

Zahlenfolgen

Teil 3: Reihen

Arithmetische Reihen

Geometrische Reihen

Theorie und Musterbeispiele

Datei Nr. 40050

Stand 5. Februar 2010

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demoseiten für www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Texte über Folgen wurden sehr erweitert und überarbeitet. Daher sollte man sich auch in folgenden Texten umsehen

40011 Einführung

Rekursive und explizite Berechnungsformeln

Grundlagen zu arithmetischen und geometrischen Folgen
(Dies wird in vorliegendem Text wiederholt!

Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen (kurze Einführung)

40013 Arithmetische Folgen 2. Ordnung

Dies wurde auch schon in 40011 angesprochen

40019 Geometrische Folgen: Prozentuales Wachstum

Prozentuales (exponentielles) Wachstum und Abnahme (wie Zinseszinsrechnung, radioaktiver Zerfall).

Hier wird noch einmal besprochen, was kurz in 40011 gezeigt worden ist.

Wer es also ausführlicher braucht, lese hier nach!

40020 Spezielle Wachstumsfolgen

Hier geht es um die rekursive Formel $u_n = u_{n-1} \cdot q + r$.
und die explizite Berechnung der Formeln.

Zu den Anwendungen gehören auch schwierigere finanzmathematische Vorgänge wie Ratensparen, Rentenzahlung, Darlehensfinanzierung.

Allgemein beschreiben diese Folgen das beschränkte Wachstum.

Dazu gehört auch die beschränkte Abnahme (Abkühlungsvorgänge u.a.)

40050 Arithmetische und geometrische Reihen

40060 Geometrische Figuren als geometrische Folgen

Es kommen auch Teilaufgaben zu Reihen vor.

40200 Aufgabensammlung zu ar./geom. Folgen und Reihen

Inhalt

1	Aus Folgen werden Reihen – Einführung	4
	Einführungsbeispiel	4
2	Arithmetische Reihen	7
2.1	Summenformel	7
2.2	10 Musteraufgaben zur arithmetischen Reihe	9
2.3	Arbeiten mit dem Summenzeichen	13
3	Geometrische Reihen	16
3.1	Einführungsbeispiel	16
3.2	Herleitung der Summenformel	17
3.3	Musterbeispiele	18
3.4	Arbeiten mit dem Summenzeichen	20
3.5	Unendliche geometrische Reihe	21
3.6	Periodische Dezimalzahlen	23
4	Schwere Aufgaben zu arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen	26

Trainingsaufgaben dazu in der Datei 40200

1 Aus Folgen werden Reihen - Einführung

Einführungsbeispiel

Gegeben ist eine Zahlenfolge, etwa diese: $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 12, \dots$

Darunter kann man sich etwa vorstellen, dass es sich dabei um Längen an einer rechtwinkligen Spirale handelt. Man kann jetzt fragen:

Wie lang sind zusammen diese ersten 5 Strecken?

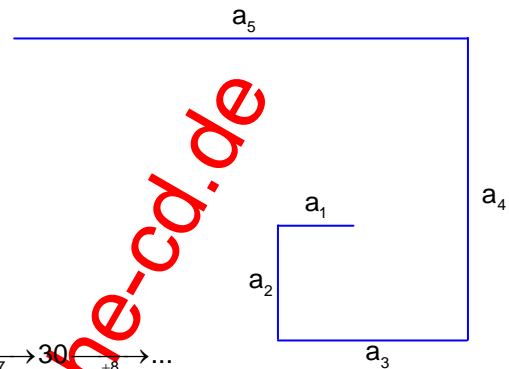
Das wäre dann die Summe $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Ausgerechnet: $s_5 = 2 + 3 + 5 + 8 + 12 = 30$.

Man kann diese Spirale verlängern.

Erkennst du das Bildungsgesetz der Folge?

2 $\xrightarrow{+1}$ 3 $\xrightarrow{+2}$ 5 $\xrightarrow{+3}$ 8 $\xrightarrow{+4}$ 12 $\xrightarrow{+5}$ 17 $\xrightarrow{+6}$ 23 $\xrightarrow{+7}$ 30 $\xrightarrow{+8}$...



So kann man etwa nach der Summe der ersten 8 Strecken fragen. Man nennt das dann s_8 .

$s_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 100$

Man beginnt bei diesen sogenannten Teilsummen immer beim 1. Glied der Folge.

Das hat einen ganz großen Vorteil.

Kennt man eine Formel für s_1, s_2, s_3, \dots dann kann man jedes Zwischenstück berechnen.

Etwa so: Wie groß ist die Summe $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$?

Man berechnet sie dann mit einem Trick: Diese Summe ist die Summe $s_{10} = 185$ minus die Summe $s_5 = 30$:

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = s_{10} - s_5.$$

Man subtrahiert also einfach das fehlende Anfangsstück.

Wir wollen dies nicht weiter ausmalen. Man sollte nur erkennen, dass es Aufgaben gibt, welche die Aufsummierung von Gliedern einer Folge notwendig machen. Und dass es dann günstig ist, die Summierung immer bei a_1 zu beginnen. Denn mit diesen Teilsummen kann man dann auch andere Fragestellungen beantworten.

Es geht also darum, aus einer Folge die neue **Folge der Teilsummen** zu berechnen:

1. Teilsumme:	$s_1 = a_1$	$s_1 = 2$
2. Teilsumme:	$s_2 = a_1 + a_2$	$s_2 = 2 + 3 = 5$
3. Teilsumme:	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$s_3 = 2 + 3 + 5 = 10$
4. Teilsumme:	$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$s_4 = 2 + 3 + 5 + 8 = 18$

n-te Teilsumme:	$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$	$s_n = 2 + 3 + 5 + \dots + a_n(?) = ?$

MERKE: **Eine Folge s_n von Teilsummen nennt man eine Reihe.**

Bei solchen Aufgaben geht es in der Regel darum, eine Formel zu finden, mit der man die Glieder einer Reihe berechnen kann.

Die Beispielfolge hier ist ein denkbar schweres Beispiel, das wir gar nicht berechnen wollen, sondern dessen Ergebnis ich einfach nur mal zeigen möchte:

Für unsere Zahlenfolge gibt es zunächst auch eine rekursive Bildungsvorschrift:

Beobachte: a_2 entsteht aus a_1 durch Addition der 1,
 a_3 entsteht aus a_2 durch Addition der 2,
 a_4 entsteht aus a_3 durch Addition der 3,
 a_{n+1} entsteht aus a_n durch Addition der Zahl n .

Also: $a_{n+1} = a_n + n$

(Hinweis: In 40011 Abschnitt 5.3 und in 40013 sind solche Folgen erklärt. Sie heißen arithmetische Folgen 2. Ordnung).

Ihre explizite Formel lautet: $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$

Und es gibt auch eine Formel für die zugehörige Reihe, also für die Folge der daraus gebildeten Teilsummen: $s_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{11}{6}n$

Nun können wir einmal testen:

$$s_7 = 2 + 3 + 5 + 8 + 12 + 17 + 23 = 70$$

$$\text{Laut Formel erhalten wir: } s_7 = \frac{1}{6} \cdot 7^3 + \frac{11}{6} \cdot 7 = 70$$

$7^3+6+77+6$	
Ans+30+38+47+57+68	70
$12^3+6+11 \times 12+6$	310
	310

$$s_{12} = s_7 + 30 + 38 + 47 + 57 + 68 = 310$$

$$\text{und die Formel liefert: } s_{12} = \frac{1}{6} \cdot 12^3 + \frac{11}{6} \cdot 12 = \dots = 310$$

Ach ja, und wenn wir diese Summe wollten: $a_8 + a_9 + \dots + a_{12}$, dann rechnen wir so:

$$a_8 + a_9 + \dots + a_{12} = s_{12} - s_7 = 310 - 70 = 240.$$

Noch ein solches Beispiel:

$$a_{14} + a_{15} + \dots + a_{20} = s_{20} - s_{13} = \left[\frac{1}{6} \cdot 20^3 + \frac{11}{6} \cdot 20 \right] - \left[\frac{1}{6} \cdot 13^3 + \frac{11}{6} \cdot 13 \right] = 980$$

Bevor wir zu anderen einführenden Beispielen kommen wollen wir uns noch eine wichtige Berechnungsmethode anschauen, die für jede Reihe gilt.

REKURSIVE BERECHUNGSMETHODE FÜR REIHEN

Die folgenden Berechnungen erklären selbst, was gemeint wird.

$$\begin{array}{ll}
 s_1 = a_1 & s_1 = 2 \\
 s_2 = a_1 + a_2 & s_2 = 2 + 3 = 5 \\
 s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{=s_2} + a_3 & s_3 = \underbrace{2+3}_{=s_2} + 5 = 10 \\
 s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{=s_3} + a_4 & s_4 = \underbrace{2+3+5}_{=s_3} + 8 = 18
 \end{array}$$

Man kann also die jeweils nächste Teilsumme aus der vorangegangenen berechnen, indem man einfach das nächste Glied der ursprünglichen Folge addiert.

Also: Wir haben berechnet: $s_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 100$
 Dann folgt: $s_9 = s_8 + a_9$
 Und daraus: $s_{10} = s_9 + a_{10}$
 Usw.

Diese Methode erleichtert das Rechnen.

Man kann dann sogar solche Dinge berechnen:

$$\begin{array}{l}
 \text{Oder: } s_{12} = s_{10} + a_{11} + a_{12} \\
 s_{16} = s_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \\
 \text{(vorausgesetzt man kennt schon } s_{16}\text{.)}
 \end{array}$$

MERKE also:

Unter einer Reihe versteht man die Folge der Teilsummen einer Folge.

Diese Teilsummen beginnen stets beim Anfangsglied a_1 oder a_0 :

$$\begin{array}{ll}
 s_1 = a_1 & \\
 s_2 = a_1 + a_2 & \text{d. h. } s_2 = s_1 + a_2 \\
 s_3 = a_1 + a_2 + a_3 & \text{d. h. } s_3 = s_2 + a_3 \\
 \dots & \\
 s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n & \text{d. h. } s_{n+1} = s_n + a_{n+1}
 \end{array}$$

Statt Teilsummen sagt man auch Partialsummen

2 ARITHMETISCHE REIHEN

2.1 Summenformel

Die zu einer arithmetischen Folge gehörende Folge der Teilsummen heißt eine arithmetische Reihe.

Beispiel 1:

Die berühmteste arithmetische Reihe geht auf eine Geschichte des 9-jährigen Schülers Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) zurück. Dieser erhielt von seinem Schulleiter Büttner und seinem Assistent Bartels die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er schaffte dies in so kurzer Zeit, dass die beiden auf seine mathematische Begabung aufmerksam wurden. Er hatte nämlich schnell beobachtet, dass man 50-mal die Summe 101 rechnen musste:

$$\begin{array}{r} s_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \\ s_{100} = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2s_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \end{array}$$

So entstand die Gleichung $2s_{100} = 100 \cdot 101 \Rightarrow s_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$

Als Formel sieht das dann so aus:

$$2 \cdot s_{100} = 100 \cdot (a_1 + a_{100}) \Rightarrow s_{100} = \frac{100}{2} \cdot (a_1 + a_{100})$$

Allgemein: $2 \cdot s_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Dies ist ein Prinzip, das man auf jede arithmetische Folge anwenden kann!

Beispiel 2:

Die Folge sei $a_n = 4n + 1$, also 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; ... Das ist eine arithmetische Folge mit $d = 4$.

Wir wollen die ersten 30 Glieder dieser Folge addieren, d.h. s_{30} ist gesucht. Dazu müssen wir zuerst $a_{30} = 4 \cdot 30 + 1 = 121$ berechnen.

Nun kann man sich die Teilsumme s_{30} 2-mal gegenläufig aufschreiben und dann vertikal addieren:

$$\begin{array}{r} s_{30} = 5 + 9 + 13 + \dots + 113 + 117 + 121 \\ s_{30} = 121 + 117 + 113 + \dots + 13 + 9 + 5 \\ \hline 2 \cdot s_{30} = 30 \cdot 126 \Rightarrow s_{30} = 15 \cdot 126 = 1890 \end{array}$$

Es folgt dann: $s_{30} = \frac{30}{2} \cdot (a_1 + a_{30}) = 15 \cdot (5 + 121) = 15 \cdot 126 = 1890$

Für eine arithmetische Reihe gilt:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (1)$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \quad (2)$$

s_n ist ein quadratischer Term.

Beweis der Formel (1):

Man schreibt die Teilsumme s_n zweimal gegenläufig auf und addiert vertikal:

Daraus machen wir nun eine Formel. Man sollte jetzt erkennen, dass bei n Summanden n Summen auftreten, die alle so groß sind, wie $a_1 + a_n$:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Wie erkennt man nun, dass rechts alle n Klammern dasselbe Ergebnis haben?

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$$

usw.

Zwischenergebnis: $2 \cdot s_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$

Beweis der Formel 2:

Ersetzt man a_n durch $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

folgt: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

Noch ein Hinweis:

Wenn man die Formel (2) ausmultipliziert, erhält man mit

$$s_n = na_1 + \frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}dn = \frac{1}{2}d \cdot n^2 + (a_1 - d) \cdot n$$

einen quadratischen Term.

Doch diese Formel merkt sich keiner. Man sollte es jedoch wissen:

2.2 Musteraufgaben zur arithmetischen Reihe

Rest auf der Mathe-CD

Demoseiten für www.mathe-cd.de