Anwendungsaufgaben

Analysis

Gebrochen rationale Funktionen

Aufgabensammlung

Teilweise Abituraufgaben

Wird fortgesetzt …

Die Lösungen stammen alle vom Autor dieses Heftes

Datei 43200

Stand: 8. April 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Weitere Aufgaben folgen ab jetzt monatlich

Es handelt sich um Abituraufgaben, die durch Zusatzfragen ergänzt worden sind. Ausführliche Behandlung verschiedener Lösungswege, stets auch mit CAS-Einsatz.

Aufgabe 803

(Abitur 2007 – BW – ergänzt durch viele Zusatzaufgaben – ideale Projektaufgabe)

Die Herstellungskosten eines neuen Rheumamittels werden durch eine Funktion f mit

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+5},\quad x\in\mathbb{R}_0^+.$$

modellhaft kalkuliert.
Hierbei gibt f(x) die Kosten in 10.000 € für die x-te Produktionseinheit an, wobei die Einheiten nacheinander produziert werden.
Die fünfte Produktionseinheit kostet in der Herstellung 950.000 €, die zwanzigste nur noch 560.000 €.

a) Bestimmen Sie a und b. Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Weisen Sie nach, dass die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit im Laufe der Zeit sinken. Ab der wievielten Produktionseinheit sind die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit geringer als 400.000 €?
Mit welchen Herstellungskosten für eine Produktionseinheit muss man langfristig rechnen?

(Teilergebnis: $f(x)=\frac{30x+800}{x+5}$). (7 VP)

b) Ab der wievielten Produktionseinheit unterscheiden sich die Herstellungskosten von zwei aufeinanderfolgenden Produktionseinheiten um weniger als 10.000 €?

Jede Produktionseinheit besteht aus 10.000 Packungen. Wie hoch muss der Verkaufspreis für eine Packung sein, damit die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihren Herstellungskosten entsprechen? (5 VP)

Bei klinischen Studien wird dieses Rheumamittel Patienten, die den Wirkstoff bisher nicht im Blut hatten, zugeführt und die Menge des Wirkstoffs im Blut gemessen.

c) Ein Patient erhält alle 6 Stunden eine Spritze mit 50 mg Wirkstoff. Bis zur nächsten Spritze hat der Körper 18% des im Blut vorhandenen Wirkstoffs abgebaut.
Beschreiben Sie mittels einer rekursiv definierten Folge, wie viel Wirkstoff sich jeweils direkt nach Verabreichung einer Spritze im Blut befindet.
Welche Wirkstoffmenge befindet sich direkt nach der fünften Spritze im Blut?
In welchem Bereich schwankt die Wirkstoffmenge im Blut langfristig?
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der im Blut vorhandenen Wirkstoffmenge für die ersten 24 Stunden.

<u>Zusatzaufgaben:</u>

(1) Welche Exponentialfunktionen beschreiben die fallenden Teilkurven?

(2) Stellen Sie eine explizite Bildungsvorschrift für die Folge a_n auf, welche die Wirkstoffmaxima im Blut beschreibt. Ergebnis: $a_n=277{,}78\cdot\left(1-0{,}82^{n+1}\right)$

(3) Zeigen Sie dass die Funktion $h(t)=277{,}78\left(1-0{,}82^{t+1}\right)$ die Differenzialgleichung für beschränktes Wachstum erfüllt. Was besagt diese Differenzialgleichung?

(4) Berechne die ersten 20 Glieder der Folge a_n mit einem CAS-Rechner.
Erstelle daraus mittels Regression den Funktionsterm für h(t) aus (3).

(5) Ein Patient soll von diesem Wirkstoff maximal 200 mg im Blut haben. Nach der wievielten Injektion ist diese Grenze überschritten? Der behandelnde Arzt möchte daher zu diesem Zeitpunkt die folgende Injektion so lange hinauszögern, bis gesichert ist, dass die Folgeinjektion einen neuen Wirkstoffgehalt von 200 mg ergibt. Berechne den Zeitpunkt der neuen Injektion. In welchem Rhythmus darf der Arzt spritzen, wenn er jedes Mal 200 mg erreichen will?

Welchen gleichförmigen Injektionsrhythmus können Sie vorschlagen, der diese Obergrenze respektiert?

Lösung 803

a) Gesucht ist die Funktion $f(x)=\frac{ax+b}{x+5}$, wobei 2 Wertepaare („Zustandspunkte") gegeben sind:

$f(5)=95$ eingesetzt: $\frac{5a+b}{10}=95 \Leftrightarrow 5a+b=950$ (1)

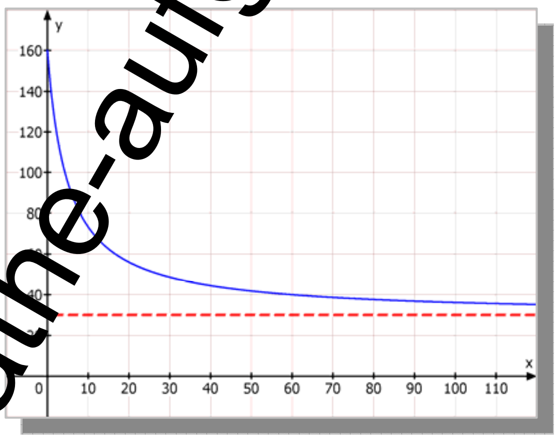
$f(20)=56$ eingesetzt: $\frac{20a+b}{25}=56 \Leftrightarrow 20a+b=1400$ (2).

Elimination von b durch: (2) – (1): $15a=450$ | :15

$a=30$

Eingesetzt in (1): $5\cdot 30+b=950 \Rightarrow b=950-150=800$.

Ergebnis: $f(x)=\frac{30x+800}{x+5}$.



x ist die Nummer der Produktionseinheit,

y hat die Einheit 10.000 €.

Die Abnahme bedeutet streng monoton abnehmend. Dazu muss man zeigen, dass $f'(x)<0$ *ist für* $x\geq 0$.

Ableitungsfunktion:

$$f'(x)=\frac{30\cdot(x+5)-1\cdot(30x+800)}{(x+5)^2}=\frac{30x+150-30x-800}{(x+5)^2}=\frac{-650}{(x+5)^2}.$$

Weil der Nenner stets positiv ist und der Zähler konstant negativ, hat $f'(x)$ stets negative Werte.

Also fällt f streng monoton, die Produktionskosten nehmen also ab.

Ab wann sind die Herstellungskosten geringer als 400.000 €?

$$f(x)<40 \Leftrightarrow \frac{30x+800}{x+5}<40$$

$30x+800<40\cdot(x+5)$

$30x+800<40x+200$

$30x+800<40x+200$

$600<10x$

$60<x$ bzw. $x>60$.

Ergebnis: Ab der 61. Produktionseinheit liegen die Herstellungskosten unter 400.000 €.

Die langfristige Entwicklung berechnet man durch diesen Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{30x+800}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{30+\frac{800}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\frac{30}{1}=30$$

Ergebnis: Langfristig muss man mit 300.000 € Herstellungskosten rechnen.

b) Die Differenz zweier aufeinander folgenden Produktionseinheiten wird so berechnet:

$$f(x)-f(x+1)=\frac{30x+800}{x+5}-\frac{30(x+1)+800}{(x+1)+5}=\frac{30x+800}{x+5}-\frac{30x+830}{x+6}$$

$$f(x)-f(x+1)=\frac{(30x+800)\cdot(x+6)-(30x+830)(x+5)}{(x+5)(x+6)}$$

$$f(x)-f(x+1)=\frac{30x^2+180x+800x+4800-\left[30x^2+150x+830x+4150\right]}{(x+5)(x+6)}$$

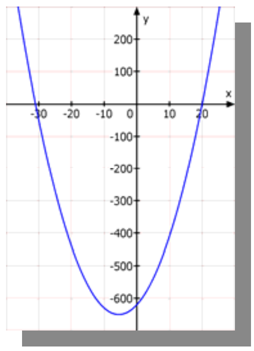
$$f(x)-f(x+1)=\frac{\cancel{30x^2}+180x+800x+4800-\cancel{30x^2}-150x-830x-4150}{(x+5)(x+6)}$$

$$f(x)-f(x+1)=\frac{650}{(x+5)(x+6)}$$

Bedingung: $f(x)-f(x+1)<1 \Leftrightarrow \frac{650}{(x+5)(x+6)}<1 \Leftrightarrow 650<x^2+11x+30 \Leftrightarrow x^2+11x-620>0$

Zur Lösung der quadratischen Ungleichung untersucht man z. B. die Hilfsparabel:

$$h(x)=x^2+11x-620$$



Sie ist nach oben geöffnet und hat diese beiden Nullstellen:

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121+4\cdot 620}}{2}=\frac{-11\pm\sqrt{2601}}{2}=\frac{-11\pm 51}{2}=\begin{cases}20\\-31\end{cases}$$

Daher hat sie zwischen ihren Nullstellen negative Werte und im Außenbereich positive Werte. Weil hier $x \geq 0$ gilt folgt: $h(x)>0$ für $x>20$.

Und weil x im Grunde natürliche Zahlen sind, lautet das

Ergebnis: Ab x = 21 ist der Kosten-Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Produktionseinheiten kleiner als 10.000 €.

Eine Lösung mit einem Grafikrechner oder einem CAS-Rechner ist selbstverständlich auch möglich.

Berechnung der Herstellungskosten für die ersten 100 Produktionseinheiten.

$$K(100)=\int_{0,5}^{100,5} f(x)\,dx \approx 4920{,}08$$ (Siehe Folgeseite!)

Also belaufen sich diese Herstellungskosten auf $4920\cdot 10.000 = 49.200.000$ €.

Manuelle Berechnung dieses Integrals:

$$K(100)=\int_{0,5}^{100,5}\frac{30x+800}{x+5}\,dx$$

Vereinfachung durch Substitution: $u=x+5 \Rightarrow du=1\cdot dx=dx$

Ersetzung des Zählers: $x=u-5$

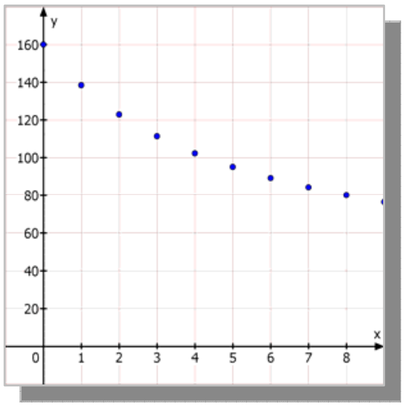
Umrechnung der Grenzen: $x=0,5 \Rightarrow u=5,5$ und $x=100,5 \Rightarrow u=105,5$

$$K(100)=\int_{0,5}^{100,5}\frac{30x+800}{x+5}\,dx=\int_{5,5}^{105,5}\frac{30(u-5)+800}{u}\,du=\int_{5,5}^{105,5}\frac{30u+650}{u}\,du=\int_{5,5}^{105,5}\left(30+\frac{650}{u}\right)du$$

$$K(100)=\left[30u+650\cdot\ln|u|\right]_{5,5}^{105,5}=30\cdot[105,5-5,5]+650\cdot[\ln 105,5-\ln 5,5]$$

$$K(100)=30\cdot 100+650\cdot\ln\frac{105,5}{5,5}\approx 40920,07589...$$

Begründung für den Ansatz dieses Integrals:



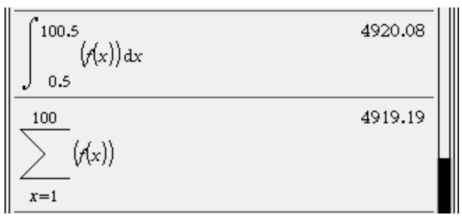
Die Funktion f ist eine stetige Funktion, die modellhaft die Produktionskosten angibt.

Da es aber nur für ganzzahlige x Produktionskosten gibt, liegt in Wirklichkeit eine Punktfolge vor.

Die Produktionskosten für jedes x kann man dann durch ein Rechteck der Breite 1 und der Höhe f(x) darstellen. So entsteht die in der nächsten Abbildung dargestellte Rechtecksfläche. Sie stimmt grob mit der Fläche zwischen dem Schaubild von f(x) und der x-Achse überein.

Diese aber hat (hier) ihren linken Rand bei 0,5 und den rechten bei 5,5. In der Aufgabe ist der rechte Rand daher bei 100,5. Die linken und rechten Grenzen ragen somit um 0,5 nach links und rechts über das Intervall $[1;100]$ hinaus.

Man kann die Güte dieser Integralberechnung mit einem CAS-Rechner vergleichen. Mit ihm kann man alle 100 Rechtecke aufsummieren lassen und das Ergebnis mit dem Integrationsergebnis vergleichen:



Wenn die Herstellungskosten für die ersten 100 Produktionseinheiten $4920 \cdot 10.000 = 49.200.000$ € sind, und jede Einheit aus 10.000 Packungen besteht, dann entfallen in dieser Serie auf eine Packung durchschnittlich

$$\bar{k} = \frac{4920 \cdot 10.000}{100 \cdot 10.000} = 49{,}20 \,(€)$$

(Denn in dieser Serie wurden ja $100 \cdot 10.000$ Packungen produziert.

So groß muss also der Verkaufspreis mindestens sein, damit die Firma Gewinn erzielt.

c) Die Injektion des Rheumamittels hat eine exponentielle Abnahme des Wirkstoffes zur Folge. Eine Abnahme um 18% in der Zeitspanne $\Delta t = 6$ (h) führt zu einem Abnahmefaktor von $q = 1 - p = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$. Es gibt nun 2 Zahlenfolgen: a_n gibt den Wirkstoffgehalt im 6-Stundenraster jeweils direkt nach der Injektion an, b_n gibt den Wirkstoffgehalt im 6-Stundenraster jeweils direkt vor der nächsten Injektion an.

Wertetabelle der Folge b_n	**Wertetabelle der Folge a_n.**
$b_0 = 0$ Zuerst war kein Wirkstoff im Blut.	$a_0 = 50$ Anfangswert nach der 1. Spritze.
$b_1 = 50 \cdot 0{,}82 = 41$ Nach 6 h 18% weniger.	$a_1 = 50 \cdot 0{,}82 \boxed{+50} = 91$ Neue Injektion ergibt +50.
$b_2 = 91 \cdot 0{,}82 = 74{,}62$	$a_2 = 91 \cdot 0{,}82 \boxed{+50} = 124{,}62$
$b_3 = 124{,}62 \cdot 0{,}82 = 102{,}1884$	$a_3 = 124{,}62 \cdot 0{,}82 \boxed{+50} = 152{,}1884$
$b_4 = 152{,}1884 \cdot 0{,}82 \approx 124{,}79$	$a_4 = 152{,}1889 \cdot 0{,}82 \boxed{+50} \approx 174{,}79$
	Dies ist der gesuchte Wert nach der 5. Spritze: Also etwa 175 mg.

Man erkennt sehr schön die Berechnungsabfolge für a_n:

$$\boxed{a_0} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_1} \xrightarrow{+50} \boxed{a_1} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_2} \xrightarrow{+50} \boxed{a_2} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_3} \xrightarrow{+50} \boxed{a_3} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_4} \xrightarrow{+50} \boxed{a_4}$$

bzw. mit Zahlen:

$$\boxed{50} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_1} \xrightarrow{+50} \boxed{91} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_2} \xrightarrow{+50} \boxed{124{,}62} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_3} \xrightarrow{+50} \boxed{152{,}19} \xrightarrow[\cdot 0{,}82]{} \boxed{b_4} \xrightarrow{+50} \boxed{174{,}79}$$

Rekursive Bildungsvorschrift der Folge a_n:

$$\boxed{a_0 = 50 \qquad \text{zusammen mit} \quad a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}82 + 50}$$

Hinweis: *Man liest ab und zu die Formulierung: „Rekursive Folge". Dies ist natürlich Unsinn. Eine Folge kann nicht rekursiv sein, denn wenn man nur die Werte der Folge anschaut, dann erkennt man ja nicht, ob diese rekursiv (also jeweils aus dem Vorgänger) berechnet worden sind oder explizit, also aus einem Funktionsterm. Lediglich die Bildungsvorschrift kann rekursiv sein!*

Die Frage nach der langfristigen Entwicklung ist im Grunde die Frage nach dem **Grenzwert** dieser Folge a_n. Man kann diesen hier durch eine sachliche Überlegung finden:

Der Wirkstoffgehalt hat sein Maximum erreicht, wenn in den 6 Folgestunden gerade diese Menge abgebaut wird, die dann wieder durch die Injektion zugeführt wird, also 50 mg.

Bezeichnen wir den Maximalwert des Wirkstoffgehalts als a*, dann bedeutet dies, dass die nach 6 Stunden noch vorhandene Menge $a^* \cdot 0{,}82$ durch die Injektion um 50 mg erhöht wird, aber dadurch wieder a* entsteht. Dies heißt:

$$\begin{aligned}
a^* &= a^* \cdot 0{,}82 + 50 \qquad && | - \; a^* \cdot 0{,}82 \\
a^* - a^* \cdot 0{,}82 &= 50 && \\
a^* \left(1 - 0{,}82\right) &= 50 && \\
a^* \cdot 0{,}18 &= 50 && (*) \\
a^* &= \frac{50}{0{,}18} \approx 277{,}78 &&
\end{aligned}$$

Man hätte auch den Ansatz so machen können:

Der Grenzwert a* ist dann „erreicht", wenn die Wirkstoffabnahme, und das ist $a^* \cdot 0{,}18$, genau so groß ist wie die Wirkstoffzufuhr 50 (mg). Dies entspricht der Gleichung (*).

Hinweis:

Ich habe das Wort „erreicht" in Anführungszeichen gesetzt, weil streng mathematisch eine Folge niemals ihren Grenzwert erreicht sondern sich ihm asymptotisch nähert.

Rundet man jedoch (was in der medizinischen Praxis natürlich der Fall ist, weil man nicht beliebig feine Messungen durchführen kann), dann wird dieser Grenzwert sehr wohl „erreicht".

Die langfristige Schwankung im Blut bewegt sich dann zwischen diesem Maximalwert von gerundeten 278 mg und $278\text{ mg} \cdot 0{,}82 \approx 228\text{ mg}$ vor der nächsten Injektion.

Zusätze:

(1) Welche Exponentialfunktionen beschreiben die fallenden Teilkurven?

1. Methode: Verwendung der Abnahmefunktion $f_1(x) = C_1 \cdot e^{k \cdot t}$ (Basis e)

Die **1. Teilfunktion** ist eine exponentielle Abnahmefunktion mit der Gleichung $f_1(t) = C_1 \cdot e^{k \cdot t}$.
Zur Bestimmung der beiden Konstanten benötigt man zwei Punkte:

$P_1(0|50)$: $f_1(0) = 50$ ergibt: $C_1 = 50$ (Startwert!)

$P_2(6|50 \cdot 0{,}82)$ $f_1(6) = 50 \cdot 0{,}82$ ergibt: $50 \cdot e^{6k} = 50 \cdot 0{,}82$

$$e^{6k} = 0{,}82$$

$$6k = \ln 0{,}82$$

$$k = \frac{\ln 0{,}82}{6} \approx -0{,}033$$

Ergebnis: $f_1(t) = 50 \cdot e^{-0{,}033 \cdot t}$ mit $0 \le t < 6$

2. Methode: Verwendung der Abnahmefunktion $f_1(x) = C_1 \cdot b^t$.

Die **1. Teilfunktion** ist eine exponentielle Abnahmefunktion mit der Gleichung $f_1(t) = C_1 \cdot b^t$.
Zur Bestimmung der beiden Konstanten benötigt man zwei Punkte:

$P_1(0|50)$: $f_1(0) = 50$ ergibt: $C_1 = 50$ (Startwert!)

$P_2(6|50 \cdot 0{,}82)$ $f_1(6) = 50 \cdot 0{,}82$ ergibt: $50 \cdot b^t = 50 \cdot 0{,}82$

$$b^6 = 0{,}82$$

$$b = \sqrt[6]{0{,}82} \approx 0{,}967465....$$

Ergebnis: $f_1(t) = 50 \cdot 0{,}967^t$ mit $0 \le t < 6$

Umrechnung dieser Abnahmefunktionen ineinander:

$f_1(t) = 50 \cdot e^{-0{,}033 \cdot t}$ **soll übergehen in die Form** $f_1(t) = 50 \cdot b^t$

Dann muss gelten: $b^t = e^{-0{,}033 \cdot t}$

$$b^t = \left(e^{-0{,}033}\right)^t$$

Also ist $b = e^{-0{,}033} \approx 0{,}967...$

Oder:

$f_1(t) = 50 \cdot 0{,}967^t$ **soll übergehen in die Form** $f_1(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t}$

Dann muss gelten: $e^{k \cdot t} = 0{,}967^t$

$\left(e^k\right)^t = 0{,}967^t$ bzw. $e^k = 0{,}967$.

Also ist $k = \ln 0{,}967 \approx -0{,}0335...$

Bestimmung der 2. Teilfunktion (nach der 2. Injektion):

Die 2. Teilfunktion ist ebenfalls eine fallende Exponentialfunktion. Man kann für sie auch den Ansatz $f_2(t) = C_2 \cdot e^{rt}$ machen. Jetzt aber ist C_2 kein Wert der Folge a_n, denn C_2 stellt ja den Wert dieser Funktion für $t = 0$ dar, auch wenn diese Funktion nur für $6 \le t < 12$ gebraucht wird.

1. Methode: Bestimmung der beiden Konstanten mit zwei Zustandspunkten:
(Ich bleibe bei der Basis e).

$Q_1(6 \mid 91)$: $\quad f_2(6) = C_2 \cdot e^{6 \cdot r}$ ergibt $\quad 91 = C_2 \cdot e^{6r}$ (1)

$Q_2(12 \mid 91 \cdot 0{,}82)$ $\quad f_2(12) = C_2 \cdot e^{12 \cdot r}$ ergibt $\quad 91 \cdot 0{,}82 = C_2 \cdot e^{12r}$ (2)

Elimination von C_2 durch Division $\frac{(2)}{(1)}$: $\quad \frac{91 \cdot 0{,}82}{91} = \frac{C_2 \cdot e^{12r}}{C_2 \cdot e^{6r}}$

$0{,}82 = e^{6r}$ (3)

Das ergibt wie oben $\quad r \approx -0{,}033$.

Dies sollte nicht verwundern, denn wir haben ja dieselbe prozentuale Abnahme!

Berechnung von C_2 durch Einsetzen von (3) in (1): $\quad 91 = C_2 \cdot 0{,}82$

$$C_2 = \frac{91}{0{,}82} = 110{,}9756$$

Ergebnis: $\quad f_2(t) = 110{,}9756 \cdot e^{-0{,}033 \cdot t}$ mit $0 \le t < 6$

2. Methode: Erzeugung dieser Funktion durch eine Zeitverschiebung.

Wir denken uns die Uhr erst ab der 2. Spritze laufen. Dann können wir die 1. Funktion mit angepasster Startmenge verwenden und verschieben dann die Kurve um 6 nach rechts (t-6) statt t.

$$f_2(t) = a_1 \cdot e^{-0{,}033 \cdot t} = 91 \cdot e^{-0{,}033 \cdot t}$$

Diese Funktion verwendet eine Zeitmessung, deren Nullpunkt der Moment der 2. Injektion ist.

Da dieser Zeitpunkt jedoch (idealisiert) 6 Stunden nach der 1. Spritze liegt, muss man für eine einheitliche Zeitachse die „Kurve“ um 6 nach rechts verschieben: (Weiter rechts bedeutet „später“):

$$f_2(t) = a_1 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-6)} = 91 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-6)}.$$

Bestimmung der weiteren Teilfunktionen:

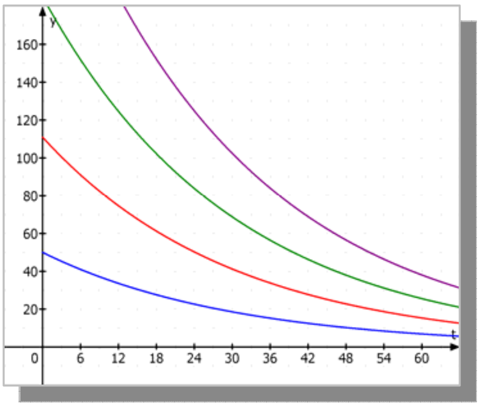
Die 3. Funktion wird dann $\quad f_3(t) = a_2 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-12)} = 124{,}62 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-12)}$

4. Funktionsterm: $\quad f_4(t) = a_3 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-18)} = 152{,}2 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-18)}$

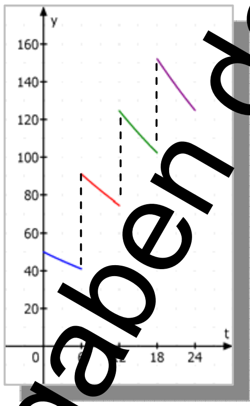
5. Funktionsterm: $\quad f_5(t) = a_4 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-24)} = 174{,}79 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-24)}$

6. Funktionsterm: $\quad f_6(t) = a_5 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-30)} = 193{,}33 \cdot e^{-0{,}033 \cdot (t-30)}$

Hier diese 4 Schaubilder für $x \geq 0$:



Und dann die Funktionen abschnittsweise:



Jeder Hochpunkt beschreibt den Wirkstoffgehalt nach einer neuen Injektion.

(2) Aufstellen einer expliziten Bildungsvorschrift für die Folge a_n.

Aus der Lösung der Aufgabe kennen wir bereits die rekursive Vorschrift:

$$\boxed{a_0 = 50 \qquad \text{zusammen mit} \quad a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}82 + 50}$$

Mit ihrer Hilfe bilden wir die ersten Werte ganz ausführlich:

$$a_0 = 50$$

$$a_1 = a_0 \cdot 0{,}82 + a_0$$

$$a_2 = \underbrace{\left(a_0 \cdot 0{,}82 + a_0\right)}_{a_1} \cdot 0{,}82 + a_0 = a_0 \cdot 0{,}82^2 + a_0 \cdot 0{,}82 + a_0$$

$$a_3 = \underbrace{\left(a_0 \cdot 0{,}82^2 + a_0 \cdot 0{,}82 + a_0\right)}_{a_2} \cdot 0{,}82 + a_0 = a_0 \cdot 0{,}82^3 + a_0 \cdot 0{,}82^2 + a_0 \cdot 0{,}82 + a_0$$

Man folgert intuitiv:

$$a_n = a_0 \cdot 0{,}82^n + a_0 \cdot 0{,}82^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot 0{,}82^2 + a_0 \cdot 0{,}82 + a_0 \qquad \text{(S1)}$$

Dies ist eine **geometrische Reihe**, für die es eine Berechnungsformel gibt:

Grundwissen zur geometrischen Reihe

Unter einer geometrischen Reihe versteht man eine Summe dieser Bauart:

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Das sind insgesamt n Summanden (der erste lautet eigentlich $a_1 \cdot q^0$).

Die Summenformel dafür lautet.

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

Die erste Formel ist günstig für 0<q<1, die zweite für q > 1.