ANALYSIS

Gebrochen rationale Funktionen

Aufgabensammlung Teil 1:

Funktionen ohne Parameter

Einfache Funktionsuntersuchungen ohne Zusatzaufgaben

und Abituraufgaben

Neu zusammengestellte Aufgabensammlung.

Datei Nr. 43101

Stand: 24. Februar 2009

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt: Aufgaben

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner

Aufgabe 231 $f(x)=\frac{x^2}{(x-2)^2}$

Aufgabe 232 $f(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)^2}$

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner

Aufgabe 241 $f(x)=2\frac{x^2-9}{x^2+9}$

Aufgabe 242 $f(x)=\frac{16-4x^2}{x^2+16}$

Aufgabe 251 $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2+4}$ mit Zusatz

Aufgabe 252 $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ mit Zusatz

Aufgabe 253 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+4}$ mit Zusatz

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

Aufgabe 301 $f(x)=\frac{x^2+2}{x}=x+\frac{2}{x}$

Aufgabe 302 $f(x)=\frac{x^2-8}{2x}=\frac{x}{2}-\frac{4}{x}$

Aufgabe 303 $f(x)=\frac{x^3-x^2+12}{x^2}=x-1+\frac{12}{x^2}$

Aufgabe 311 $f(x)=\frac{x^3-8}{4x^2}$ mit Zusatz

Aufgabe 312 $f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{4x^2}$ mit Zusatz

Aufgabe 313 $f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x-8}{4x^2}$ mit Zusatz

Aufgabe 314 $f(x)=\frac{-x^3-2x^2+16}{2x^2}$ mit Zusatz

Aufgaben für diese Trainingsdatei

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner
(a) Nenner ohne Summe

Einfache Funktionsuntersuchungen ohne Zusatzaufgaben:

Aufgabe 101 $f(x) = -\frac{2}{x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 102 $f(x) = 8\frac{x+2}{x^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 103 $f(x) = \frac{2-2x}{x^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 104 $f(x) = 16\frac{x^2-4}{x^3}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner
(b) Nenner mit Summe, mit Polstellen

Aufgabe 111 $f(x) = \frac{4}{x-2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 112 $f(x) = \frac{12}{3-x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 121 $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 122 $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 123 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 124 $f(x) = \frac{2}{x^2-2x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 131 $f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 132 $f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 141 (Abitur 1994 Baden-Württtemberg)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2}$, ihr Schaubild sei K.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.
Untersuche K auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, auf Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte sowie Asymptoten.
Zeichne K im Bereich $-2 \le x \le 1$ samt Asymptoten mit Längeneinheit 2 cm.

b) K schneidet die y-Achse in P.
Eine Gerade durch P berührt K in $B(x_B \mid y_B)$ mit $y_B < -\frac{1}{2}$.
Berechne die Koordinaten von B.
Bestimme die Punkte der Geraden $x = -\frac{1}{2}$, von denen aus die Strecke BP unter einem rechten Winkel erscheint.

c) Die Kurventangente in P (aus Teilaufgabe b)) schneidet die x-Achse in Q.
Berechne die Koordinaten von Q.
Diese Tangente, das Schaubild K, die positive x-Achse und die Gerade $x = z$ mit $z > \frac{1}{4}$ begrenzen eine Fläche. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper. Bestimme dessen Volumen $V(z)$.
Existiert für $z \to \infty$ ein Grenzwert V^* dieses Volumens? Wenn ja, berechne dieses.

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner
(c) Nenner mit einer Summe – ohne Polstellen!

Aufgabe 151

$$f(x) = \frac{48}{x^2+16}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 152

$$f(x) = \frac{16x}{x^2+8}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 161

$$f(x) = \frac{16}{x^2+4}$$

a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

b) $P(u \mid f(u))$ sei für $u > 0$ ein beliebiger Kurvenpunkt von K_1. Q sei das Spiegelbild zu P bzgl. er y-Achse: Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks OPQ. Für welchen Wert von u nimmt dieser Inhalt einen extremen Wert an. Bestimme seine Art sowie Größe.

c) Dreht man das Dreieck OPQ um die y-Achse entsteht ein Kegel. Untersuche das Verhalten der Volumenfunktion V(u) dieses Kegels für u > 0.

Für welchen Wert von u hat dieser Kegel das halbe Grenzwertvolumen (für $u \to \infty$)?

Aufgabe 162

$$f(x) = \frac{16x}{x^2+4}$$

a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

b) $P(u \mid f(u))$ sei für $u > 0$ ein beliebiger Kurvenpunkt von K_2. Fällt man von P das Lot auf die x-Achse, so entsteht dort der Lotfußpunkt Q. Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks OPQ. Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion in ihrem Definitionsbereich.

c) Dreht man das Dreieck OPQ um die y-Achse entsteht ein Körper, der wie ein Zylinder mit einem herausgebohrten Kegel aussieht.
Untersuche das Verhalten der Volumenfunktion V(u) dieses Kegels für u > 0.

Aufgabe 163

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, ihr Schaubild sei K.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.
Untersuche K auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, auf Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte sowie Asymptoten.
Zeichne K im Bereich $-3 \le x \le 3$ samt Asymptoten mit Längeneinheit 2 cm.

b) $P(u \mid f(u))$ sei ein Punkt auf dem Graphen von f für u > 0. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q.

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ. Besitzt dieses für eine bestimmte Lage von P einen extremen Inhalt?

Zeichne das Schaubild der zu OPQ gehörenden Flächeninhaltsfunktion für $0 \le u \le 4$ mit Längeneinheit 3 cm.

c) Im 1. Feld wird ein Dreieck ABCD so eingezeichnet, dass C und D auf K liegen, A und B auf der x-Achse. Durch Drehung dieses Rechtecks um die x-Achse entsteht ein Zylinder.

Berechne das Volumen dieses Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h des Rechtecks.
Für welche Lage von C und D erhält dieses Zylindervolumen ein Maximum?

d) Berechne diejenige Stammfunktion F zu f, deren Graph durch den Punkt $S(1 \mid 1)$ geht.

Ist die Funktion $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{für } x>1 \\ F(x) & \text{für } x \le 1 \end{cases}$

überall stetig und differenzierbar?

Aufgabe 164 $f(x)=\dfrac{4x-8}{x^2-4x+5}$.

a) Untersuche das Schaubild K von f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte. Zeichne das Schaubild.

b) Zeige, dass K punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.

c) Verschiebe die Kurve so, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt.

d) Das Schaubild und Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner
(a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 201 $f(x)=\frac{2x+4}{x}=2+\frac{4}{x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 202 $f(x)=\frac{3x^2-27}{x^2}=3-\frac{27}{x^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 203 $f(x)=3\frac{x^2-x+6}{x^2}=3-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner
(b) Nenner mit einer Summe, mit Polstellen

Aufgabe 211 $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 212 $f(x) = \frac{4x+2}{2-x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 221 $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 222 $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 223 $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 231 $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 232 $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner
(c) Nenner mit einer Summe, ohne Polstellen

Aufgabe 241

$$f(x) = 2\frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 242

$$f(x) = \frac{16 - 4x^2}{x^2 + 16}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 251 $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2+4}$

Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

Zusatzaufgabe:

Es sei $P(u \mid f(u))$ für $u > 0$ ein Punkt des Schaubildes von K. Das Lot von P auf die Gerade y = 1 schneidet dieses in Q. R sei der Punkt $R(0 \mid 1)$. Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks PQR. Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion A(u).

Aufgabe 252 $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$

Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

Zusatzaufgaben

(1) Zeige, dass K_5 punktsymmetrisch zu $Z(2 \mid 1)$ ist.

(2) Es sei $P(u \mid f(u))$ für $u > 0$ ein Punkt des Schaubildes von K.
Das Lot von P auf die Gerade y = 1 schneidet diese in Q. R sei der Punkt R (0 I 1).
Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.
Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion A(u).

Aufgabe 253 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+4}$

a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

b) $P(u \mid f(u))$ sei für $u > 0$ ein Punkt des Schaubildes von K_3. Das Lot von P auf die waagrechte Asymptote schneidet diese in Q. Spiegelt man P und Q an der y-Achse, erhält man R und S. Berechne den Inhalt A(u) des Vierecks PQRS. Für welches u wird dieser Inhalt maximal?

c) Dreht man das Rechteck um die y-Achse, entsteht ein Zylinder.
Untersuche das Verhalten der Zylinder-Volumenfunktion V(u).

d) Dreht man das Rechteck um die x-Achse, entsteht ein Ring.
Berechne dessen Volumen in Abhängigkeit von u.

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1
(a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 301

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 302

$$f(x) = \frac{x^2-8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 303

$$f(x) = \frac{x^3-x^2+12}{x^2} = x - 1 + \frac{12}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 311 $f(x)=\frac{x^3-8}{4x^2}$

a) Berechne Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

b) P (u I f(u)) sei ein beliebiger Kurvenpunkt des Schaubilds K von f.
Für welchen Wert von u geht die Tangente in P durch den Ursprung?
In welchem Punkt S schneidet die Tangente in P die Kurve K nochmals?

c) Die Parallele zur y-Achse durch P(u I f(u)) jetzt mit u > 1 schneidet die schiefe Asymptote in Q.
Ferner sei R (1 I 0) gegeben. Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.
Für welchen Wert von u nimmt das Dreieck einen extremen Inhalt an?
Bestimme dessen Art und Größe.

Aufgabe 312 $f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{4x^2}$

a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte. Zeichne K für $-7\le x\le 7$

b) Die Gerade x = u mit u < 0 schneidet das Schaubild K von f in P und die schiefe Asymptote in Q. Untersuche den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ.

c) An welcher Stelle x > 0 ist f(x) = 3? Bestimme x mit einem Näherungsverfahren.

d) P (u I v) sei ein Kurvenpunkt mit u < 0.
Die Tangente in P schneidet die beiden Asymptoten in R und T.
Berechne den Inhalt des Dreiecks RTV.

e) Welche Parallelen zur schiefen Asymptote haben mit der Kurve K wie viele Punkte gemeinsam?

Aufgabe 313 $f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x-8}{4x^2}$

a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte.
Zeichne das Schaubild für $-6\le x\le 6$ (y-Achse - 8 bis 8)

b) Berechne die x-Koordinaten der Punkte B_1 und B_2, in denen die Tangente die Eigenschaft hat, die y-Achse in $Z(0\,|\,1)$ zu schneiden.

c) Welche Parallelen zur 1. Winkelhalbierenden schneiden / berühren die das Schaubild K von f?

Aufgabe 314 $f(x)=\frac{-x^3-2x^2+16}{2x^2}$

a) Bestimme Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K für $-6\le x\le 6$.

b) Berechne die Kurven Punkte B, in denen die Tangente die y-Achse in $Z(0\,|\,5)$ schneidet.

c) Zeige, dass das Schaubild schrägsymmetrisch zur y-Achse ist.

d) Die Gerade x = r (r > 2) schneidet K in P und die schiefe Asymptote in Q. Diese Gerade begrenzt zusammen mit der schiefen Asymptote, der Kurve K und der x-Achse eine Fläche mit den Eckpunkten PQN_1N_2. Berechne den Inhalt A(r) sowie deren Grenzwert für $r\to\infty$.
In welchem Verhältnis teilt die Gerade x = 2 die Gesamtfläche?

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1
(b) Nenner mit Summe

Aufgabe 321 $f(x)=\frac{x^2-x+4}{2x-2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 322 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-9}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 331 $f(x)=\frac{x^3-x^2-4}{(x+1)^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 335 $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x^2+4}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 341 $f(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}$

a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K.

b) Zeige, dass das Schaubild K zum Schnittpunkt der Asymptoten symmetrisch ist.

c) Berechne den Schnittpunkt von K mit der Kurve $y=\frac{5}{x}$ mit dem Newtonschen Näherungsverfahren.

d) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > -2$ schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u.
Interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 342 $f(x)=\frac{x^3}{3(x-1)^2}$ (Abitur 1992, BW)

a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichne K samt Asymptoten für $-6 \le x \le 6$ mit LE 1 cm.

b) Das Schaubild K, die Geraden $x = 2$, $x = v$ mit $v > 2$ und $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ begrenzen ein Flächenstück. Berechne dessen Inhalt A(v).
Untersuche das Verhalten von A(v) für $v \to \infty$.

c) Die Tangente an K in einem Kurvenpunkt $P(a\,|\,f(a))$ mit $a > 1$ schneidet die y-Achse in $S(0\,|\,\frac{3}{2})$. Beweise, dass dies für $a \in \,]\,4\,;\,5\,[$ mindestens einmal passiert.

d) Gegeben ist die Integralfunktion H durch $H(x)=\int_0^x \frac{f(-t)+f(t)}{t^2+1}\,dt$ für $-1<x<1$

Beweise, dass H monoton ist. Untersuche, ob sogar strenge Monotonie vorliegt.

Aufgabe 343

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$$

a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K im Bereich $-4 \le x \le 5$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) $P(u \,|\, f(u))$ liegt auf der Kurve K mit u > 1. Die Parallele zur senkrechte Asymptote durch P schneidet die schräge Asymptote in R. Die Parallele zur schrägen Asymptote durch P schneidet die senkrechte Asymptote in Q. Der Asymptotenschnittpunkt ist S.
Berechne den Inhalt des Parallelogramms PQRS. Deute das Ergebnis.

c) Zeige, dass das Schaubild K punktsymmetrisch zum Punkt $S(1 \,|\, 0)$ ist.

d) K begrenzt mit den Koordinatenachsen im 2. Feld ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt.

Zusatzaufgabe für CAS-Rechner:

e) Die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt $B(u \,|\, f(u))$ mit u > 1 schneidet die Asymptoten in C und D. S sei deren Schnittpunkt.

Für welche Lage des Punktes B nimmt das Dreieck DCS einen extremen Inhalt an?
Berechne seine Größe.

Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2
(a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 411 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}=\frac{x^3+2}{2x}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 421 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{x^4+2}{2x^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 422 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x^2}=\frac{x^4-2}{2x^2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2
(b) Nenner mit Summe

Aufgabe 431 $f(x)=\frac{x^3}{8x+16}=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{x+2}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 432 $f(x)=\frac{x^4-8x^2+16}{2\left(x^2+8\right)}=\frac{1}{2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^2+4}$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 441 $f(x)=\frac{x^3+3x^2}{3(x-1)}$ (Abitur 1993 – BW)

a) Bestimme die gemeinsamen Punkte von K mit der x-Achse und ihre Extrempunkte.
Welche Asymptoten hat K ? Bestimme die Näherungskurve G für $|x|\to\infty$.
Zeichne K mit den Asymptoten und der Näherungskurve für $-6\geq x\geq 4$ und $-4\geq y\geq 13$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) K besitzt genau einen Wendepunkt. Beweise, dass dieser im Intervall $U=[-1;0]$ liegt.
Berechne seine x-Koordinate mit dem Newtonschen Näherungsverfahren auf 2 Dezimalen genau.

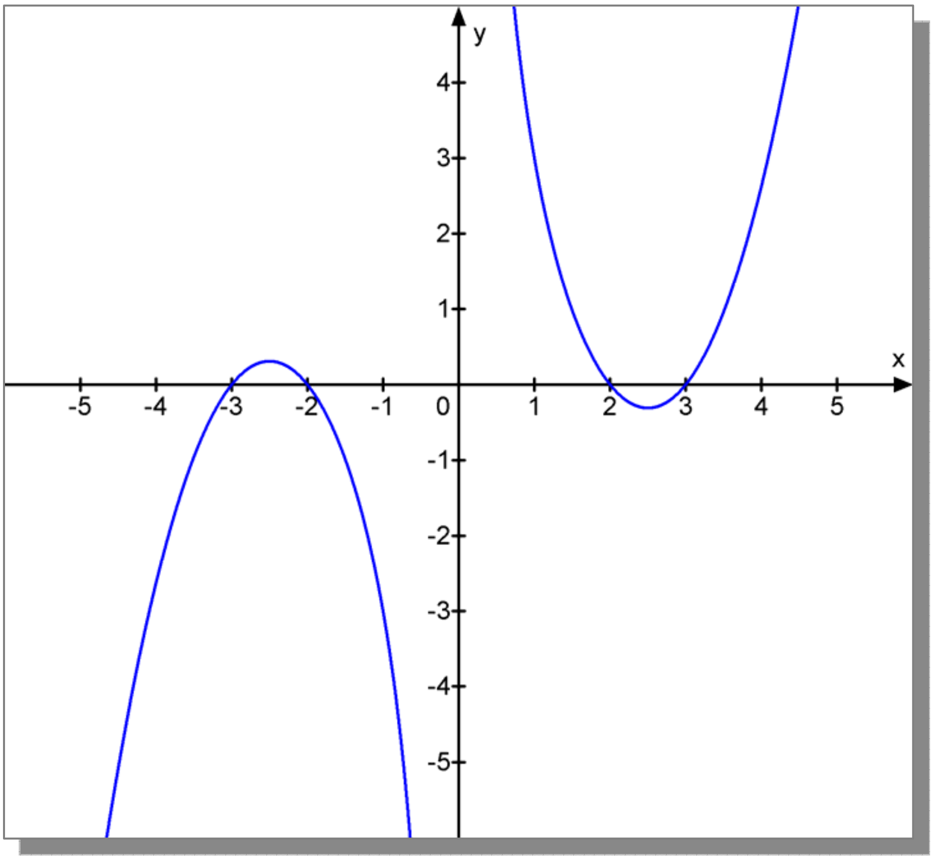
c) Im 3. Feld begrenzen K und die x-Achse ein Flächenstück. Berechne dessen Inhalt A.

Typ 5 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 3

Aufgabe 511

$$f(x) = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x}$$

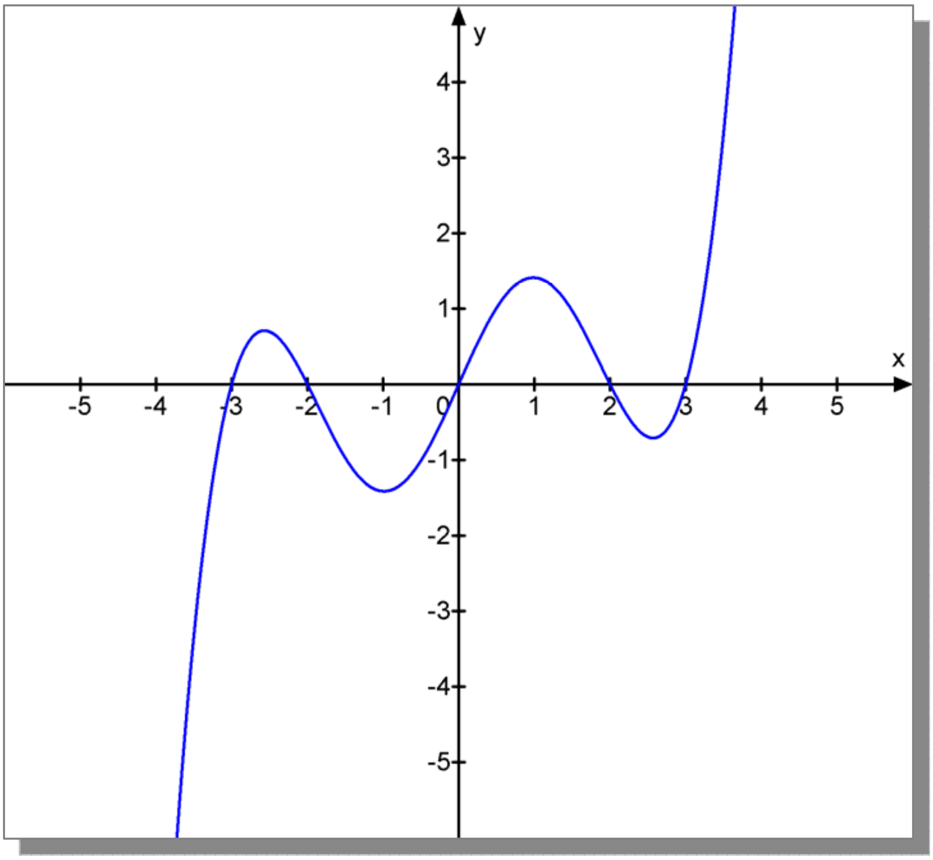
Noch ohne Lösung



Aufgabe 512

$$f(x)=\frac{x^5-13x^3+36x}{x^2+16}$$

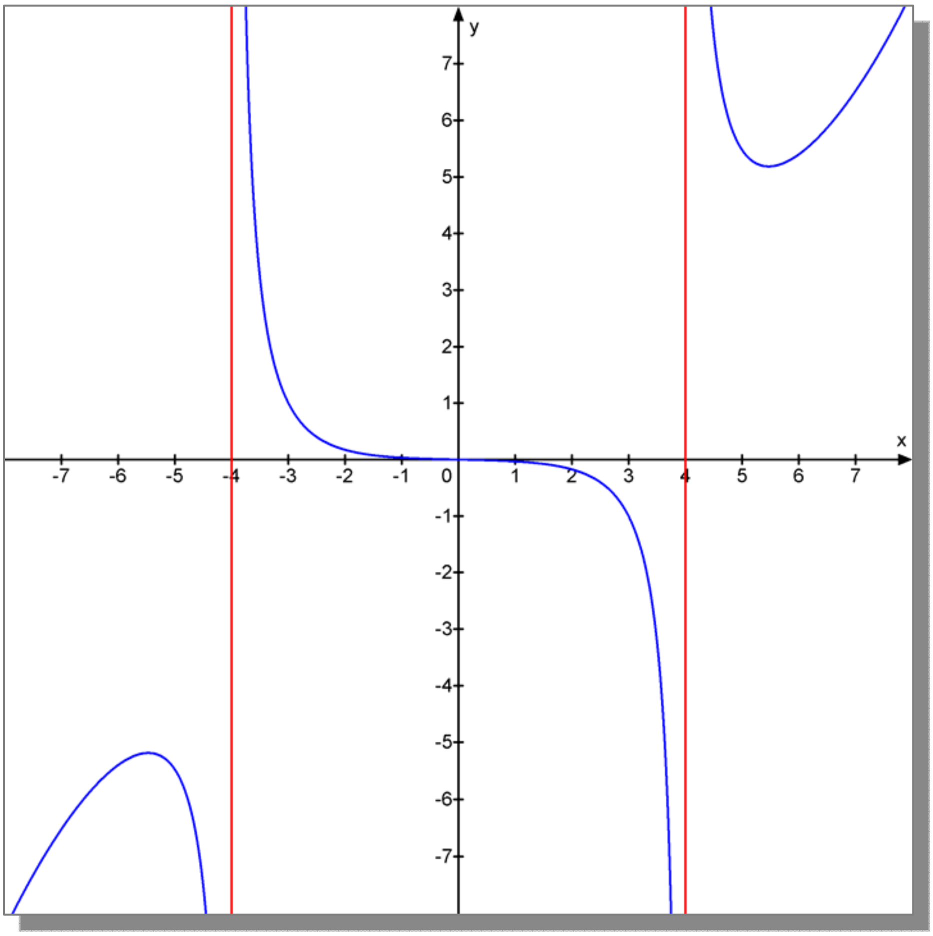
Noch ohne Lösung



Aufgabe 513

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot \frac{x^5 + 13x^3 + 36x}{x^2 - 16}$$

Noch ohne Lösung



Typ 6 Betragsfunktionen

Aufgabe 611

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - 3\frac{|x|}{x^2 - 4}$$

a) Stelle f ohne Verwendung der Betragsstriche dar. Gib den maximalen Definitionsbereich an.
Bestimme die Asymptoten des Schaubilds K von f.
Untersuche K für $x \neq 0$ auf Punkte mit waagrechter Tangente. (Es genügt, die Koordinaten auf zwei Dezimalen zu runden).

b) Untersuche f auf Differenzierbarkeit an der Stelle x = 0.
Zeige, dass f bei x = 0 ein relatives Minimum hat.
Zeichne K uns die Asymptoten für $-7 \leq x \leq 7$ (Längeneinheit 1cm).

c) Zeige, dass K im Intervall $[2{,}1; 3]$ genau einen Punkt Q mit der x-Achse gemeinsam hat.
Berechne einen Näherungswert für die Abszisse von Q mit Hilfe des Newtonschen Iterationsverfahrens auf 3 Dezimalen genau.

d) K wird im Bereich $4 \leq x \leq 7$ an der Geraden y = 3 gespiegelt.
Das Spiegelbild sei K*. Bestimme eine Funktionsgleichung für K*.
Die Schaubilder K, H* und die Gerade x = 7 begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Lösungen

Lösung 141

$f(x)=\frac{2}{(1+2x)^2}$

a) **Grundeigenschaften:**

Zähler = 0: Keine Lösung, Zähler ist konstant.

Nenner = 0: $(1+2x)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$ doppelte Lösung.

Auswertung:

Nullstelle $(Z=0 \text{ und } N\neq 0)$: keine

Schnittpunkt mit der x-Achse: keine

Polstelle: $x=-\frac{1}{2}$ ohne Zeichenwechsel

Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$.

Asymptoten: senkrecht: $x=-\frac{1}{2}$ (Polstelle)

waagrecht: $y=0$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1+4x+4x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4}=0$

Ableitungen: $f(x)=\frac{2}{(1+2x)^2}=2\cdot(1+2x)^{-2}$

$f'(x)=-4\cdot(1+2x)^{-3}\cdot 2=-8(1+2x)^{-3}=-\frac{8}{(1+2x)^3}$

$f''(x)=24\cdot(1+2x)^{-4}\cdot 2=\frac{48}{(1+2x)^4}$

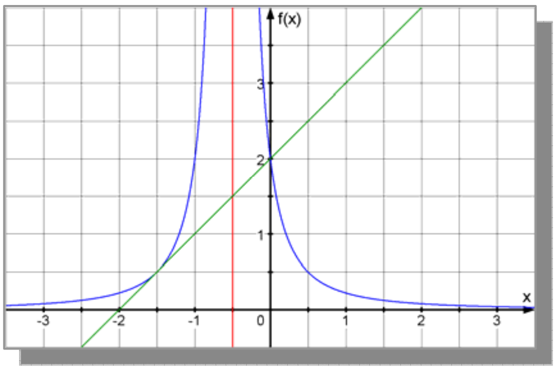
Auswertung:

Da f' keine Nullstellen besitzt,

hat K keine Extrempunkte.

Da f" keine Nullstellen hat,

besitzt K keine Wendepunkte.



b) K schneidet die y-Achse in P.

Eine Gerade durch P berührt K in $B(x_B\mid y_B)$

mit $y_B<-\frac{1}{2}$. Berechne die Koordinaten von B.

Es sei $B(x_B\mid y_B)$ der gesuchte Berührpunkt.

Die Tangente in B hat diese Gleichung: $y-f(x_B)=f'(x_B)(x-x_B)$

$$y-\frac{2}{(1+2x_B)^2}=-\frac{8}{(1+2x_B)^3}(x-x_B)$$

Diese Tangente soll durch den Punkt $P(0\mid 2)$ gehen, also gilt:

$$\frac{2(1+2x_B)^2-2}{(1+2x_B)^2}=\frac{8x_B}{(1+2x_B)^3}$$

$$\frac{2(1+4x_B+4x_B^2)-2}{(1+2x_B)^2}=\frac{8x_B}{(1+2x_B)^3}$$

$$\frac{8x_B + 8x_B^2}{(1+2x_B)^2} = \frac{8x_B}{(1+2x_B)^3} \quad | \cdot (1+2x_B)^3$$
$$(8x_B + 8x_B^2)(1+2x_B) = 8x_B$$
$$8x_B + 8x_B^2 + 16x_B^2 + 16x_B^3 = 8x_B$$
$$24x_B^2 + 16x_B^3 = 0$$
$$8x_B^2(3+2x_B) = 0$$

1. Lösung $x_B = 0$ (scheidet laut Aufgabe aus)

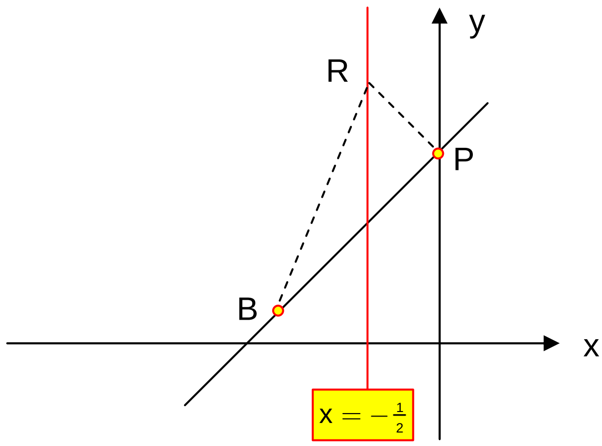
2. Lösung $x_B = -\frac{3}{2}$. $\qquad f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ergebnis: $B\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$ ist der gesuchte Berührpunkt..

Nicht verlangt war die Gleichung dieser Tangente. Sie lautet jedoch $y = x + 2$.

Bestimme die Punkte der Geraden $x = -\frac{1}{2}$, von denen aus die Strecke BP unter einem rechten Winkel erscheint.

Lösung



R sei der gesuchte Punkt auf der Geraden $x = -\frac{1}{2}$, so dass RB und RP orthogonal sind.

Ansatz: $R\left(-\frac{1}{2} \mid r\right)$, $B\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$, $P(0 \mid 2)$

Steigung der Strecke BR:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = r - \frac{1}{2}$$

Steigung der Strecke RP:

$$m_2 = \frac{2-r}{\frac{1}{2}} = 4 - 2r$$

Bedingung für Orthogonalität: $m_1 \cdot m_2 = -1$

d.h. $\left(r - \frac{1}{2}\right)(4 - 2r) = -1$

$$4r - 2 - 2r^2 + r = -1$$
$$-2r^2 + 5r - 2 = -1$$

Umformen: $2r^2 - 5r + 1 = 0$

mit $r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \approx \begin{cases} 2{,}28 \\ 0{,}22 \end{cases}$

Ergebnis: Die gesuchten Punkte (es gibt also 2) sind $R_1(-0{,}5 \mid 2{,}28)$ und $R_2(-0{,}5 \mid 0{,}22)$.

Definition der Funktion f

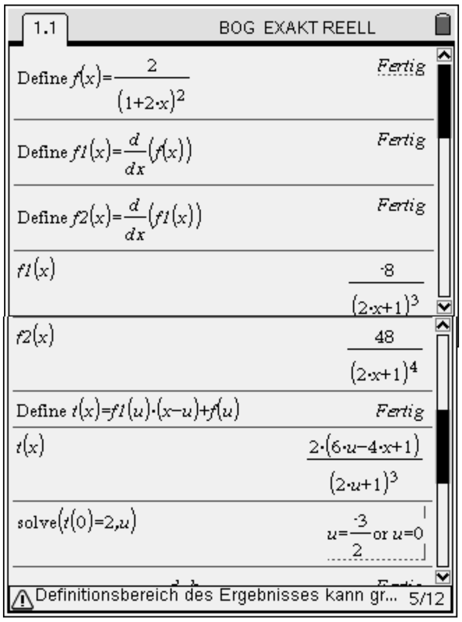
und ihrer beiden Ableitungen

Anzeige der Ableitungen

Definition der Tangentenfunktion t

und Anzeige von t(x)

Die Bedingung, dass die Tangente durch $P(0\,|\,2)$ gehen soll führt zu $u = -\frac{3}{2}$.



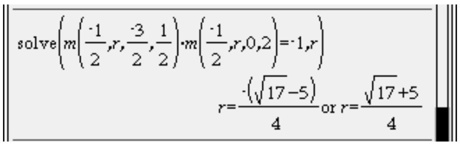
Definition einer Geradensteigungsfunktion durch zwei Punkte $(a\,|\,b), (c\,|\,d)$.

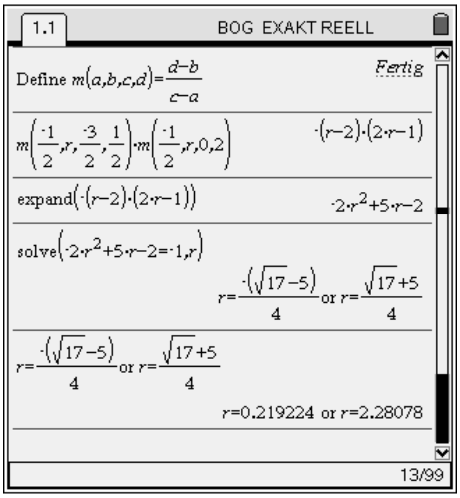
$m_{RB} \cdot m_{RP}$ berechnen

und umformen (zum Vergleich mit der Rechnung)

Lösen der Orthogonalitätsbedingung $m_{RB} \cdot m_{RP} = -1$.

Hinweis. Man hätte dies in einer Zeile tun können:





Drehkörper-Volumen: