ANALYSIS

Zahlenfolgen

Reihen für Bruchfolgen

Neue Formeln und ihre Beweise durch vollständige Induktion

Eine spannende Fundgrube für Lehrer !

Datei Nr. 40151

Stand 18.Juli 2009

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese Datei hat eine nette Entstehungsgeschichte. Ich unterrichte derzeit einen Leistungskurs Mathematik und habe sehr ausführlich Folgen , Reihen und Vollständige Induktion behandelt.

Dabei fiel mir auf, daß ich eigentlich nur zwei Beispiele für Bruchfolgen bzw. deren Reihen hatte. Und diese stammten aus Abitursaufgaben. Nun schüttelt man sich solche Summenformeln nicht einfach aus dem Ärmel. Die Suche in diversen Schul- und Hochschulbüchern brachte nichts zutage. Also jammerte ich meinen Schülern etwas vor und setzte einen Preis von 10 € aus für denjenigen, der hier „Neues" bieten könnte. Daraufhin setzten sich meine fleißigen Mädchen Eva und Laura hin und es dauerte nicht lange, bis die ersten drei neuen Formeln vor mir lagen.

Sofort kamen auch Ideen auf, wie man vermutlich beliebig viele weitere Summen bilden könnte. So arbeiteten wir daran weiter und ich begann mit der Niederschrift der ersten Ergebnisse. Es fielen mir einige Tricks ein, wie man aus bekannten Formeln „neue" machen konnte, aber ich blieb immer wieder an einer Summe hängen:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}=?$$

Laura wandte ihre Idee der Verallgemeinerung einer schon gefundenen Lösungsformel an und fand heraus:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+...+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

was dann auch schnell mit Vollständiger Induktion bewiesen war.

Ich habe dann diese Verallgemeinerung zu einer „schlimmen" Summen-Formel gemacht und hier finden Sie den Beweis dazu. Es gibt jetzt also unendlich viele ganz unterschiedliche Reihenformeln mit 2 Faktoren im Nenner.

Dann reizte es natürlich, Summen mit 3 Faktoren zu untersuchen.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}=???$$

Ich schildere am Ende der Datei, wie fast abenteuerlich die Suche nach dem Ergebnis war. Ja, und nun geht die Suche nach solchen Bruchsummen vielleicht weiter. Ist ja auch spannend.

Nur – lieber Leser. Diese Abhandlung gibt es nur auf der Mathematik-CD.
Meine Web-Site wird nur eine kurze Kostprobe enthalten! Soviel Mühe verschenkt man nicht einfach !

Friedrich Buckel 13.6.2003

1. Einleitung

In der Datei 40080 werden zwei Bruchfolgen und ihre Summenformeln durch vollständige Induktion bewiesen:

B1: $$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

und

B2: $$s_n = \frac{12}{4\cdot 5}+\frac{12}{5\cdot 6}+\frac{12}{6\cdot 7}+...+\frac{12}{(n+3)(n+4)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{12}{(i+3)(i+4)} = \frac{3n}{n+4}$$

Da wir sonst keine weiteren Beispiele dieser Art gefunden haben, habe ich meinen Leistungskurs aufgefordert, ähnliche Beispiele selbst zu finden. Dies hat zu erstaunlichen Ergebnissen geführt. Einige kann man verallgemeinern, so daß nunmehr beliebig viele (gleichartige) Reihenformeln zur Verfügung stehen. Ich selbst habe dann den Typ der Folge leicht verändert und weitere Beispiele gefunden.

Zuvor nochmals für Leser eine kleine Hilfestellung, gezeigt am Beispiel B1.

Dort liegt diese Zahlenfolge zugrunde: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,

also $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$; $a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}$; $a_3 = \frac{1}{3\cdot 4}$; $a_4 = \frac{1}{4\cdot 5}$; ....

Als Reihe bezeichnet man die Folge der Teilsummen:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{3+1}{2\cdot 3} = \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4} = \frac{9}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3\cdot 5+1}{4\cdot 5} = \frac{16}{4\cdot 5} = \frac{4}{5} \quad \text{usw.}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

oder mit der Summenformel geschrieben: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Die Behauptung ist nun $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Und in 40080 wurde dies durch vollständige Induktion bewiesen.

2. Neue Reihenformeln – 1. Schritt.

Beispiel 3

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

Zeige durch vollständige Induktion, daß für die zugehörige Reihe gilt:

$$\boxed{s_n = \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}}$$