

Grundlagentraining

Teil 1

Bruchrechnen in Kurzform

Für alle, die es benötigen,

z. B. zur Prüfungsvorbereitung in 10 ...

Zu diesen Beispielen gibt es einen Leistungstest in 10249.

Ausführliche Texte zur Bruchrechnung findet man in:

10201	Kürzen und Erweitern
10202	Bruchteile von Größen
10205	Addition und Subtraktion
10207	Multiplikation und Division

Datei Nr. 10250

Stand: 8. Januar 2018

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	Addition und Subtraktion	3
	Trainingsaufgabe 1	4
2	Gemischte Brüche	5
3	Addition und Subtraktion von gemischten Brüchen	6
	Trainingsaufgabe 2	7
4	Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl	8
5	Division eines Bruches durch eine Zahl	9
	Trainingsaufgabe 3	10
6	Multiplikation und Division zweier Brüche	11
	Trainingsaufgabe 4	11
	Übersicht: Formeln zu Multiplikation und Division	12
7	Einige Textaufgaben	13
8	Drei Monsteraufgaben	15
9	Lösungen aller Trainingsaufgaben	16

Dieser Text soll Schüler das nochmals zeigen, was sie können sollten. Es werden die Grundlagen wiederholt, Beispiele gezeigt, und zum Trainieren gibt es Aufgaben mit ausführlichen Lösungen.

Geeignet zur Prüfungsvorbereitung.

Zu diesen Beispielen gibt es einen Leistungstest in Nummer 12249

Hier stehen dann die Lösungen. Wer sich also zuerst testen möchte, bearbeite zuerst den Test.

1 Addition und Subtraktion

Regel 1: Brüche werden **addiert / subtrahiert**, indem man sie zuvor **durch Erweitern** auf einen **gemeinsamen Nenner** bringt und dann ihre Zähler addiert/subtrahiert.

Es ist günstig, den kleinsten gemeinsamen Nenner zu verwenden.

Diesen nennt man den **Hauptnenner**. Er wird als kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) der einzelnen Nenner berechnet.

a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{2}$ Der gemeinsame Nenner ist 4. Durch Erweitern mit 2, wird $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot \boxed{2}}{2 \cdot \boxed{2}} = \frac{10}{4}$.

Erweitern heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren. Das ändert nur die Form des Bruches, nicht sein Wert! Genau das besagt das Gleichheitszeichen.

Ganze Rechnung: $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{3}{4} + \frac{5 \cdot \boxed{2}}{2 \cdot \boxed{2}} = \frac{3}{4} + \frac{10}{4} = \frac{13}{4}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ Der gemeinsame Nenner ist jetzt 12.

Der Bruch $\frac{3}{4}$ wird mit 3 erweitert: $\frac{3 \cdot \boxed{3}}{4 \cdot \boxed{3}} = \frac{9}{12}$, der Bruch $\frac{2}{3}$ mit 4: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot \boxed{4}}{3 \cdot \boxed{4}} = \frac{8}{12}$

Ganze Rechnung: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$

c) $\frac{11}{8} - \frac{5}{6}$ Viele meinen, dass der Hauptnenner hier das Produkt $8 \cdot 6 = 48$ ist.

Das ist jedoch falsch, denn beide Nenner haben den gemeinsamen Teiler 2. Daher ist der Hauptnenner, also das kleinste gemeinsame Vielfache, bereits 24.

Der Bruch $\frac{11}{8}$ wird mit 3 erweitert und $\frac{5}{6}$ mit 4:

Ganze Rechnung: $\frac{11}{8} - \frac{5}{6} = \frac{11 \cdot \boxed{3}}{8 \cdot \boxed{3}} - \frac{5 \cdot \boxed{4}}{6 \cdot \boxed{4}} = \frac{33}{24} - \frac{20}{24} = \frac{13}{24}$

d) $\frac{4}{36} + \frac{11}{42}$ Bei größeren Nennern erkennt man das kgV oft nicht gleich. Dann kann man die Methode der Primfaktorzerlegung anwenden:

Man schreibt nur gleiche Primfaktoren untereinander. Das Produkt aller in einer Spalte stehenden Primzahlen ergibt das kgV, den Hauptnenner. Aus den fehlenden Primzahlen bildet man die Erweiterungszahlen.

$\frac{4}{36} + \frac{11}{42} = \frac{4 \cdot \boxed{7}}{36 \cdot \boxed{7}} + \frac{11 \cdot \boxed{6}}{42 \cdot \boxed{6}} = \frac{28}{252} + \frac{66}{252} = \frac{94}{252} = \frac{47}{126}$ Kürzer:

Beim Kurzverfahren muss man darauf achten, dass die nicht gemeinsamen Faktoren auch wirklich teilerfremd sind!

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \square$ EZ = 7
$42 = 2 \cdot \square \cdot 3 \cdot \square \cdot 7$ EZ = 6
$\text{HN} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}_{=36} = 252$

$36 = 6 \cdot 6 \cdot \square$ EZ = 7
$42 = 6 \cdot \square \cdot 7$ EZ = 6
$\text{HN} = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252$

$$e) \quad \frac{17}{36} + \frac{23}{24} - \frac{19}{18}$$

Berechnung des Hauptnenners:

(1) durch Kopfrechnung:

Ich betrachte zuerst 36 und 24. Das Doppelte von 36 ist 72, und das ist das 3-fache von 24. Andererseits ist auch 18 darin enthalten: 4-mal. Also ist das kgV dieser drei Zahlen 72.

(2) Primfaktorzerlegung:

$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \square$	EZ = 2
$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot \square \cdot 3 \cdot 2$	EZ = 3
$18 = 3 \cdot 6 = \square \cdot \square \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$	EZ = 4
<hr/>	
HN	$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

Ausführliche Berechnung:

$$\frac{17}{36} + \frac{23}{24} - \frac{19}{18} = \frac{17 \cdot \underline{2}}{36 \cdot \underline{2}} + \frac{23 \cdot \underline{3}}{24 \cdot \underline{3}} - \frac{19 \cdot \underline{4}}{18 \cdot \underline{4}} = \frac{34}{72} + \frac{69}{72} - \frac{76}{72} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

Am Ende haben 27 und 72 den gemeinsamen Teiler 9, so dass man durch 9 kürzen konnte.

Trainingsaufgaben 1

$$f) \quad \frac{5}{9} + \frac{3}{4}$$

$$g) \quad \frac{5}{9} + \frac{7}{18}$$

$$h) \quad \frac{5}{9} + \frac{17}{24}$$

$$i) \quad \frac{25}{44} - \frac{1}{5}$$

$$j) \quad \frac{99}{40} - \frac{17}{60}$$

$$k) \quad \frac{41}{81} - \frac{16}{27}$$

$$l) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$m) \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{19}{24}$$

$$n) \quad \frac{4}{21} + \frac{5}{28} - \frac{2}{7}$$

Bei den nächsten drei Aufgaben berechne den Hauptnenner mit Primfaktorzerlegung:

$$o) \quad \frac{33}{56} + \frac{19}{36}$$

$$p) \quad \frac{5}{12} + \frac{7}{18} + \frac{1}{30}$$

$$q) \quad \frac{17}{36} - \frac{3}{20} - \frac{5}{27}$$

2 Gemischte Brüche

Addiert man zur Zahl 3 den Bruch $\frac{5}{8}$, dann geht das so: $3 + \frac{5}{8} = \frac{24}{8} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$.

Man sieht, dass bei diesem Bruch der Zähler größer ist als der Nenner. Das liegt daran, dass sein Wert größer als 1 ist.

Ein Bruch, dessen Zähler größer als sein Nenner ist, heißt unechter Bruch.

Man kann die Ganzen aus ihm herausziehen. Dazu muss man eine Division beginnen. Jeder Bruch stellt im Grunde eine Divisionsaufgabe dar. Hier heißt sie:

$$29 : 8 = ?$$

Und so kann man überlegen: 8 geht in 29 3-mal: $3 \cdot 8 = 24$ und als Rest bleibt 5 übrig.

Also werden aus den 29 Achtel 3 Ganze, und 5 Achtel bleiben übrig.

Dies schreibt man so auf: $\frac{29}{8} = 3 + \frac{5}{8}$.

Für eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruch haben die Mathematiker eine abkürzende Schreibweise eingeführt. Man darf hier das Pluszeichen einfach weglassen.

$$3\frac{5}{8} \text{ ist also dasselbe wie } 3 + \frac{5}{8}$$

Einen unechten Bruch kann man also als gemischten Bruch schreiben. Beispiele:

$$\frac{29}{8} = 3 + \frac{5}{8} = 3\frac{5}{8}$$

oder

$$\frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$$

denn $20 : 3 = 6$, Rest 2 (Drittel).

$$\frac{83}{11} = 7\frac{6}{11} = 7\frac{6}{11}$$

denn $83 : 11 = 7$, Rest 6 (Elfte). Die Summe schreibt man nicht auf.

$$\frac{147}{10} = 14\frac{7}{10}$$

denn 10 geht in 147 14-mal, Rest 7 (Zehntel).

$$\frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$$

denn 4 geht in 51 12-mal, Rest 3 (Viertel).

Verwandlung eines gemischten Bruches in einen unechten Bruch:

$$5\frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}$$

oder so:

$$5\frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 6 + 1}{6} = \frac{31}{6}$$

$$12\frac{5}{8} = \frac{12 \cdot 8 + 5}{8} = \frac{101}{8}$$

$$9\frac{14}{25} = \frac{9 \cdot 25 + 14}{25} = \frac{225 + 14}{25} = \frac{239}{25}$$

3 Addition und Subtraktion von gemischten Brüchen

a)
$$4\frac{3}{8} + 5\frac{1}{6} = (4+5) + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) = 9 + \frac{3 \cdot \boxed{3}}{8 \cdot \boxed{3}} + \frac{1 \cdot \boxed{4}}{6 \cdot \boxed{4}} = 9 + \frac{9}{24} + \frac{4}{24} = 9\frac{13}{24}$$
Nicht aufschreiben, aber so rechnen.

Das rechnet man schneller so:
$$4\frac{3}{8} + 5\frac{1}{6} = 9 + \frac{3 \cdot \boxed{3} + 1 \cdot \boxed{4}}{24} = 9\frac{13}{24}$$

b) Dabei kann auch so etwas passieren:

$$11\frac{13}{25} + 8\frac{19}{30}$$
 Der Hauptnenner ist 150: $25 \cdot 6 = 150$ und $30 \cdot 5 = 150$:

$$11\frac{13}{25} + 8\frac{19}{30} = 19 + \frac{13 \cdot 6 + 19 \cdot 5}{150} = 19\frac{78 + 95}{150} = 19\frac{173}{150}$$

Dieser gemischte Bruch enthält jetzt den unechten Bruch $\frac{173}{150} = 1\frac{23}{150}$.

Daher sieht die ganze Rechnung so aus:

$$11\frac{13}{25} + 8\frac{19}{30} = 19 + \frac{13 \cdot 6 + 19 \cdot 5}{150} = 19\frac{78 + 95}{150} = 19\frac{173}{150} = 20\frac{23}{150}$$

c)
$$5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} = (5-3) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2 + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{4}$$
nur im Kopf

Kürzer:
$$5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} = 2\frac{2-1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

d) $6 - \frac{3}{4}$???

Jetzt muss man 6 in $5\frac{4}{4}$ umwandeln und so rechnen:

$$6 - \frac{3}{4} = \boxed{5\frac{4}{4}} - \frac{3}{4} = 5 + \left(\frac{4}{4} - \frac{3}{4}\right) = 5\frac{1}{4}$$

Oder kurz so:
$$6 - \frac{3}{4} = 5 + \frac{4-3}{4} = 5\frac{1}{4}$$

e)
$$5\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = (5-3) + \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) \text{ ???}$$

Man erkennt, dass die Subtraktion nicht ausführbar ist.

In so einem Fall verwendet man ein Ganzes (das man von 5 wegnimmt) und verwandelt es in weitere Viertel, so dass man subtrahieren kann:

$$5\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = 5\frac{2}{4} - 3\frac{3}{4} = 4\frac{6}{4} - 3\frac{3}{4} = (4-3) + \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right) = 1\frac{3}{4}$$

Das schreiben Köner so auf:

$$5\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = 4\frac{6}{4} - 3\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Wenn man die einzelnen Umformungen begriffen hat, kann man solche Aufgaben selbst lösen.

4 Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl



Die Rechnung dazu lautet: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

Diese Aufgabe kann man als Multiplikation schreiben:

$$\boxed{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\boxed{3} \cdot 3}{4} = \frac{9}{4}$$



In Worten:

REGEL 1

Eine Zahl wird mit einem Bruch multipliziert, indem man sie mit dem Zähler multipliziert.

Beispiele:

a) $2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$

b) $5 \cdot \frac{8}{3} = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$

c) $\frac{7}{9} \cdot 8 = \frac{7 \cdot 8}{9} = \frac{56}{9}$

d) $\frac{13}{50} \cdot 3 = \frac{39}{50}$

Es gibt Situationen, in denen man die Regel 1 nicht anwenden sollte. Dazu dieses Beispiel:

e) $36 \cdot \frac{5}{24} = \frac{36 \cdot 5}{24} = \frac{180}{24} = \frac{15}{2}$

Zuerst wurde 36 mit 5 multipliziert, dann **entstand die große Zahl** 180, am Ende konnte (musste) man noch kürzen!

Die bessere Rechnung sieht so aus:

$$36 \cdot \frac{5}{24} = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \cdot 5}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{15}{2}$$

Hier wurde **vor** der Multiplikation gekürzt!

Diesen Kürzungsvorgang kann man schon ganz zu Beginn vornehmen, wenn man weiß, dass der Faktor **vor** dem Bruch eigentlich zum Zähler gehört:

$$\overset{3}{\cancel{36}} \cdot \frac{5}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{15}{2}$$

So ist die Rechnung optimal kurz gelungen!

f) $\frac{25}{9} \cdot 18 = ?$

Zuerst nachdenken und erkennen: **Man kann durch 9 kürzen!**

$$\frac{25}{\cancel{9}_1} \cdot \cancel{18}^2 = \frac{\cancel{25} \cdot 2}{\cancel{1}} = 50$$

Den mittleren Bruch schreibt man nicht auf.

g) $39 \cdot \frac{31}{26} = ?$

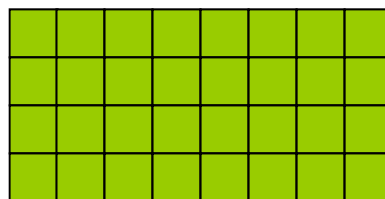
Zuerst nachdenken und erkennen: **Man kann durch 13 kürzen!**

$$\overset{3}{\cancel{39}} \cdot \frac{31}{\underset{2}{\cancel{26}}} = \frac{93}{2}$$

MERKE: Eine Zahl wird mit einem Bruch oder ein Bruch mit einer Zahl multipliziert, indem man diese Zahl mit dem Zähler multipliziert, aber erst, nachdem man sie (falls möglich) gegen den Nenner gekürzt hat.

5 Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

Wir sollen eine Tafel Schokolade in gleich große Teile zerlegen.

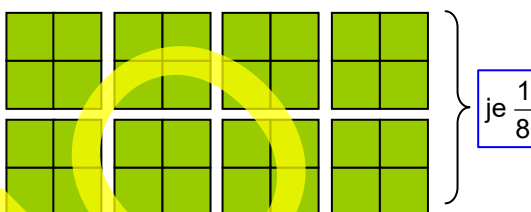


1. Schritt: Zuerst wird sie in 2 Teile zerlegt:

Wir brechen sie zum Beispiel der Länge nach durch.



2. Schritt: Dann wird jeder Teil weiter in 4 gleiche Teile zerlegt.
Wir haben jetzt 8 Teile Schokolade.



Dazu die Rechnung:

1. Schritt: 1 Tafel geteilt durch 2 ergibt 2-mal eine halbe Tafel: $\frac{1}{2}$ Tafel.

2. Schritt: Jede halbe Tafel wird durch 4 geteilt:

Das zeigt die Rechnung $\frac{1}{2} : 4$. Man **sieht** das Ergebnis: $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ Tafel

Und jetzt die Frage: Wie kommt man ohne eine Abbildung auf das Ergebnis $\frac{1}{8}$?

REGEL: Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl geteilt, indem man den **NENNER** mit dieser Zahl **MULTIPLIZIERT**.

Dies sieht dann so aus:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Beispiele:

a) $\frac{24}{5} : 7 = \frac{24}{5 \cdot 7} = \frac{24}{35}$

b) $\frac{3}{8} : 5 = \frac{3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{40}$

c) $\frac{12}{5} : 2 = \frac{12}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

WICHTIG: Am Beispiel c) erkennt man eine Vereinfachungsmöglichkeit: Man kann durch 2 kürzen. Wenn man doch weiß, dass die 2 in den Nenner kommt, dann kann man sie auch schon vorher kürzen und die Rechnung wird einfacher, weil man sich die Multiplikation erspart:

$$\frac{\cancel{6}^{2} 12}{5} : \cancel{2}_1 = \frac{6}{5}$$

- d) Schlechte Rechnung: $\frac{24}{25} : 48 = \frac{24}{25 \cdot 48} = \frac{24}{1200}$ Es ist nicht gekürzt worden.
- Topp-Rechnung: $\frac{\overset{1}{\cancel{24}}}{25} : \overset{2}{\cancel{48}} = \frac{1}{25 \cdot 2} = \frac{1}{50}$ Es ist durch 24 gekürzt worden.
- e) Schlechte Rechnung: $\frac{56}{13} : 42 = \frac{56}{13 \cdot 42} = \frac{56}{546}$ Es ist nicht gekürzt worden.
- Topp-Rechnung: $\frac{\overset{4}{\cancel{56}}}{13} : \overset{3}{\cancel{42}} = \frac{4}{13 \cdot 3} = \frac{4}{39}$ Es ist durch 14 gekürzt worden.
- f) Schlechte Rechnung: $3\frac{1}{4} : 65 = \frac{13}{4} : 65 = \frac{13}{4 \cdot 65} = \frac{13}{260}$ Es ist nicht gekürzt worden.
- Topp-Rechnung: $3\frac{1}{4} : 65 = \frac{\overset{1}{\cancel{13}}}{4} : \overset{5}{\cancel{65}} = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$ Es ist durch 13 gekürzt worden.

MERKE: Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man diese Zahl mit dem **NENNER** multipliziert. Man prüfe doch zuvor, ob man diese Zahl gegen den Zähler kürzen kann.

Trainingsaufgabe 3

Rechne geschickt, indem du wenn möglich zuerst kürzt:

- a) $\frac{3}{5} \cdot 4 =$ b) $\frac{4}{9} : 5 =$ c) $\frac{13}{16} \cdot 12$ d) $\frac{16}{13} : 12$
- e) $\frac{25}{38} : 40 =$ f) $\frac{50}{33} \cdot 22 =$ g) $4\frac{1}{6} \cdot 12 =$ h) $5\frac{1}{3} : 24$

6 Multiplikation und Division zweier Brüche

Regel:

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Vorher sollte man kürzen!

Beispiele:

$$a) \quad \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot \overset{5}{\cancel{125}}}{\cancel{25} \cdot \underset{11}{\cancel{88}}} = \frac{15}{11} \quad \left(= 1 \frac{4}{11} \right)$$

$$b) \quad 7 \frac{1}{12} \cdot 5 \frac{7}{34} = \frac{85}{12} \cdot \frac{177}{34} = \frac{5 \cdot \cancel{47}}{\underset{4}{\cancel{12}}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot 59}{2 \cdot \cancel{17}} = \frac{295}{8} \quad \left(= 36 \frac{7}{8} \right)$$

Regel:

Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

Vor der Multiplikation sollte man kürzen!

Beispiele:

$$a) \quad \frac{40}{39} : \frac{48}{65} = \frac{\overset{5}{\cancel{40}} \cdot \overset{5}{\cancel{65}}}{\underset{3}{\cancel{39}} \cdot \underset{6}{\cancel{48}}} = \frac{25}{18}$$

$$b) \quad 32 : \frac{8}{15} = 32 \cdot \frac{15}{\cancel{8}} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}} \cdot 15}{\underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{60}{1} = 60$$

Schnellrechner lassen die durchkreuzten Teile weg!

$$c) \quad 14 \frac{2}{9} : 10 \frac{2}{3} = \frac{128}{9} : \frac{32}{3} = \frac{\overset{4}{\cancel{128}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{32}}} = \frac{4}{3}$$

Trainingsaufgabe 4

Rechne geschickt, indem du wenn möglich zuerst kürzt:

a) $\frac{15}{4} \cdot \frac{7}{20}$

b) $\frac{24}{25} \cdot \frac{125}{88}$

c) $3 \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{11}$

d) $7 \frac{1}{12} \cdot 5 \frac{1}{34}$

e) $\frac{36}{35} : \frac{3}{7}$

f) $\frac{44}{27} : \frac{8}{81}$

g) $32 : \frac{8}{15}$

h) $9 \frac{2}{7} : 2 \frac{3}{5}$

i) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{11}}$

h) $\frac{\frac{5}{24}}{\frac{15}{4}}$

Übersicht

Multiplikation

Regel

$$(1) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$(2) \quad \frac{a}{b} \cdot z = \frac{a \cdot z}{b}$$

$$(3) \quad z \cdot \frac{a}{b} = \frac{z \cdot a}{b}$$

Beispiel

$$\frac{15}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{15 \cdot 5}{7 \cdot 12} = \text{dann kürzen usw.}$$

$$\frac{15}{7} \cdot 8 = \frac{15 \cdot 8}{7} = \dots$$

$$8 \cdot \frac{17}{2} = \frac{8 \cdot 17}{2} = \dots \text{ dann kürzen usw.}$$

Division

Regel

$$(4a) \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$(4b) \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$(5) \quad \frac{a}{b} : z = \frac{a}{b \cdot z}$$

$$(6) \quad z : \frac{a}{b} = z \cdot \frac{b}{a} = \frac{z \cdot b}{a}$$

Beispiel

$$\frac{15}{7} : \frac{12}{5} = \frac{15}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{15 \cdot 5}{7 \cdot 12} = \text{kürzen ...}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\frac{12}{5}} = \frac{15}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{28}$$

$$\frac{15}{7} : 12 = \frac{15}{7 \cdot 12} = \frac{5}{28}$$

$$12 : \frac{15}{7} = \frac{12 \cdot 7}{15} = \frac{28}{5}$$

Man beachte stets:

Bevor man multipliziert, sollte man kürzen!

Dadurch erhält man kleinere Zahlen und kann schneller rechnen.

7 Einige Textaufgaben

- a) Ordne der Größe nach $\frac{25}{36}$, $\frac{17}{20}$ und $\frac{23}{30}$.

Lösung:

Brüche kann man in aller Regel nur dann vergleichen, wenn man sie auf einen gemeinsamen Nenner gebracht hat. Dann erkennt man, wer am meisten „zählt“.

Wir bestimmen also den Hauptnenner und erweitern die Brüche so, dass sie diesen Nenner bekommen.

$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \square$ Ez = 5
$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot \square \cdot \square \cdot 5$ Ez = 9
$30 = 6 \cdot 5 = 2 \cdot \square \cdot 3 \cdot \square \cdot 5$ Ez = 6
HN = 2 · 2 · 3 · 3 · 5 = 180

Es folgt:

$$\frac{25}{36} = \frac{25 \cdot \boxed{5}}{36 \cdot \boxed{5}} = \frac{125}{180}, \quad \frac{17}{20} = \frac{17 \cdot \boxed{9}}{20 \cdot \boxed{9}} = \frac{153}{180}, \quad \frac{23}{30} = \frac{23 \cdot \boxed{6}}{30 \cdot \boxed{6}} = \frac{138}{180}$$

Jetzt kann man vergleichen und erhält: $\frac{25}{36} = \frac{125}{180} < \frac{23}{30} = \frac{138}{180} < \frac{17}{20} = \frac{153}{180}$.

- b) Wie viele Meter sind $\frac{3}{8}$ von 12 km?

Lösung:

$$\frac{3}{8} \text{ von } 12.000 \text{ m sind } \frac{3}{8} \cdot 12.000 \overset{1500}{\cancel{8}_1} \text{ m} = 3 \cdot 1500 \text{ m} = 4500 \text{ m} \quad (= 4,5 \text{ km})$$

- c) Wie viele Minuten sind $\frac{5}{7}$ von 1 h 3 min?

Lösung:

Umrechnung: $1 \text{ h } 3 \text{ min} = 63 \text{ min}$

$$\frac{5}{7} \text{ von } 1 \text{ h } 3 \text{ min sind dann: } \frac{5}{7} \cdot \cancel{63}^9 \text{ min} = 5 \cdot 9 \text{ min} = 45 \text{ min}$$

- d) Addiere das $\frac{2}{25}$ -fache der Summe von $\frac{5}{2}$ und $\frac{5}{13}$ zum $\frac{2}{11}$ -fachen ihrer Differenz.

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{2}{25} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{13}\right)}_{\text{Summe}} + \frac{2}{11} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{13}\right)}_{\text{Differenz}} &= \frac{2}{25} \cdot \frac{65+10}{26} + \frac{2}{11} \cdot \frac{65-10}{26} = \frac{2}{25} \cdot \frac{75}{26} + \frac{2}{11} \cdot \frac{55}{26} \\ &= \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 13} + \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 13} = \frac{3}{13} + \frac{5}{13} = \frac{8}{13} \end{aligned}$$

- e) In einem Teesack befinden sich noch $7\frac{1}{2}$ kg Darjeeling-Tee, der zum Verkauf in 250 g – Packungen umgefüllt werden soll. Wie viele Packungen erhält man?

Lösung:

Wegen $250\text{ g} = \frac{1}{4}\text{ kg}$ folgt: $7\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{15}{2} : \frac{1}{4} = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{1} = 30$

Man erhält also 30 Packungen Tee zu je 250 g.

- f) In einem Teegeschäft stehen im Regal „Grüner Tee“ 12 Päckchen zu je 100 g Jasmin-Tee, 36 Päckchen „China-Surprise“ mit je $\frac{1}{8}$ kg und 8 Päckchen „Ceylonstar“ mit je $\frac{3}{20}$ kg Tee. Wieviel Tee ist das insgesamt? Führe diese Rechnung zweimal durch, einmal mit Brüchen in der Einheit kg, das zweite Mal in g.

Lösung:

Rechnung in kg:

$$12 \cdot \frac{1}{10}\text{ kg} + 36 \cdot \frac{1}{8}\text{ kg} + 8 \cdot \frac{3}{20}\text{ kg} = \left(\frac{6}{5} + \frac{9}{2} + \frac{6}{5}\right)\text{ kg} = \frac{12 + 45 + 12}{10}\text{ kg} = \frac{69}{10}\text{ kg} = 6,9\text{ kg}$$

Rechnet man in Gramm, muss man Vorarbeit leisten:

$$\frac{1}{8}\text{ kg} = \frac{1}{8} \cdot 1000\text{ g} = 125\text{ g} \quad (\text{Das sollte man WISSEN!})$$

$$\frac{3}{20}\text{ kg} = \frac{3}{20} \cdot 1000\text{ g} = 3 \cdot 50\text{ g} = 150\text{ g} \quad (\text{kürzen: } \frac{1000}{20} = 50 !)$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 100\text{ g} + 36 \cdot \frac{1}{8}\text{ kg} + 8 \cdot \frac{3}{20}\text{ kg} &= 1200\text{ g} + \frac{36 \cdot 125}{= 9 \cdot 4 \cdot 125 = 9 \cdot 500}\text{ g} + 8 \cdot 150\text{ g} \\ &= 1200\text{ g} + 4500\text{ g} + 1200\text{ g} = 6900\text{ g} \end{aligned}$$

Ergebnis: Es handelt sich um $6,9\text{ kg} = 6900\text{ g}$ Tee.

- g) Eine pharmazeutische Fabrik stellt ein Stärkungstrank für Herz-Kreislauf-Erkrankungen her. Es gibt Abfüllgläser für $\frac{1}{4}$ Liter, $\frac{1}{5}$ Liter und für Kliniken Großflaschen für $2\frac{1}{2}$ Liter Fassungsvermögen.

Es sollen 500 Liter abgefüllt werden, und sollen je 1000 der beiden kleinen Flaschen abgefüllt werden, den Rest füllt man in Großflaschen.

Wie viele Großflaschen werden voll?

Lösung:

1. Abfüllung: $1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$ (Liter)

2. Abfüllung: $1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$ (Liter)

Rest: $500 - 250 - 200 = 50$ (Liter)

3. Abfüllung: $50 : 2\frac{1}{2} = 50 : \frac{5}{2} = 50 \cdot \frac{2}{5} = 10 \cdot 2 = 20$

Wobei dann durch 5 gekürzt worden ist.

Ergebnis: Es werden noch 20 Großflaschen gefüllt.

8 Drei Monsteraufgaben für Experten

$$a) \quad \frac{\frac{29}{24} - \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{8}}{1\frac{2}{3} : \frac{8}{15} - \frac{7}{9} : \frac{4}{15}} = \frac{\frac{29}{24} - \frac{5}{21} \cdot \frac{35}{8}}{\frac{5}{3} : \frac{8}{15} - \frac{7}{9} : \frac{4}{15}} = \frac{\frac{29}{24} - \frac{5}{21} \cdot \frac{35}{8}}{\frac{5}{3} \cdot \frac{15}{8} - \frac{7}{9} \cdot \frac{15}{4}} = \frac{\frac{29}{24} - \frac{5}{21} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{5}{1} \cdot \frac{5}{8} - \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{29}{24} - \frac{25}{24}}{\frac{25}{8} - \frac{35}{12}} = \frac{\frac{4}{24}}{\frac{75-70}{24}} = \frac{\frac{4}{24}}{\frac{5}{24}} = \frac{4}{24} \cdot \frac{24}{5} = \frac{4}{5}$$

Folgende Umformungen wurden vorgenommen

- (1) Die gemischten Zahlen wurden in unechte Brüche umgewandelt:

$$4\frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8 + 3}{8} = \frac{35}{8} \quad \text{und} \quad 1\frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

- (2) Im Nenner wurde durch Brüche dividiert, also werden die Kehrwerte multipliziert.
 (3) In drei Produkten wurde gekürzt und dann multipliziert
 (4) Zähler und Nenner wurden nun berechnet.

$$b) \quad \frac{13}{8} \cdot \left(\frac{11}{65} - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{13}{4} \right) \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{10} \right) = \frac{13}{8} \cdot \left(\frac{11}{65} - \frac{26}{65} \right) + \left(\frac{14}{4} - \frac{13}{4} \right) \cdot \left(\frac{8}{10} + \frac{7}{10} \right)$$

$$= \frac{13}{8} \cdot \left(-\frac{15}{65} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{10} = -\frac{13}{8} \cdot \frac{3}{13} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$$

Zuerst wurden in den die Klammern gleiche Nenner gebildet, dann wurden die Klammern berechnet und gekürzt.

$$c) \quad \frac{\frac{23}{60} \cdot \left(\frac{5}{12} + \frac{7}{15} + \frac{9}{20} \right)}{\left(\frac{7}{10} + \frac{5}{8} + \frac{7}{6} \right) : \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{18} + \frac{1}{24} \right)} = \frac{\frac{23}{60} \cdot \left(\frac{25}{60} + \frac{28}{60} + \frac{27}{60} \right)}{\left(\frac{84}{120} + \frac{75}{120} + \frac{140}{120} \right) : \left(\frac{42}{72} + \frac{20}{72} + \frac{3}{72} \right)} = \frac{\frac{23 \cdot 80}{60 \cdot 60}}{\frac{299 \cdot 657}{120 \cdot 72}} = \frac{\frac{23 \cdot 60}{60 \cdot 80}}{\frac{299 \cdot 72}{120 \cdot 657}}$$

Zuerst wurden in den Klammern gleiche Nenner hergestellt

Für die Zählerklammer sucht man das kleinste gemeinsame Vielfache von 12, 15 und 20. In diesen Zahlen stecken die Faktoren 3, 4 und 5, also kommt man auf 60.

Die erste Nennerklammer enthält in den Nennern die Faktoren 8,3 und 5, also 120.

Die zweite Nennerklammer braucht das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und 18: 72.

Im letzten Bruch wurde aus den Divisionen die Multiplikation mit den Kehrwerten.

Jetzt kann man kürzen. Dabei ist der Bruch $\frac{72}{657}$ durch 9 kürzbar, denn die Quersummen im Zähler (9) und im Nenner (18) sind durch 9 teilbar.

$$= \frac{\frac{23}{80}}{\frac{299 \cdot 8}{120 \cdot 73}} = \frac{1 \cdot 23}{2 \cdot 80} \cdot \frac{120^3}{299 \cdot 13} \cdot \frac{73}{8} = \frac{219}{208}$$

Nach der Auflösung des Doppelbruchs entsteht das Produkt dreier Brüche.

Jetzt könnte man untersuchen, ob 299 durch die Primzahl 23 teilbar ist. Das klappt: $\frac{299}{23} = 13$

Am Ende muss man nur noch die Zähler multiplizieren und die Nenner.

9 Lösungen der Trainingsaufgaben

Trainingsaufgabe 1

Bei manchen Ergebnissen tritt ein unechter Bruch auf. Ich habe dann den gemischten Bruch in Klammern dazu geschrieben. Ob man das immer umrechnen soll, hängt von der Aufgabenstellung ab. In der höheren Mathematik rechnet niemand mit gemischten Brüchen, eher in Anwendungsaufgaben.

$$f) \quad \frac{5}{9} + \frac{3}{4} = \frac{20+27}{36} = \frac{47}{36} \left[= 1 \frac{11}{36} \right]$$

$$g) \quad \frac{5}{9} + \frac{7}{18} = \frac{10+7}{18} = \frac{17}{18}$$

$$h) \quad \frac{5}{9} + \frac{17}{24} = \frac{5 \cdot 8 + 17 \cdot 3}{72} = \frac{40+51}{72} = \frac{91}{72} \left[= 1 \frac{19}{72} \right]$$

$$i) \quad \frac{25}{44} - \frac{1}{5} = \frac{125-44}{220} = \frac{81}{220}$$

$$j) \quad \frac{99}{40} - \frac{17}{60} = \frac{99 \cdot 3 - 17 \cdot 2}{120} = \frac{263}{120} \left[= 2 \frac{23}{120} \right]$$

$$k) \quad \frac{41}{81} - \frac{16}{27} = \frac{41-48}{81} = -\frac{7}{81} \quad !!!$$

$$l) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60}$$

$$m) \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{19}{24} = \frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 19}{24} = \frac{57}{24} = \frac{19}{8} \left[= 2 \frac{3}{8} \right]$$

$$n) \quad \frac{4}{21} + \frac{5}{28} - \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 12}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$$

Bei den nächsten drei Aufgaben berechne den Hauptnenner mit Primfaktorzerlegung:

$$o) \quad \frac{33}{56} + \frac{19}{36} = \frac{33 \cdot 9 + 19 \cdot 14}{504} = \frac{297 + 266}{504} = \frac{563}{504}$$

$56 = 7 \cdot 8 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \square \cdot \square$	EZ = 9
$36 = 4 \cdot 9 = \square \cdot 2 \cdot 2 \cdot \square \cdot 3 \cdot 3$	ER = 14
HN = $\frac{7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{56 \cdot 9} = 504$	

$$p) \quad \frac{5}{12} + \frac{7}{18} + \frac{1}{30} = \frac{5 \cdot 15 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 6}{180} = \frac{151}{180}$$

$12 = 6 \cdot 2$
$18 = 6 \cdot \square \cdot 3$
$30 = 6 \cdot \square \cdot \square \cdot 5$
HN = $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

Hier habe ich den Faktor 6 nicht weiter zerlegt, weil er in jedem Nenner auftritt!

$$q) \quad \frac{17}{36} - \frac{3}{20} - \frac{5}{27} = \frac{17 \cdot 15 - 3 \cdot 27 - 5 \cdot 20}{540} = \dots = \frac{74}{540} = \frac{37}{270}$$

$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \square \cdot \square$	EZ = 15
$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot \square \cdot \square \cdot 5 \cdot \square$	EZ = 27
$27 = 3 \cdot 9 = \square \cdot \square \cdot 3 \cdot 3 \cdot \square \cdot 3$	EZ = 20
HN = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 540$	

Trainingsaufgaben 2

a) Schreibe als unechte Brüche:

$$6\frac{2}{11} = \frac{66+2}{11} = \frac{68}{11} \quad 12\frac{3}{4} = \frac{48+3}{4} = \frac{51}{4} \quad 18\frac{1}{2} = \frac{37}{2} \quad 4\frac{5}{36} = \frac{4 \cdot 36 + 5}{36} = \frac{149}{36}$$

b) Schreibe als gemischte Brüche:

$$\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} \quad \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7} \quad \frac{50}{15} = 3\frac{5}{15} = 3\frac{1}{3} \quad \frac{101}{48} = 2\frac{5}{48}$$

c) Berechne:

$$3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} = 8 + \frac{3+4}{12} = 8\frac{7}{12} \quad 13\frac{3}{8} + 7\frac{5}{6} = 20 + \frac{9+20}{24} = 20\frac{29}{24} = 20\frac{24+5}{24} = 21\frac{5}{24}$$

$$9\frac{3}{5} - 4\frac{4}{10} = 5 + \frac{6-4}{10} = 5\frac{2}{10} = 5\frac{1}{5} \quad \text{Besser so: } 9\frac{3}{5} - 4\frac{4}{10} = 9\frac{3}{5} - 4\frac{2}{5} = 5\frac{1}{5}$$

$$15\frac{1}{9} - 8\frac{5}{6} = 7 + \frac{2-15}{18} = 6\frac{18+2-15}{18} = 6\frac{5}{18} \quad \text{Oder: } 15\frac{1}{9} - 8\frac{5}{6} = 14\frac{10}{9} - 8\frac{5}{6} = 6\frac{20-15}{18} = 6\frac{5}{18}$$

Trainingsaufgabe 3

Rechne geschickt, indem du wenn möglich zuerst kürzt:

a) $\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$

b) $\frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{9 \cdot 5} = \frac{4}{45}$

c) $\frac{13}{16} \cdot 12 = \frac{13 \cdot 12}{16} = \frac{13 \cdot 3}{4} = \frac{39}{4}$

d) $\frac{16}{13} : 12 = \frac{16}{13 \cdot 12} = \frac{4}{39}$

e) $\frac{25}{38} : 40 = \frac{25}{38 \cdot 40} = \frac{5}{304}$

f) $\frac{50}{33} \cdot 22 = \frac{50 \cdot 22}{33} = \frac{100}{3}$

g) $4\frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{25 \cdot 12}{6} = 50$

h) $5\frac{1}{3} : 24 = \frac{16}{3 \cdot 24} = \frac{2}{9}$

Trainingsaufgabe 4

Rechne geschickt, indem du wenn möglich zuerst kürzt:

$$\text{a) } \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{4} \cdot \frac{7}{\underset{4}{\cancel{20}}} = \frac{21}{16}$$

$$\text{b) } \frac{\overset{3}{\cancel{24}}}{\underset{1}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{125}}}{\underset{11}{\cancel{88}}} = \frac{15}{11}$$

$$\text{c) } 3 \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{11} = \frac{11}{3} \cdot \frac{9}{11} = 3$$

$$\text{d) } 7 \frac{1}{12} \cdot 5 \frac{1}{34} = \frac{\overset{5}{\cancel{85}}}{\underset{4}{\cancel{12}}} \cdot \frac{\overset{57}{\cancel{171}}}{\underset{2}{\cancel{34}}} = \frac{285}{8}$$

$$\text{e) } \frac{36}{35} : \frac{3}{7} = \frac{\overset{12}{\cancel{36}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{3}{\cancel{3}}} = \frac{12}{5}$$

$$\text{f) } \frac{44}{27} : \frac{8}{81} = \frac{\overset{11}{\cancel{44}} \cdot \overset{3}{\cancel{81}}}{\underset{1}{\cancel{27}} \cdot \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{33}{2}$$

$$\text{g) } 32 : \frac{8}{15} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}} \cdot \overset{15}{\cancel{15}}}{\underset{8}{\cancel{8}}} = 60$$

$$\text{h) } 9 \frac{2}{7} : 2 \frac{3}{5} = \frac{65}{7} : \frac{13}{5} = \frac{\overset{5}{\cancel{65}} \cdot \underset{5}{\cancel{5}}}{\underset{7}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{13}}} = \frac{25}{7}$$

$$\text{i) } \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{11}} = \frac{3 \cdot 11}{5 \cdot 4} = \frac{33}{20}$$

$$\text{h) } \frac{\frac{5}{24}}{\frac{15}{4}} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{6}{\cancel{24}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{1}{18}$$

DEMO