiesen.

Der Einsatz der CAS-Rechner TI Nspire CAS und CASIO ClassPad ist optional. Fast alle Lösungen sind auch „manuell" dargestellt. Lediglich im Kapitel 2 ist ein solcher Rechner günstig.

Für mich war das Ausprobieren dieses Ansatzes auf die gezeigten Probleme spannend und ich bin jetzt so überzeugt von diesem Weg, dass ich insgesamt über 150 Seiten darüber geschrieben habe. Ich würde mich über Rückmeldungen freuen.

1 Folgen des Typs $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot q + r}$

1.1 Zuerst einige abstrakte Beispiele

Beispiel 1: $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot 3 + 2}$ mit $u_O = 4$

Rekursive Berechnung weiterer Glieder:

$$u_1 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$$

$$u_2 = 14 \cdot 3 + 2 = 44$$

$$u_3 = 44 \cdot 3 + 2 = 134 \quad \text{usw.}$$

Explizite Berechnungsformel:

Ansatz: $u_n = a \cdot b^n + c$ (0)

Zur Bestimmung dieser Funktion müssen wir die 3 Unbekannten a, b und c berechnen.

Dazu macht man die Punktprobe mit drei Werten aus obiger Tabelle:

$u_0 = 4$ eingesetzt:	$a \cdot \cancel{b^0} + c = 4$	(1)
$u_1 = 14$:	$a \cdot b^1 + c = 14$	(2)
$u_2 = 44$:	$a \cdot b^2 + c = 44$	(3)
Elimination von c: $(3)-(2)$:	$ab^2 - ab = 30$	(4)
$(2)-(1)$:	$ab - a = 10$	(5)
Ausklammern:	$ab(b-1) = 30$	(4')
	$a(b-1) = 10$	(5')
Elimination von a: $\frac{(4')}{(5')}$:	$\frac{ab \cdot (b-1)}{a \cdot (b-1)} = \frac{30}{10}$	
Kürzen:	$b = 3$	
Eingesetzt in (5'):	$a \cdot 2 = 10 \Rightarrow a = 5$	
Eingesetzt in (1).	$5 + c = 4 \Rightarrow c = -1$	

Ergebnis: $\boxed{u_n = 5 \cdot 3^n - 1}$

Unser Lösungsansatz (0) war von mir vorgegeben. Dass er zum Ergebnis führt zeigen wir so:

Probe dafür, dass diese Folge Lösung der Gleichung $u_{n+1} = u_n \cdot 3 + 2$ ist:

Linke Seite: $u_{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} - 1 = 5 \cdot 3 \cdot 3^n - 1 = 15 \cdot 3^n - 1$

Rechte Seite: $u_n \cdot 3 + 2 = \left(5 \cdot 3^n - 1\right) \cdot 3 + 2 = 15 \cdot 3^n - 3 + 2 = 15 \cdot 3^n - 1$

Beide Seiten stimmen im Ergebnis überein.

Ergebnis:

Die rekursive Folge	$\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot 3 + 2}$ mit $u_O = 4$
lautet explizit:	$\boxed{u_n = 5 \cdot 3^n - 1}$.

Beobachtung: Die Basis b der Exponentialfunktion ist mit dem Faktor q = 3 der rekursiven Formel identisch. Wenn man das schon im Ansatz berücksichtigt, wird die Berechnung wesentlich kürzer:

Kurzlösung zu Beispiel 1: $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot 3 + 2}$ mit $u_0 = 4$

Wissen: Der Faktor q = 3 wird Basis der Exponentialfunktion. Daher der folgende

Ansatz: $u_n = a \cdot 3^n + c$

Zur Bestimmung dieser Folge müssen wir nur die 2 Unbekannten a und c berechnen.

Dazu macht man die Punktprobe mit zwei Werten:

$u_0 = 4$: $\quad a \cdot \cancel{3^0} + c = 4 \quad (1)$

$u_1 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$: $\quad a \cdot 3 + c = 14 \quad (2)$

Elimination von c: $(2)-(1)$: $\quad a \cdot 3 - a = 10 \;\Leftrightarrow\; 2a = 10 \;\Leftrightarrow\; a = 5$

In (1): $\quad 5 + c = 4 \;\Rightarrow\; c = -1$

Ergebnis: $\boxed{u_n = 5 \cdot 3^n - 1}$

Lösung mit einem CAS-Rechner auf der nächsten Seite!

Beispiel 2

$\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot 1{,}06 + 600}$ mit $u_0 = 400$

$u_1 = 400 \cdot 1{,}06 + 600 = 1024$

n	a_n
0	400
1	1024
2	1685.44
3	2386.5664
4	3129.7603
5	3917.546
6	4752.5987
7	5637.7546
8	6576.0199
9	7570.5811
10	8624.816

Ansatz: $\boxed{u_n = a \cdot 1{,}06^n + c}$

Bedingungen:

$u_0 = 400$ eingesetzt: $\quad 400 = a \cdot \cancel{1{,}06^0} + c \quad (1)$

$u_1 = 1.024$ eingesetzt: $\quad 1.024 = a \cdot 1{,}06 + c \quad (2)$

(2) – (1): $\quad 624 = 1{,}06 \cdot a - a$

$0{,}06 \cdot a = 624 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{624}{0{,}06} = 10.900$

In (1): $\quad 400 = 10.900 + c \;\Leftrightarrow\; c = -10.500$

Ergebnis: $\boxed{u_n = 10.900 \cdot 1{,}06^n - 10.500}$

Information: Diese Folge gibt den Kontostand eines Ratensparvertrags an, Zinssatz 6%, Startkapital 400 €. Jahrerate 600 €. Das wird in 1.3 gezeigt.

Trainingsaufgaben 1

Berechne zu den rekursiv definierten Folgen jeweils 4 Werte, stelle dann die explizite Exponentialfunktion auf und zeige durch eine Probe, dass sie Lösung der Rekursionsgleichung ist.

a) $a_n = a_{n-1} \cdot 2 - 5$ mit $a_0 = 6$ (Was passiert, wenn $a_0 = 5$ bzw. 4 ist?)

b) $a(n+1) = 1{,}2 \cdot a(n) + 20$ mit $a(0) = 2$

c) $K(n+1) = K(n) \cdot 1{,}075 + 1.200$ mit $K(0) = 1.000$

d) $z(n+1) = z(n) \cdot 1{,}1 - 5000$ mit $z(0) = 40.000$

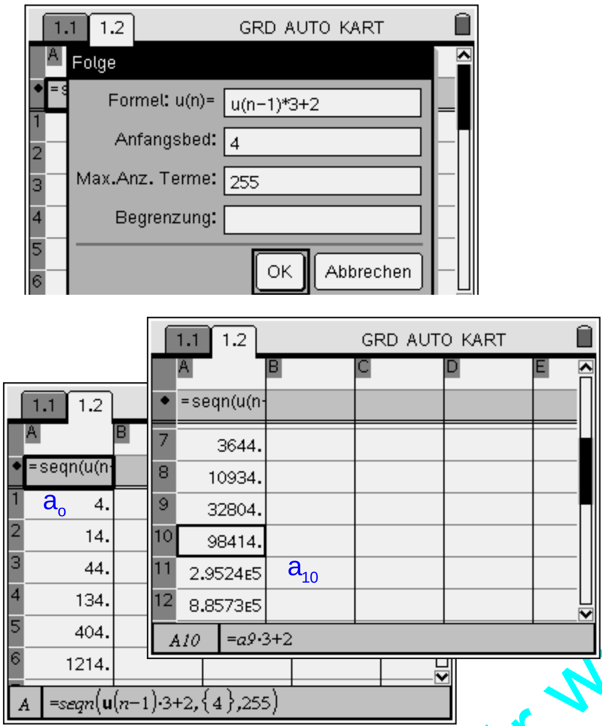
e) $f(n) = 5 - 2 \cdot f(n-1)$ mit $f(0) = 100$

Lösung von Beispiel 1 mit einem CAS-Rechner:

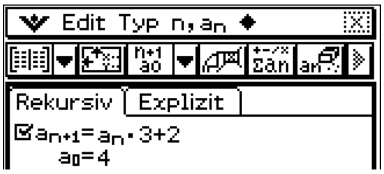
Gegeben ist $u_{n+1} = u_n \cdot 3 + 2$ mit $u_O = 4$

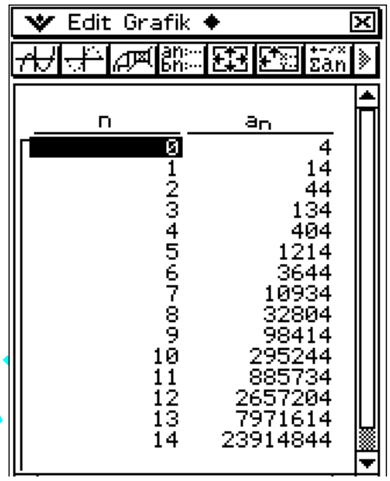
Zuerst die rekursive Berechnung einer Wertetafel, dann die Aufstellung der expliziten Funktion:

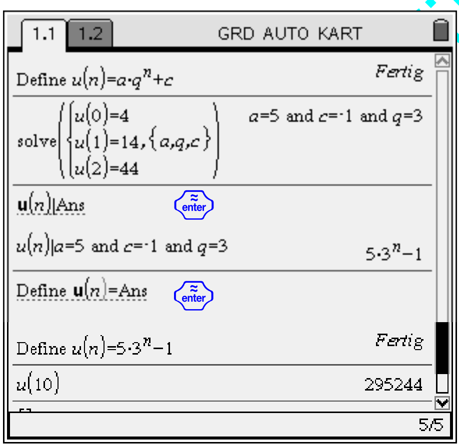
TI Nspire:

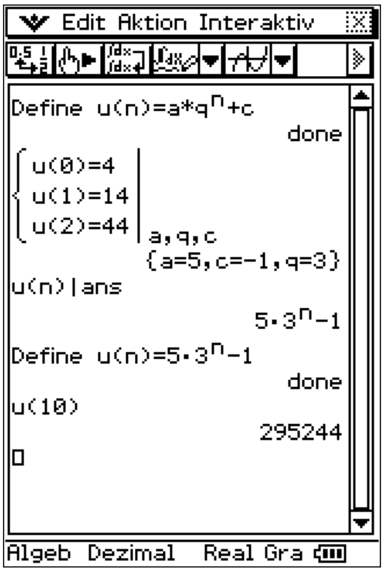


CASIO ClassPad









Und ab hier die Kurzlösung, wenn man b = q = 3 weiß: