Matrizenrechnung

Anwendungsaufgaben

Teil 3

Themenheft:

Übergangsmatrizen

Prozess-Diagramme

Markow-Ketten

Viele Berechnungen werden mit dem CAS-Rechner TI Nspire durchgeführt.

Datei 62331

Friedrich Buckel

Stand: 27. September 2009

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Wird fortgesetzt

Vorwort

Dieses Thema gehört eigentlich in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn es werden Zustände dergestalt beschrieben, dass man angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die einzelnen Zustände eintreten. Dann erfolgt eine Zustandsänderung, was beispielsweise in einem Spiel durch Würfeln geschehen kann. Auf Grund der Wahrscheinlichkeit der Zustandsänderungen kann man die neuen Zustände vorhersagen. Benötigt werden: Baumdiagramme und die Berechnungen dazu wie Pfadregeln und totale Wahrscheinlichkeit.
Wir finden diesen Stoff im Kapitel Matrizenrechnung, weil diese Rechenart das Ganze wesentlich vereinfacht.

Leider ist die Verwendung von Tabellen und den darin enthaltenen Matrizen nicht einheitlich.
Beispiel 1 dieses Heftes enthält diese Tabelle:
Dabei geht es darum, dass Leihwagen, di morgens im Autohaus A, B oder C abgeholt werden (oberer Tabelleneingang) abends in den links stehenden Autohäusern stehen.

↙	A	B	C
A	0,5	0,6	0,4
B	0,25	0,3	0,2
C	0,25	0,1	0,4

60% (0,6) der **<u>von B</u>** abgefahrenen Autos kommen im Laufe des Tages **<u>nach A.</u>**
Die von A abgeholten Autos stehen also unterhalb von A. In der ersten Zeile steht dann der Anteil, der in A abgegeben wird, in der 2. Zeile der nach B gehende Anteil und in der 3. Zeile der nach C gehende Anteil.

Andere Autoren verwenden solche Tabellen genau anders herum:
Hier gibt beispielsweise die erste Zeile an wie viele von A abgeholten Autos nach A (50%) nach B(25%) oder nach C(25%) gehen.

↗	A	B	C
A	0,5	0,25	0,25
B	0,6	0,3	0,1
C	0,4	0,2	0,4

Der schräge Pfeil zeigt also an, von wo nach wo der Übergang stattfindet.
Ich zeige im Beispiel 1, worin sich die Berechnungsmethoden dieser beiden Schreibweisen unterscheiden, damit man erkennt, wie man die Rechnungen umschreiben muss, wenn die zu verwendende Methode gerade anders ist als meine.

Meistens aber werde ich so arbeiten, wie es die obere Tabelle zeigt.

Damit schließe ich mich auch der deutlichen Mehrheit der Schulbuchverlage an.

1. Einführende Beispiele

Hinter Markow-Ketten steckt nichts Geheimnisvolles. Bestimmte Zustände kann man in Vektorform aufschreiben. Tritt eine Veränderung ein, dann lässt sich die Umrechnung in den neuen Zustand in vielen Fällen durch lineare Gleichungen durchführen. Diese wiederum lassen sich als Matrizengleichungen darstellen. Und die zugehörigen Matrizen, die durch Multiplikation mit dem alten Zustandvektor den neuen berechnen lassen, nennt man **Übergangsmatrizen**.

Beispiel 1 (Leihwagen)

Ein Autohaus hat 3 Filialen und zwar in A-Stadt, B-Stadt und C-Stadt. Seine Leihwagen kann man an jedem der drei Standorte wieder. Wir wollen zur Vereinfachung annehmen, dass sie jeweils nur maximal einen Tag lang vermietet werden. Eine Statistik über die <u>Standortwechsel</u> wurde in dieser Tabelle festgehalten:

↙	A	B	C
A	0,5	0,6	0,4
B	0,25	0,3	0,2
C	0,25	0,1	0,4

Spalte 1 besagt: Mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 wird ein in A geholtes Auto wieder in A abgegeben. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 wird es in A abgeholt und in B abgegeben und dasselbe gilt von A nach C.

Spalte 2: Ein Auto, das in B abgeholt wird, findet man abends mit 60% Wahrscheinlichkeit in A, mit 30% Wahrscheinlichkeit in B und mit 10% Wahrscheinlichkeit in C.

Spalte 3: Die in C entliehenen Autos tauchen mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 in A auf, mit 0,2 in B und mit 0,4 in C.

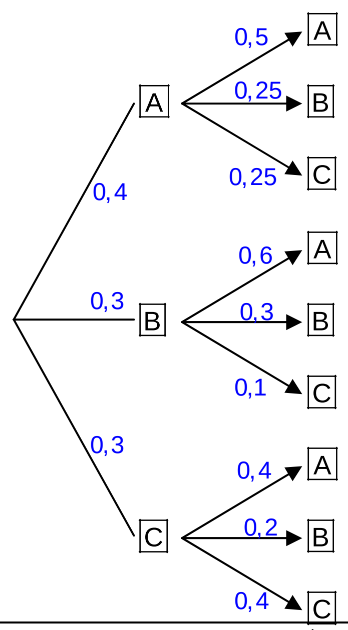
An einem bestimmten Tag stehen morgens 40% der Leihautos in A und jeweils 30% in B und C.
Welche Zustände hat man an den drei Folgetagen?

Den gegebenen Anfangszustand beschreibt man durch einen Zustandsvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

Das Baumdiagramm beschreibt die **Zustandsänderungen**.
Die erste Stufe entspricht dem ersten Zustandsvektor, also dem Startvektor $\vec{v}_1$. Der Übergang in die zweite Stufe wird durch 9 Zustandsänderungen beschrieben, die in der Tabelle festgehalten sind. Wir können jetzt ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich abends ein Fahrzeug in A befindet.
Das ist die totale Wahrscheinlichkeit für A und besteht aus den Pfaden 1 $(A \to A)$, 4 $(B \to A)$ und 7 $(C \to A)$:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,20 + 0,18 + 0,12 = 0,50$$

Berechne auf dieselbe Weise die totalen Wahrscheinlichkeiten für B und C.



Man erhält:

$$P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}10 + 0{,}09 + 0{,}06 = 0{,}25$$
$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}10 + 0{,}03 + 0{,}12 = 0{,}25$$

Daraus bilden wir den 2. Zustandsvektor, der also die Situation am Folgetag beschreibt:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Wer die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor gelernt hat, der kann folgende Rechnung nachvollziehen:

Zuerst entnehme ich der Übergangstabelle die sogenannte Übergangsmatrix:

$U = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Diese wird mit dem Zustandsvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$ multipliziert:

$$U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$$

(Die Zeilenvektoren von U werden mit dem Spaltenvektor $\vec{v}_1$ skalar multipliziert. Das alles kann man im Text 62111 nachlesen).

Führt man diesen Schritt nochmals aus, erfährt man, welche Autoverteilung man für den Folgetag zu erwarten hat:

$$\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 \\ 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 \\ 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Das ist ja interessant: Die Situation hat sich nicht verändert! Das heißt doch: Wenn die Hälfte der Autos in A stehen und je ein Viertel in B und C, dann wird das auch am nächsten Tag so sein:

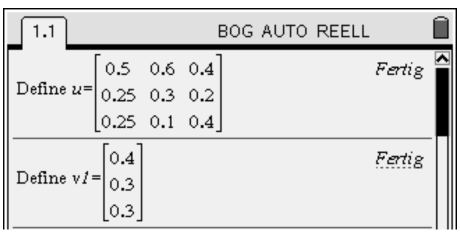
$$\vec{v}_4 = U \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

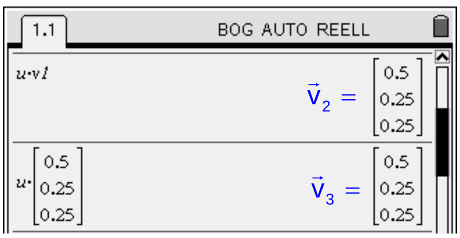
Wir haben tatsächlich einen **stabilen Zustand** erreicht. Nach jedem Tag befindet sich die Hälfte der Fahrzeuge in A und je ein Viertel in B und C.

Solche Berechnungen gehen natürlich schneller, wenn man sie mit einem CAS-Rechner durchführen kann. Damit kann man schneller auch andere Startvektoren testen und allerlei entdecken.

Hier zunächst die Berechnung der gezeigten Situation mit **TI Nspire CAS**.

Zuerst die Definition von U und $\vec{v}_1$, dann die Berechnung von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.





Jetzt wollen wir uns ansehen, wie sich die Situation entwickelt, wenn wir vom Startvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

ausgehen, also von einem Tag, an dem 30% der Mietwagen in A, 50% in B und 20% in C stehen.
Ich berechne die Zustandsvektoren mehrerer Folgetage:

Nach der Definition der Übergangsmatrix U

wird $\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1$ berechnet.

Dann gibt man ein: $U \cdot \boxed{\text{ans}}$

(durch die Tastenkombination U· ctrl ans).

Nach enter ersetzt Nspire ans durch die

letzte Antwort, also durch $\vec{v}_2$, man erhält $\vec{v}_3$.

Auf dieselbe Weise entstehen

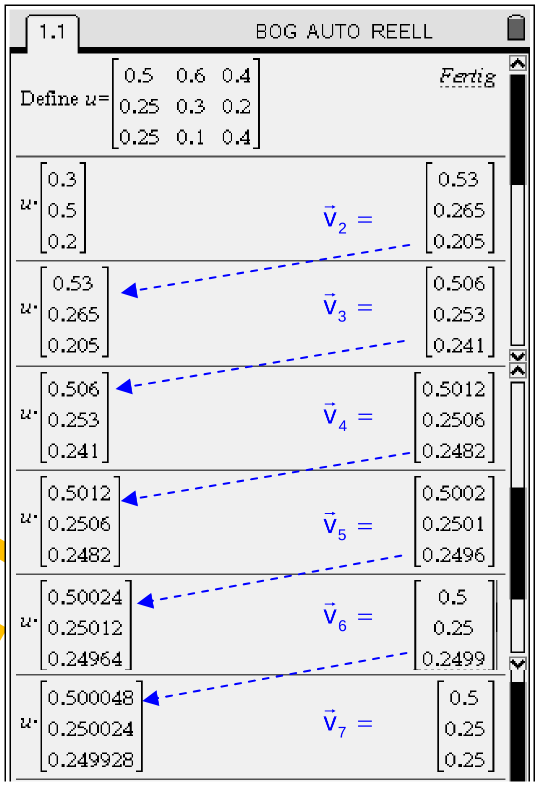
$\vec{v}_4 = U \cdot \vec{v}_3$,

$\vec{v}_5 = U \cdot \vec{v}_4$,

$\vec{v}_6 = U \cdot \vec{v}_5$,

und

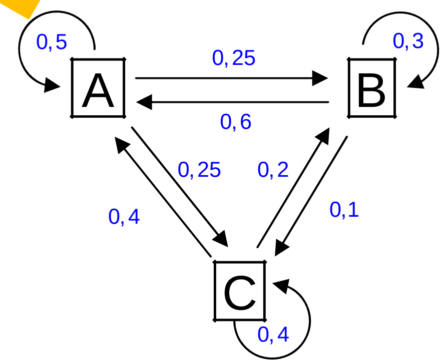
$\vec{v}_7 = U \cdot \vec{v}_6$.



Die Ergebnisse lasse ich laut Voreinstellung auf 4 Dezimalen (= Nachkommastellen) runden.
Und daraus folgt, dass bereits nach einer Woche wieder dieser stabile Zustand hergestellt ist:

In A stehen 50% der Mietautos, in B und C jeweils 25%.

Ist das nicht verblüffend. Wir haben hier eine Situation, die sich relativ rasch stabilisiert.
Das Ganze nennt man eine **Markow-Kette**. Jede Situation wird durch denselben Zufallsprozess weiter entwickelt. Dazu noch das **Prozessdiagramm**, welches die Abläufe veranschaulicht:



Man sollte sich zur Übung die Mühe machen und die Werte der Übergangstabelle mit diesem Prozessdiagramm (Übergangsdiagramm) vergleichen.

Anhang:

Bei Verwendung der anderen Tabellenrichtung (siehe Vorwort) sieht die Lösung so aus:

Zuerst die Tabelle. Daraus bildet man die Übergangsmatrix:

↗	A	B	C
A	0,5	0,25	0,25
B	0,6	0,3	0,1
C	0,4	0,2	0,4

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Jetzt wird es nötig, die Zustandsvektoren als Zeilenvektoren zu schreiben:

Statt wie vorhin $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$ benötigen wir jetzt: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Den folgenden Zustandsvektor habe zuvor so berechnet:

$$\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Jetzt sieht die Berechnung so aus:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot U = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \\ 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \\ 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Usw.