Anwendungsaufgaben

Analysis

Wurzelfunktionen

Aufgabensammlung

Teilweise Abituraufgaben

Wird fortgesetzt …

Die Lösungen stammen alle vom Autor dieses Heftes-

Datei 44800

Stand: 5. März 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

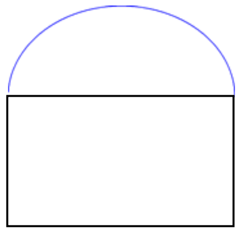
www.mathe-cd.de

Aufgabe 801 - Lösbar mit CAS

Ein Unternehmer plant ein Lagerhaus mit der Grundfläche 10 m auf 25 m. Es soll ein abgerundetes Dach bekommen. Für die Dachlinie hat sich der Architekt diese Funktion überlegt:

$$f(x) = \tfrac{4}{5}\cdot\sqrt{25-x^2}$$

Abb.1

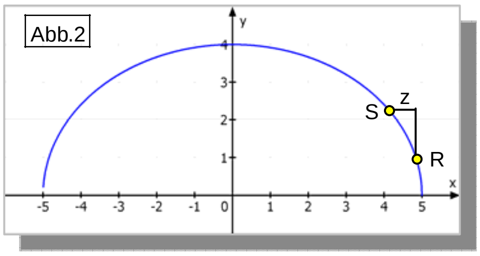


a) Gib den Definitionsbereich für f an.
Untersuche das Schaubild K von f auf Symmetrie.
Berechne den Punkt von K mit waagrechter Tangente.
Beweise ohne Verwendung einer 2. Ableitung, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.
Welchen Wertebereich **W** besitzt f? Welche Tangenten hat das Schaubild am Rande von **W.**
Um was für Punkte handelt es sich dort? Zeichne das Schaubild in ein Koordinatensystem.

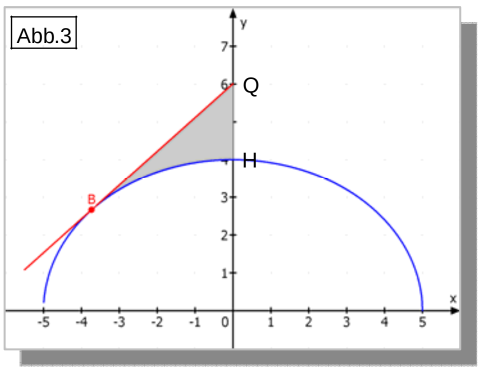
b) Berechne die Querschnittsfläche des Dachraums und daraus sein Volumen.
Die Dachfläche soll mit einer Schutzfolie beklebt werden. Berechne die benötigte Fläche in m^2.

c) Der Architekt will zur Stabilität ein Rechteck aus Stahlträgern unter das Dach einziehen.
Es soll dabei einen möglichst großen Inhalt haben. Die Dicke der Träger ist zu vernachlässigen. Welche Maße muss dieses Rechteck erhalten?

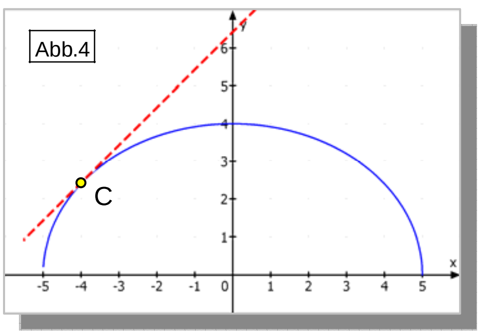
d) Der Bauherr wünscht ein Fenster mit Dachgaube im Dach. Das Fenster soll 1 m über dem Fußboden des Dachraums (R) beginnen und die Höhe 1,3 m haben.
Berechne die Länge z des Daches für die Gaube, die in S ans Hallendach anschließt.



e) Der Bauherr überlegt als nächstes, ob er auf die andere Seite des Daches ein schräges Dach auf das Gewölbedach aufsetzen lässt, welches 2 m über bisherigen Hochpunkt H in Q beginnt.
So würde ein Pultdach entstehen mit einer senkrechten Wand durch H und Q. Berechne die Koordinaten x und y des Punktes B, in dem das Schrägdach auf dem Runddach aufsetzen würde.
Welchen Neigungswinkel erhält dieses Dach.



f) Ohne dieses Schrägdach: Die Sonnenstrahlen fallen unter 45° gegen die x-Achse ein.
In welchem Punkt C streifen sie das Dach tangential? (Darunter ist Schatten.)



Lösung:

a) Gegeben: $f(x)=\frac{4}{5}\cdot\sqrt{25-x^2}$.

Definitionsbereich: $25-x^2\geq 0$

$25\geq x^2$ bzw. $x^2\leq 25$ $\quad|\sqrt{}$

$|x|\leq 5$

$-5\leq x\leq 5$ (Siehe Datei 41002)

Erg: $D=[\,-5;5\,]$

K ist symmetrisch zur y-Achse denn: $f(-x)=f(x)$ für alle x.

Ableitung: $f'(x)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{4}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

Bedingung für waagrechte Tangenten: $f'(x)=0:$ $\quad x = 0.$

y-Koordinate: $f(0)=4$

Weil für x > 0 gilt: $f'(x)<0$, fällt das Schaubild rechts von 0.

Weil für x < 0 gilt: $f'(x)>0$, steigt das Schaubild links von 0.

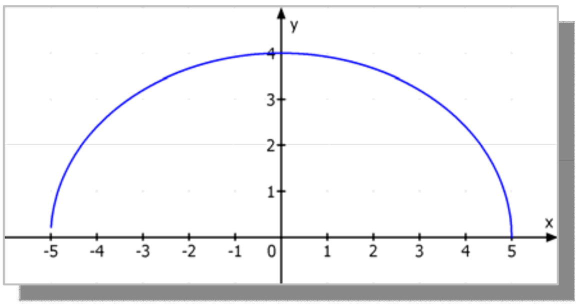
Folgerung: Also ist $H(0\,|\,4)$ ein Hochpunkt von K.

Für $x\to 5-$ geht außerdem die Tangentensteigung gegen $-\infty$,

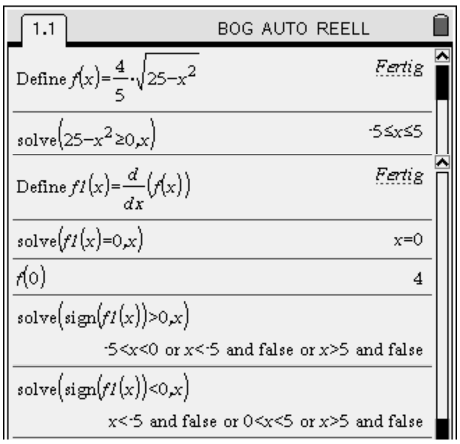
denn f' hat bei 5 eine Polstelle.

Also ist $T_1(5\,|\,0)$ ein Randtiefpunkt mit senkrechter Tangente.

Wegen der Achsensymmetrie gilt für $T_2(-5\,|\,0)$ dasselbe.



Screenshot von TI Nspire:



b) Die Querschnittsfläche wird mit einem Integral berechnet:

$$A = 2\cdot\int_0^5 f(x)\,dx = 10\pi$$

Hinweis: Wenn die Ellipse als Kurve behandelt ist und die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bekannt ist, kann man die Aufgabe so abändern, dass man in a) verlangt, K als Ellipsenbogen zu identifizieren (manuell).

Das geht manuell so:

Quadrieren von $y = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{25-x^2}$

ergibt: $y^2 = \frac{16}{25}\left(25-x^2\right)$

$$y^2 = 16-\frac{16}{25}x^2 \quad |:16$$

$$\frac{y^2}{16} = 1-\frac{1}{25}x^2$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$$

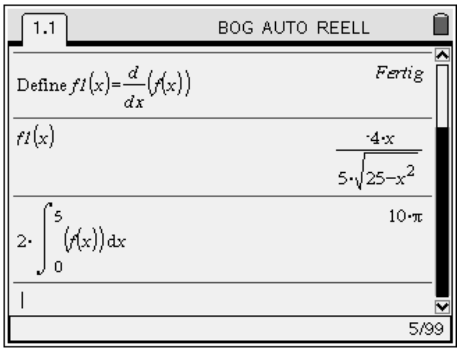
Alle liegt eine Ellipse mit den Achse a = 5 und b = 4 vor.

Dann kann man die gesuchte Querschnittsfläche so berechnen:

Fläche der Ellipse: $A_E = \pi\cdot a\cdot b = 20\cdot\pi$

$Q = \frac{1}{2}\cdot A_E = 10\cdot\pi$

Berechnung mit dem CAS-Rechner TI Nspire:



Volumen des Dachraums:

$V = Q\cdot L = 10\pi\cdot 25 = 250\pi \approx 785\ m^3$.

Die Dachfläche kann man sich als gekrümmte Rechtecksfläche vorstellen, deren gekrümmte Kante die Bogenlänge der halben Ellipse ist.

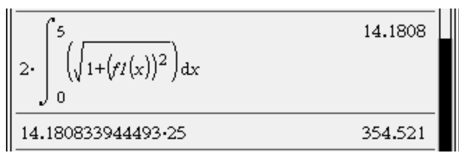
Für die Bogenlänge gibt es die Formel:

$$L_a(b) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Oder wegen der Symmetrie: $L_{-5}(5) = 2\int_0^5 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Mit $f'(x) = -\frac{4}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ wird daraus: $L_{-5}(5) = 2\int_0^5 \sqrt{1+\frac{16}{25}\cdot\frac{x^2}{25-x^2}}\,dx$

Hier der Screenshot von Nspire:

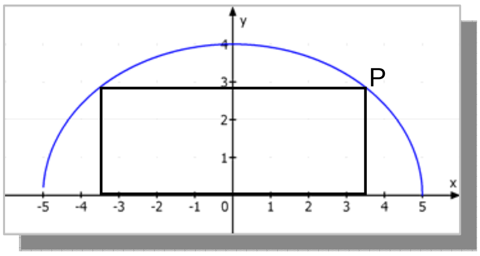


Die Dachfläche hat den Inhalt 354,42 m^2.

c) Der Kurvenpunkt P hat diese Koordinaten:

$P\left(u \mid f(u)\right) = \left(u \mid \tfrac{4}{5}\sqrt{25-u^2}\right)$

Fläche des Rechtecks: $A(u) = 2u \cdot f(u)$



Also: $A(u) = 2u \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \sqrt{25-u^2}$

$A(u) = \dfrac{8}{5} u \cdot \sqrt{25-u^2}$

Bedingung: $A'(u) = 0$

Die Lösungen sind $u_E = \pm \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

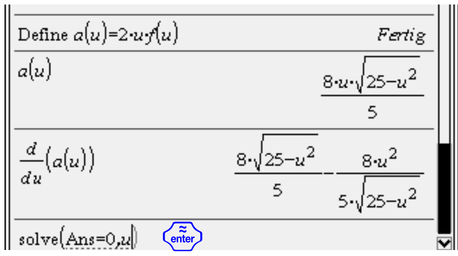
Weil nur der positive Wert in Frage kommt:

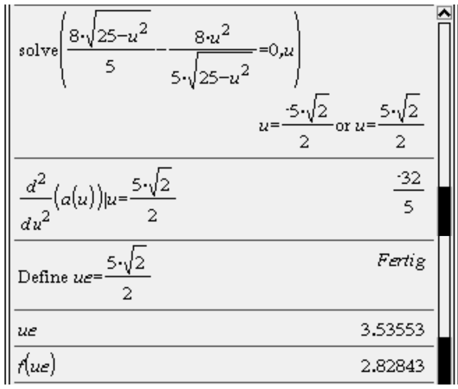
$u_E = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$ und $f(u_E) = 2{,}23$

Die Kontrolle zeigt: $A''(u_E) < 0$,

also liegt ein Maximum vor.

(Die Abbildung stimmt etwa mit diesen Werten überein.)

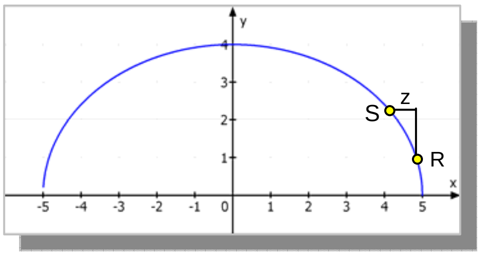




d) Im 1. Schritt muss die x-Koordinate von R bestimmt werden. Man kennt seine y-Koordinate 1.

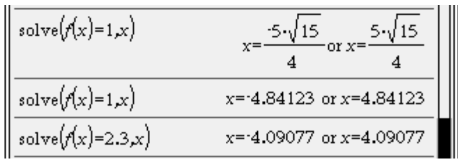
Dann bestimmt man die y-Koordinate von S. Seine Höhe über dem Dachboden ist 2,3 m:

Man erhält: $x_R = 4{,}84$ und $x_S = 4{,}09$.



Die Länge des Gaubendaches ist daher

$z = x_R - x_S = 4{,}84 - 4{,}09 = 0{,}75$ (m).



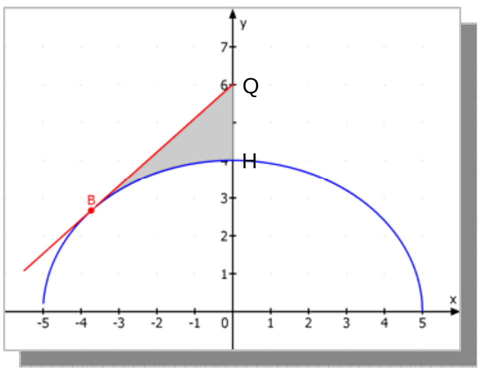
e) Welche Gerade durch $Q(0 \mid 6)$ ist Tangente an K?

Der Berührpunkt sei $B\left(u \mid f(u)\right)$.

Tangente in B: $y - f(u) = f'(u) \cdot (x - u)$

bzw. $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

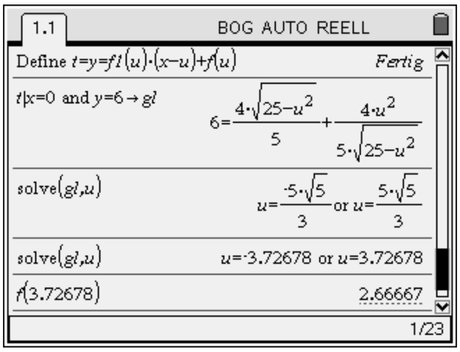
Mit dieser Geraden macht man die Punktprobe und setzt Q ein. So entsteht ein Gleichung, aus der man u berechnen kann.



CAS-Lösungen auf der Folgeseite.

Ergebnis: $B(-3{,}73 \mid 2.67)$. Neigungswinkel: $\tan\alpha = f'(-3{,}73) \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(f'(-3{,}73)) \approx 41{,}9^{\circ}$

Erklärung der Berechnung mit TI Nspire:



Zuerst wird die Punktsteigungsform in der Form

$y = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$ als Tangente t definiert.

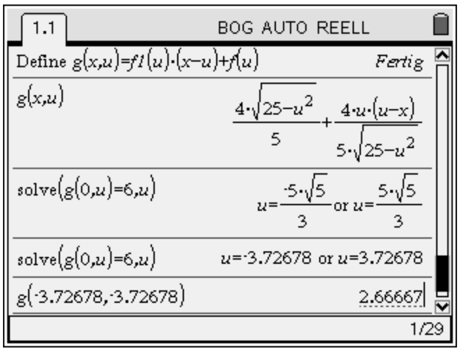
Man kann mit TI Nspire tatsächlich eine Gleichung in eine Definition aufnehmen.

Das Einsetzen des Punktes Q geschieht dann, indem man den With-Operator (den Bedingungsstrich) | verwendet und dahinter x=0 and y=6 schreibt. Da t eine Gleichung darstellt, ist jetzt eine neue Gleichung entstanden, die nur noch die Variable u enthält. Sie lässt man nach u auflösen und erhält in der Einstellung AUTO die exakten Werte und mit ctrl enter die Näherungswerte.

Wegen der Symmetrie des Daches kann man jeden der beiden Werte verwenden um die y-Koordinate des Punktes B zu berechnen.

Entsprechend der Abbildung lautet dann das Ergebnis: $B(-3{,}73\,|\,2.67)$.

Eine andere Methode zu dieser Lösung geht diesen Weg:

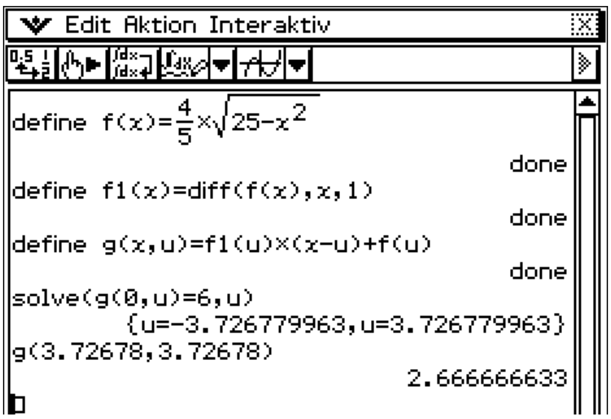


Hier wird die rechte Seite der Punkt-Steigungs-Form $y = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$ als Funktion g(x,u) mit 2 Variablen definiert. Setzt man Q ein, entsteht die Gleichung g(0,u)=6. Diese wird nach u aufgelöst, ergibt $u = \pm 3{,}72678$. Setzt man für u $-3{,}72678$ ein, dann stellt $y = g(-3{,}72678, x)$ die Gleichung der Tangente dar.

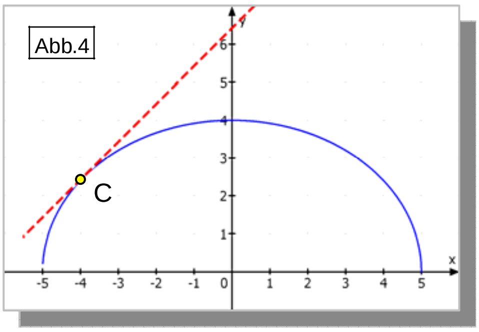
Für die y-Koordinate des Berührpunktes, dessen x-Koordinate ja u ist, muss man für x nochmals u einsetzen:

$x_B = g(u,u) \approx 2{,}67$!!!

Diese zweite Methode klappt auch bei CASO ClassPad:



f) Ohne dieses Schrägdach: Die Sonnenstrahlen fallen unter 45^{O} gegen die x-Achse ein.
In welchem Punkt C streifen sie das Dach tangential? (Darunter ist Schatten.)



Methode: Man muss jetzt nur herausfinden, an welcher Stelle die Ableitungsfunktion f' den Wert 1 hat.

solve$(f1(x)=1,x)$	$x=\frac{-25\cdot\sqrt{41}}{41}$
solve$(f1(x)=1,x)$	$x=-3.90434$
$f(-3.90434)$	2.49878

Ergebnis: $C(-3{,}90 \mid 2{,}50)$.

Man könnte jetzt noch fragen, wo die Sonnenstrahlen senkrecht auf die Dachfläche auftreffen.

Dann muss die Tangente die Steigung – 1 haben. Die Methode ist dieselbe.