Dreiecke:

Konstruktionen

Kongruente Dreiecke

Datei Nr. 11111

Friedrich Buckel

Stand: 19. Juni 2017

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Inhalt

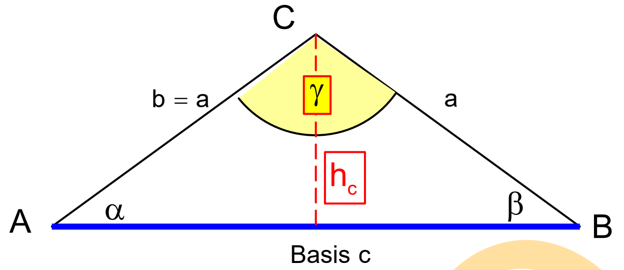
1 Gleichschenklige Dreiecke

Ein Dreieck mit <u>zwei</u> gleich langen Seiten heißt <u>gleichschenkliges</u> Dreieck.

Ein Dreieck mit <u>drei</u> gleich langen Seiten heißt <u>gleichseitiges</u> Dreieck.

Jedes gleichseitige Dreieck ist auch gleichschenklig.

So also kann ein gleichschenkliges Dreieck aussehen:



Ein gleichschenkliges Dreieck hat diese Eigenschaften:

(1) Zwei Seiten sind gleich lang. (Daher der Name gleichschenklig.)

(2) Die dritte Seite heißt die Basis des Dreiecks. In der Abbildung ist es c.

(3) α und β heißen Basiswinkel. Sie sind gleich groß.

(4) Die gestrichelte Linie ist die Höhe h_c. Sie steht senkrecht auf der Basis c und gibt den Abstand der Spitze C von der Basis c an. Sie ist zugleich die Mittelsenkrechte zur Basis und die Winkelhalbierende für den Winkel man der Spitze C.

In den folgenden Konstruktionsbeispielen wird die Basis immer c sein. Ist die Situation anders, ändert sich am Prinzip der Konstruktion nichts.

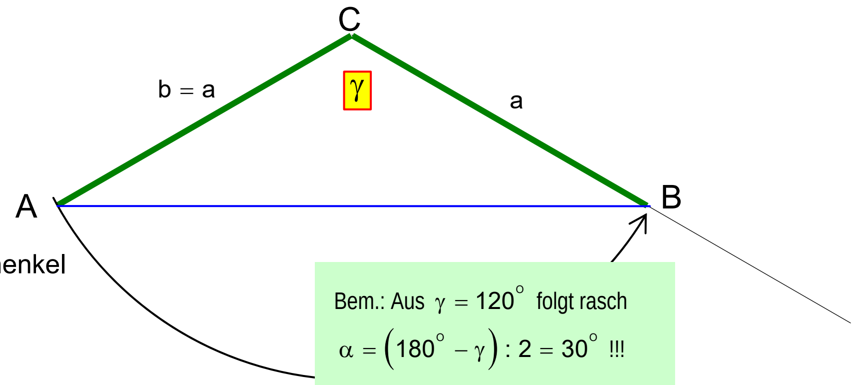
<u>Konstruktionsbeispiel</u> 1:

Gegeben ist $a = b = 4{,}5$ cm und dazu der Winkel $\gamma = 120^\circ$.

Zwei Seiten alleine genügen nicht, weil man sonst nicht weiß, in welche Richtungen man die Strecken zeichnen soll.

Konstruktionstext:

1. Zeichne AC = b.
2. Lege an AC in C γ an.
3. Zeichne um C einen Kreisbogen mit Radius b (also durch A). Dieser Schneidet den freien Schenkel von γ in B.
4. Verbinde A mit B.



Bem.: Aus $\gamma = 120^\circ$ folgt rasch $\alpha = \left(180^\circ - \gamma\right) : 2 = 30^\circ$!!!

<u>Hinweise:</u> Den 4. Satz kann man auch weglassen, denn man hat bereits nach dem 3. Schritt alle drei Ecken gefunden. Der 4. Schritt ist dann selbstverständlich. Den 3. Satz kann man so abkürzen: „Der Kreis um C durch A schneidet den freien Schenkel von γ in B.“
Die Anweisung, einen Kreisbogen zu zeichnen benötigt man dann nicht mehr.

Der Begriff *„freier Schenkel“* bedeutet, dass man darauf noch den Endpunkt B der Strecke c sucht.

Vereinbarung: **Man soll zur Konstruktion nur die gegebenen Stücke verwenden, also keine** die man daraus noch berechnet hat (wie hier α).

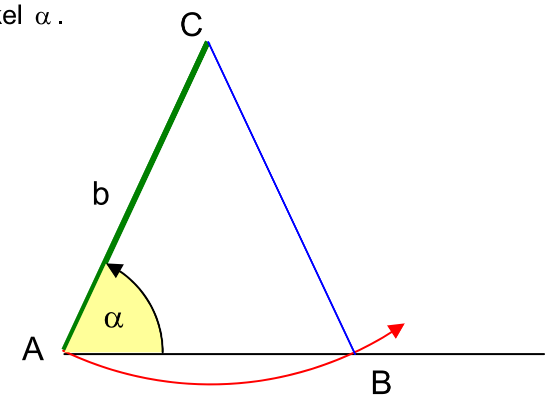
Konstruktionsbeispiel 2:

Gegeben ist $a = b = 4{,}5$ cm und dazu der Winkel $\alpha = 65^\circ$.

Jetzt könnte man mit AB = b beginnen oder mit dem Winkel α.
Ich beginne mit α, damit die Basis horizontal liegt.

Konstruktionstext:

1. Zeichne den Winkel α.
2. Trage an seinem oberen Schenkel die Strecke AC = b bis C ab.
3. Der Kreis um C durch A schneidet den freien Schenkel von α in B.



Berechnung von γ: $\gamma = 180^\circ - 2\cdot\alpha = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

Konstruktionsbeispiel 3:

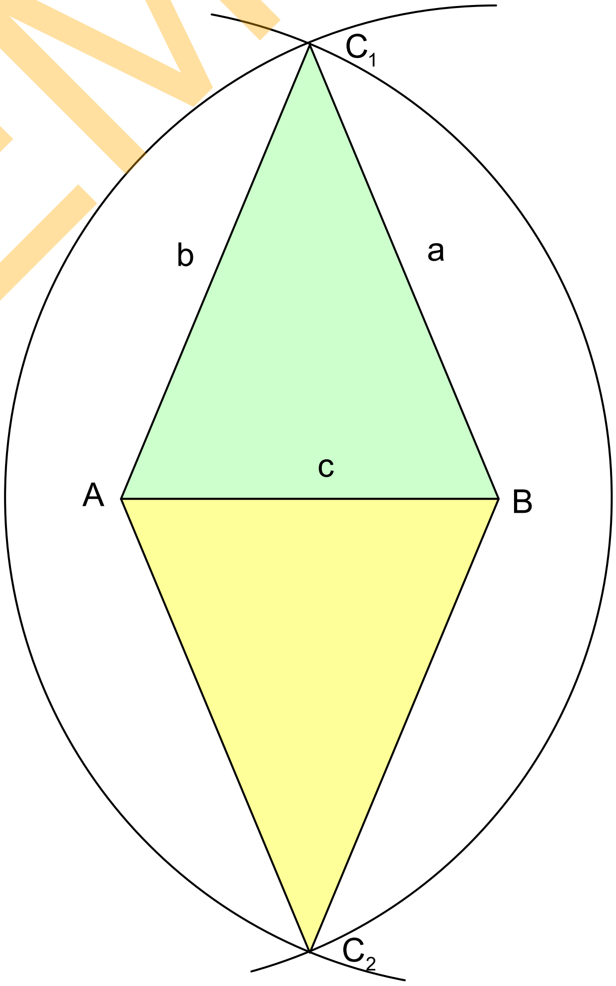
Gegeben sind $a = b = 6{,}5$ cm und $c = 5{,}0$ cm

Konstruktionstext:

1. Zeichne die Strecke AB = c.
2. Die Kreise um A mit Radius b und um B mit Radius a (=b) schneiden sich in C_1 und C_2.

Die beiden Lösungen ABC_1 und ABC_2 sind deckungsgleich (kongruent).

Aus diesem Grunde reicht es eigentlich, die obere Lösung zu zeichnen.
Es sei denn, es werden ausdrücklich alle Lösungen verlangt.

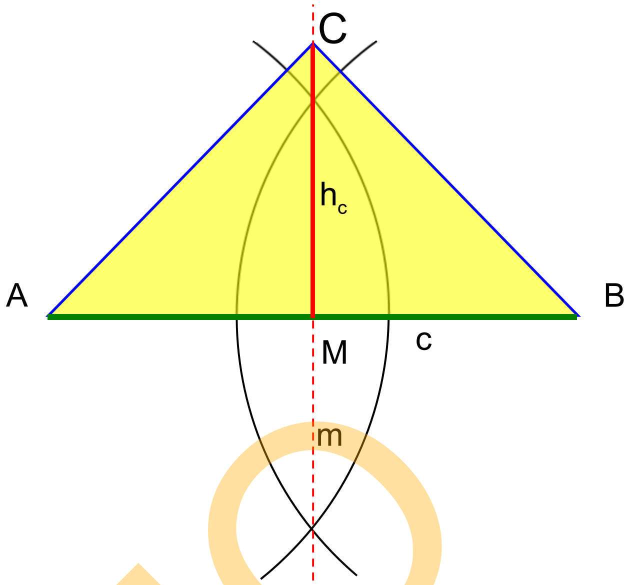


Konstruktionsbeispiel 4:

Gegeben sei die Basis $c = 7$ cm und die Höhe $h_c = 3{,}6$ cm

Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2. Konstruiere mit zwei Kreisbögen um A und B mit gleichem Radius die Mittelsenkrechte m zu AB. Diese schneidet AB in M.
3. Trage von M aus auf m die Höhe h_c ab bis C



Bemerkung:

Trägt man h_c nach unten ab, erhält man ein zweite kongruente Lösung.

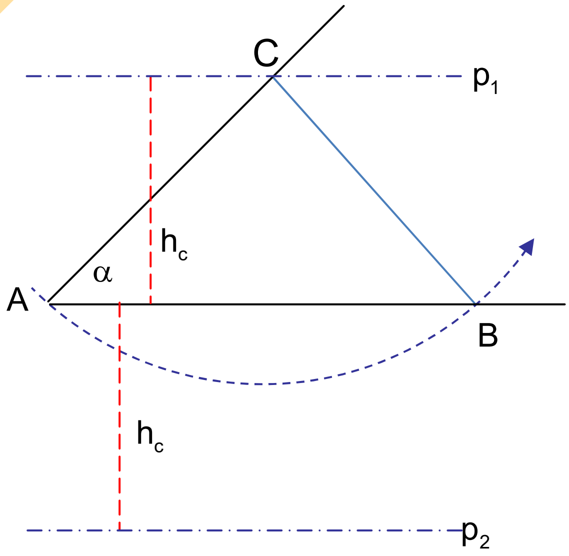
Konstruktionsbeispiel 5:

Gegeben ist der Basiswinkel $\alpha = 45^\circ$ und die Höhe $h_c = 3{,}0$ cm

1- Zeichne den Winkel α.

Wenn h_c gegeben ist, dann kennt man den Abstand des Punktes C von der Basis AB. Alle Punkte, die von AB den Abstand 3 cm haben, liegen auf zwei Parallelen zu AB im Abstand 3 cm. Daher:

2. Zeichne zwei Parallelen p_1 und p_2 zum unteren Schenkel von α im Abstand $h_c = 3$ cm.
3. p_1 schneidet den oberen Schenkel von α in C.
4. Der Kreis um C durch A schneidet den unteren (noch freien) Schenkel von α in B.



Die zweite Parallele p_2 wurde nicht gebraucht.
Denn der Schenkel von α wurde nach oben gezeichnet und schneidet daher p_2 nicht.

MERKE also:

Ist für eine Konstruktion eine Höhe gegeben, also der Abstand eines Punktes zu einer Seite, dann liegt dieser Punkt auf einer Parallelen zu jener Seite.

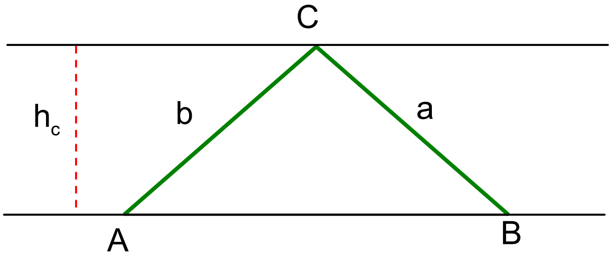
Ich nenne es den Höhentrick: **Ist eine Höhe gegeben, zeichne Parallelen!**

Konstruktionsbeispiel 6:

Gegeben sei die Seite a = 5 cm und die Höhe h_c = 3 cm

Um hier eine Konstruktion zu finden, solle man mit einer Planfigur beginnen:

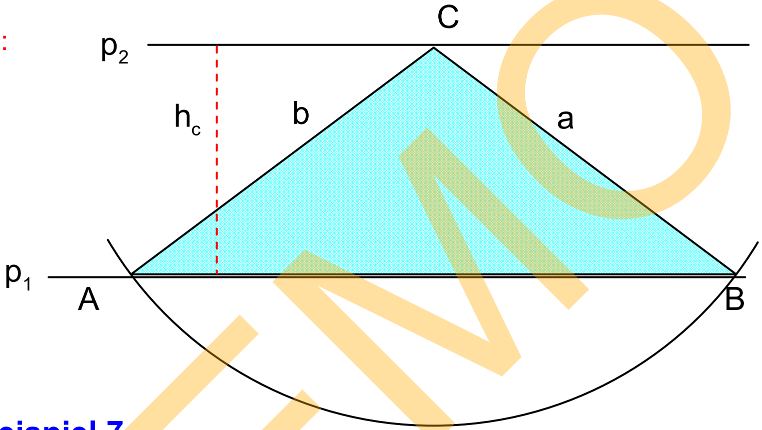
Wir wissen, dass AB und C auf zwei Parallelen im Abstand 3 cm liegen müssen. Also beginnen wir mit diesen Parallelen! (Höhentrick anwenden).



Konstruktionstext:

1. Zeichne zwei Parallelen p_1 und p_2 im Abstand h_c = 3 cm.
2. Wähle auf der oberen Parallelen p_2 einen Punkt C.
3. Der Kreis um C mit Radius a schneidet die andere Parallele p_1 in A und B.

Konstruktion :



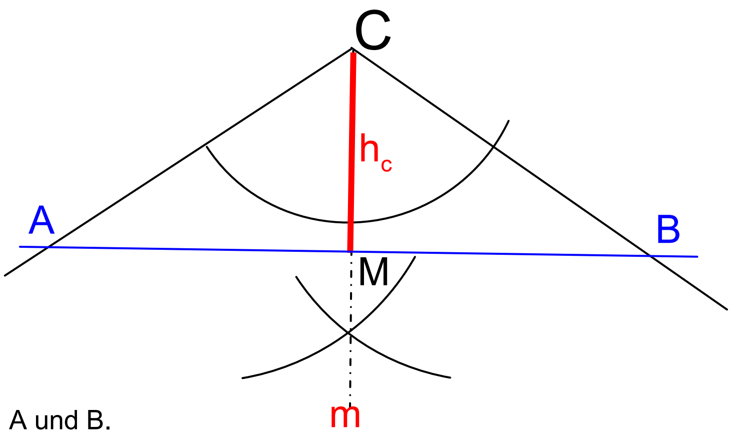
Konstruktionsbeispiel 7

Gegeben ist $\gamma = 112^\circ$ und die Höhe h_c = 3 cm

WISSEN: **In jedem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze bei C ist die Höhe h_c mit der Winkelhalbierende von γ identisch:**

Konstruktionstext:

1. Zeichne den Winkel γ .
2. Konstruiere mit drei Kreisbögen die Winkelhalbierende von γ .
3. Trage auf ihr von C aus h_c ab (bis M).
4. Zeichne eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden (also zu h_c) durch M.
   Diese schneidet die Schenkel von γ in A und B.



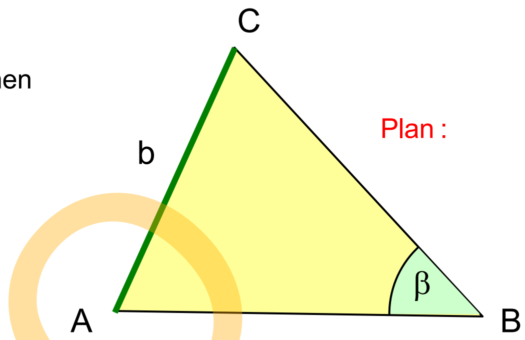
Das letzte Beispiel ist das schwerste. Ich gebe die Basis vor und den Winkel an der Spitze. Lässt man Schüler probieren, dann schlagen sie meist nach einiger Zeit vor, einen Basiswinkel auszurechnen und damit die Konstruktion zu bestreiten. Doch das wird nicht gestattet !

Wir haben uns daran gewöhnt, dass AB die Basis ist.
Daher zum Umgewöhnen noch eine andere Lage eines gleichschenkligen Dreiecks:

Konstruktionsbeispiel 8:

Gegeben sei die Basis AC = b = 3,8 cm und $\beta = 70^\circ$

Ohne Planfigur geht hier nichts:



Wir dürfen nicht die Methode anwenden, dass wir α berechnen und dann zur Zeichnung verwenden. (Spielregel !!!)

Konstruktionstext:

1. Zeichne die Strecke AC = b (Basis).
   (In der Abbildung heißen sie A' und C' - siehe unten !)

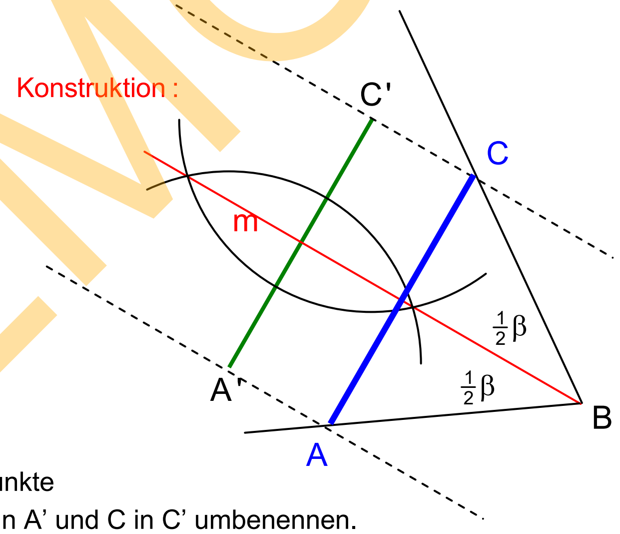
2. Konstruiere die Mittelsenkrechte m zu AC.
   (Siehe Abschnitt 2)

3. Wähle B als beliebigen Punkt auf m.

4. Lege an m in B nach beiden Seiten den Winkel $\frac{1}{2}\beta$ an.

5. Weil die freien Schenkel nicht durch A und C gehen verschieben wir AC parallel entlang m. Dies macht man, indem man durch A und C zwei Parallelen zu m zeichnet (gestrichelte Linien).

   Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den freien Schenkeln von β sind die wahren Punkte A und C. Man sollte daher nachträglich A in A' und C in C' umbenennen.



Hinweis:

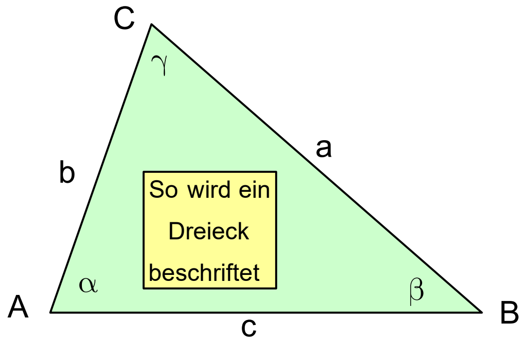
Man kann diese Konstruktion auch mit β beginnen, diesen Winkel halbieren und dazu eine Senkrechte zeichnen. Auf ihr trägt man von der Winkelhalbierenden aus nach beiden Seiten $\frac{1}{2}$b ab bis A' und C'. Dann zeichnet man die beiden Parallelen durch A' und C' und erhält dann A und C. Die Zeichnung sieht genau so aus, nur wird die rote Linie oben als Mittelsenkrechte eingesetzt, während sie in der zweiten Variante als Winkelhalbierende entsteht.

2 Systematisches Zeichnen von Dreiecken

Merke dir zuerst, wie man *normalerweise* die Eckpunkte, die Innenwinkel und die Seiten eines Dreiecks bezeichnet.

Die Seiten erhalten kleine Buchstaben und diese passen zur gegenüber liegenden Ecke!

Natürlich gibt es auch andere Bezeichnungen, nur die beachten wir hier nicht.



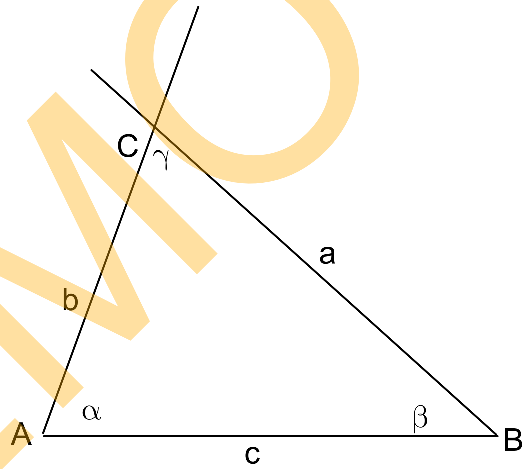
Beispiel 1

Zeichne ein Dreieck aus der Grundseite c = 6 cm und den Winkeln $\alpha = 70^\circ$ und $\beta = 42^\circ$.
Miss die anderen Seiten und Winkel. Berechne zum Vergleich die Größe des Winkels γ.

Lösung

Konstruktionstext:

1. Zeichne die Strecke AB = c.
2. Lege an AB in A den Winkel α und in B den Winkel β an.
3. Die freien Schenkel der Winkel α und β schneiden sich in C.



Erklärung:

Die Winkel α und β haben jeweils zwei Schenkel.

Der untere Schenkel ist durch die Endpunkte A und B zu einer Strecke geworden, während der obere, neu gezeichnete noch eine Halbgerade ist .

Eine Halbgerade hat einen Anfangspunkt aber keinen Endpunkt.

Ein Schenkel, der also noch Halbgeraden ist, nennt man daher bei solchen Konstruktionen gewöhnlich den freien Schenkel des betreffenden Winkels.

Messung:

Wir messen nach und finden a = 6,1 cm und b = 4,3 cm sowie $\gamma = 68^\circ$

Diese Winkelgröße sollte man gemessen haben, denn sie ergibt sich auch über die Berechnung über die Winkelsumme, die ja 180° betragen soll:

$$\gamma = 180^\circ - 70^\circ - 42^\circ = 68^\circ \quad \text{oder so:} \quad \gamma = 180^\circ - \left(70^\circ + 42^\circ\right) = 68^\circ .$$

Dies ist eine Bestätigung durch den Satz über die Winkelsumme, dass wir richtig gemessen haben.

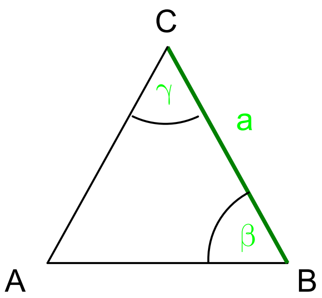
Beispiel 2

Konstruiere ein Dreieck aus der Seite a = 7 cm und den Winkeln $\gamma = 110^O$ und $\beta = 35^\circ$.
Miss die anderen Seiten und Winkel. Berechne zum Vergleich die Größe des Winkels γ .

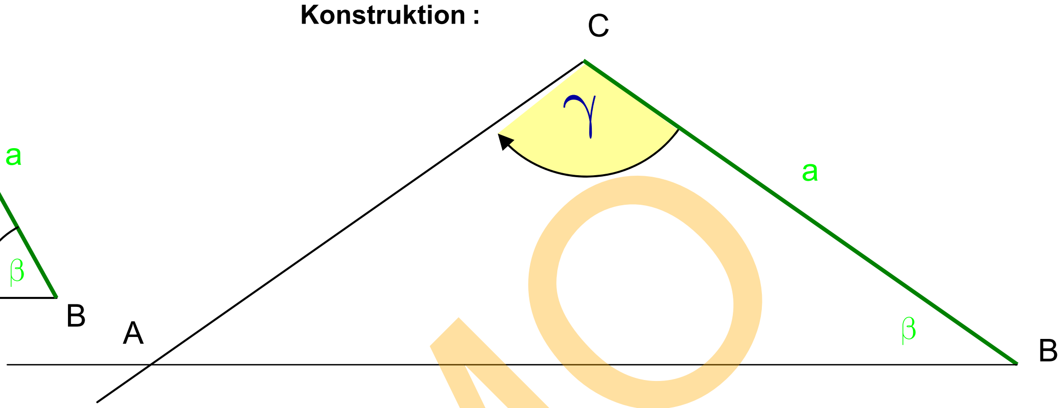
Lösung

Wenn die Aufgaben etwas komplizierter werden, beginnt man mit einer Planfigur, d.h. einer Skizze (die noch nicht die richtigen Maße hat) und markiert dort farblich (oft mit **g**rün) die **g**egebenen Stücke. Daraus sollte man dann den Konstruktionsweg erkennen.

Planfigur:



Konstruktion :

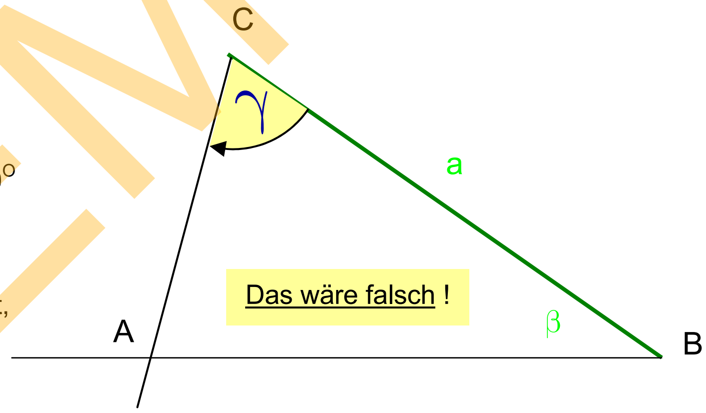


Bemerkung:

Der Winkel γ ist stumpf, man achte also genau auf die Form des Dreiecks.

Hier passieren oft Fehler, indem man die 110^O an der falschen Stelle abliest, also dort wo eigentlich 70^O stehen.

Wer versehentlich mit $\gamma = 70^O$ gearbeitet hat, der hat dieses Dreieck konstruiert.



Bei solchen Aufgaben wird sehr oft ein Konstruktionstext verlangt.
Er beschreibt, wie die Konstruktion abläuft:

Konstruktionstext:

(1) Zeichne die Strecke BC = a.

(2) Lege an AB in B den Winkel β und in C den Winkel γ an.

(3) Die freien Schenkel von β und γ schneiden sich in A.

<u>**Messwerte**</u>: c= 11,5 cm, b = 7,0 cm (Abweichungen von 1 mm sind zulässig) und $\gamma = 35^\circ$,

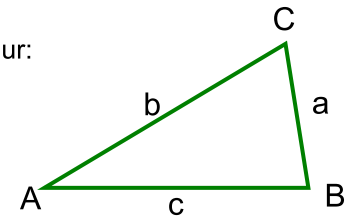
was auch mit der Winkelsumme übereinstimmt: $\gamma = 180^\circ - 110^\circ - 35^\circ = 35^\circ$.

3 Konstruktionstypen für Dreiecke
(wenn nur Seiten und Winkel gegeben sind)

3.1 Der Fall SSS: Gegeben sind die drei Seiten des Dreiecks.

Beispiel 1: Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5{,}8$ cm, $b = 4{,}2$ cm und $c = 6{,}5$ cm

Planfigur:

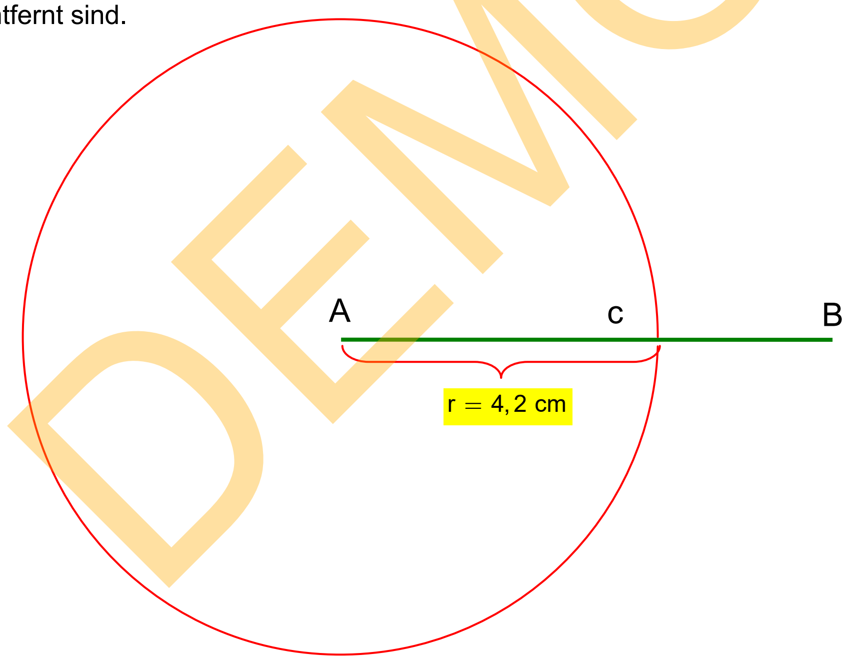


Wichtig ist es, dass man weiß, dass beim Dreieck gleichnamige Seiten und Ecken gegenüber liegen.

Überlegung zur Konstruktion:

Man kann hier mit der Strecke AB = c beginnen. Dann weiß man aber nicht, in welcher Richtung man nach C gelangt, weil kein Winkel gegeben ist.

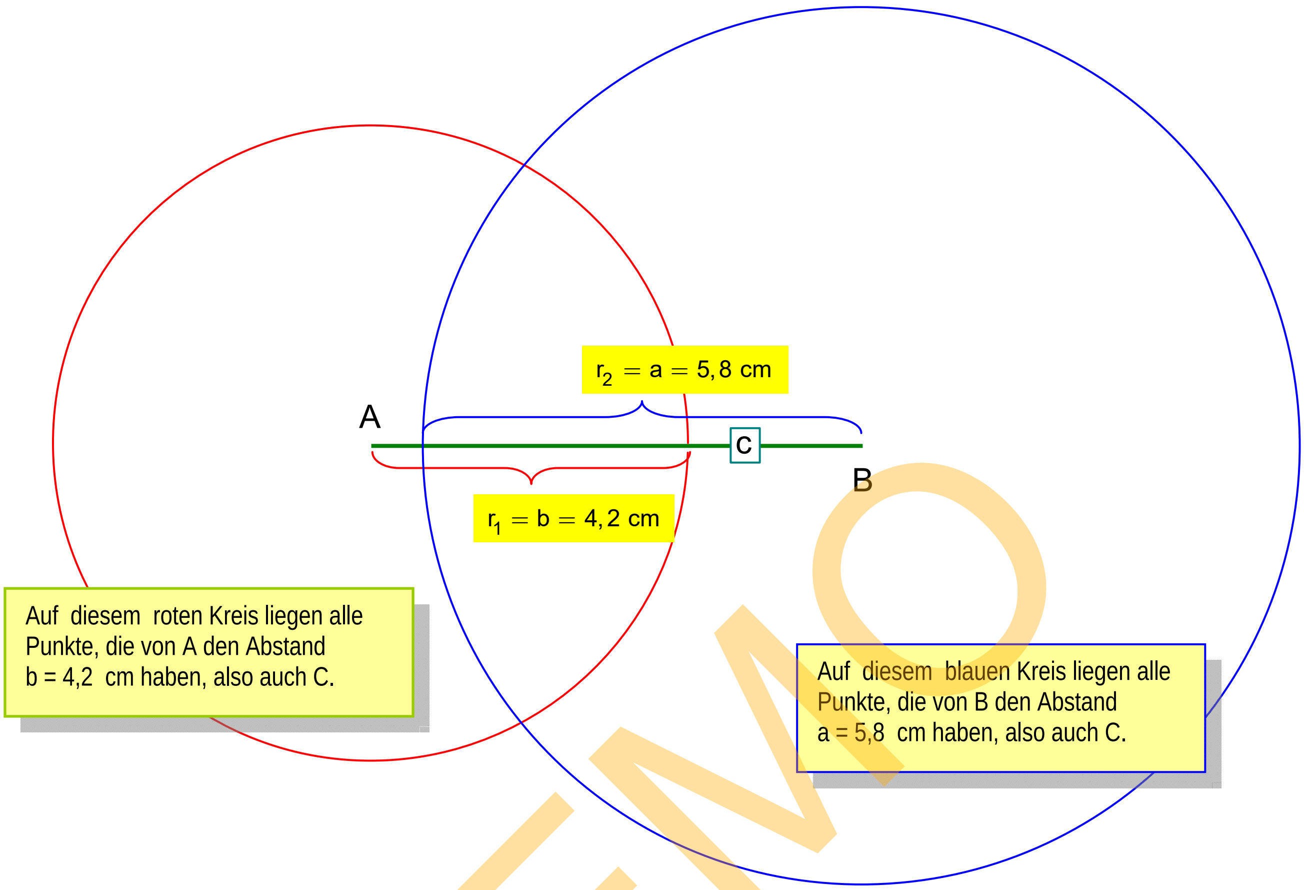
Andererseits weiß man, dass b = AC = 4,2 cm lang ist, das heißt, dass C auf jeden Fall auf einem Kreis um A mit Radius 4,2 liegen muss, weil nur dort alle Punkte liegen, die von A 4,2 cm entfernt sind.



Nun kennt man noch die Länge der Strecke BC = a = 5,8 cm. Das bedeutet, dass der Punkt C von B den Abstand 5,8 cm hat. Folglich liegt C, wie alle Punkte, die von B 5,8 cm entfernt sind, auf einem Kreis um B mit Radius 5,8 cm.

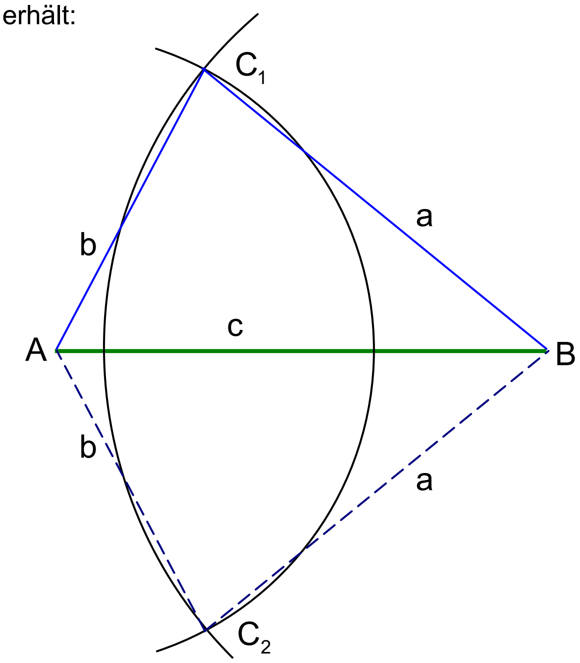
Diesen Kreis zeichnet man jetzt auch ein, zusätzlich zum ersten Kreis:

Hier also die Strecke AB = c zusammen mit den beiden Kreisen um A mit Radius b und um B mit Radius a.



Jetzt kommt die entscheidende Überlegung für diese Konstruktion:

Wenn C auf dem roten und auf dem blauen Kreis liegen soll, dann kann er nur in den beiden Schnittpunkten der Kreise liegen. Daher wird man für die Konstruktion nur zwei kleine Kreisbögen zeichnen, eben so groß, dass man ihre Schnittpunkte erhält:



Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.

2- Zeichne Kreise um A mit Radius b und um B mit Radius a.

Sie schneiden sich in C_1 und C_2.

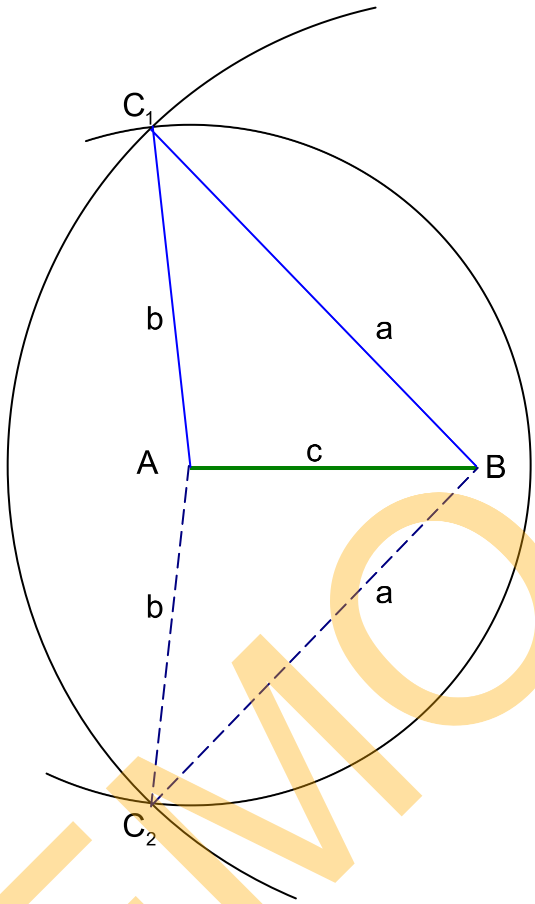
Es gibt zwei Lösungen: ABC_1 und ABC_2.

Hinweis:

Schneidet man das Viereck AC_2BC_1 aus und faltet es entlang c, dann passen das obere und das untere Dreieck genau aufeinander. Man sagt, dass sie **denkungsgleich** oder **kongruent** sind!

Daher ist ABC_2 kein wirklich neues Dreieck und man lässt es oft weg.

Beispiel 2: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 3{,}8$ cm, $a = 6{,}2$ cm und $b = 4{,}5$ cm



Diese Figur sieht jetzt etwas anders aus, weil sich bei A ein stumpfer Winkel α ergeben hat.

Der Konstruktionstext ist derselbe wie in (a). Ich will ihn hier jedoch etwas kürzer formulieren.
Man achte auf den Unterschied:

Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2- Die Kreise um A mit Radius b und um B mit Radius a schneiden sich in C_1 und C_2.

Es gibt zwei Lösungen: ABC_1 und ABC_2.

Bemerkung

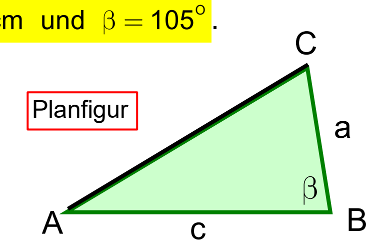
Auch hier passen die beiden Dreiecke genau aufeinander, sie sind deckungsgleich oder kongruent.
Und wenn alle Personen, die Dreiecke mit diesen Maßen konstruiert haben, ihre Dreiecke ausschneiden, dann passen alle genau aufeinander.

Das Ergebnis ist der 1. Kongruenzsatz (SSS):

Dreiecke, die in ihren drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent

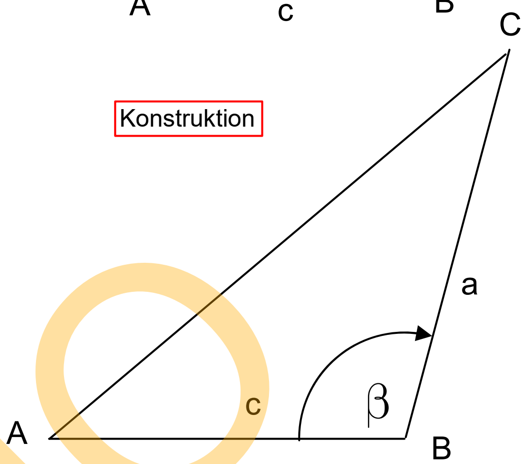
3.2 Der Fall SWS: Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

Beispiel 3: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 4{,}7$ cm, $a = 5{,}3$ cm und $\beta = 105^\circ$.



Wenn man wie hier zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt, dann man vom Scheitel B des Winkels auf in beiden Richtungen bis zum Endpunkt vorangehen, d.h. man hat dann gleich alle drei Eckpunkte.

In der Praxis wird man mit einer der beiden Strecken beginnen, etwa mit c, dann den Winkel anlegen und dann auf seinem freien Schenkel die andere Strecke abtragen.



Konstruktionstext:

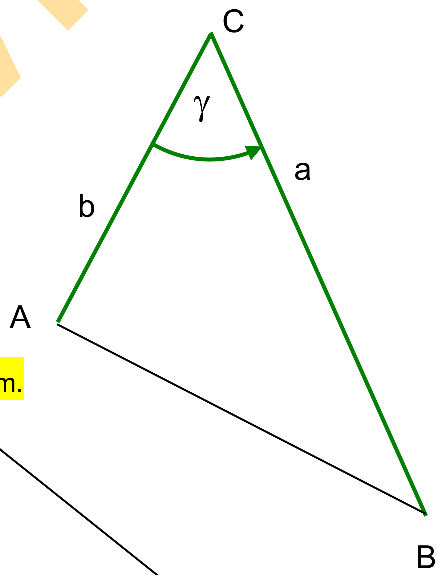
1. Zeichne AB = c.
2. Lege an c in B Winkel β an.
3. Trage auf seinem freien Schenkel von B aus a ab bis C.

Beispiel 4

Konstruiere ein Dreieck aus $a = 7$ cm, $b = 4{,}3$ cm und $\gamma = 52^O$,

Konstruktionstext:

1. Zeichne AC = b.
2. Lege an b in C Winkel γ an.
3. Trage auf dem freien Schenkel von γ von C aus die Strecke a bis B ab.

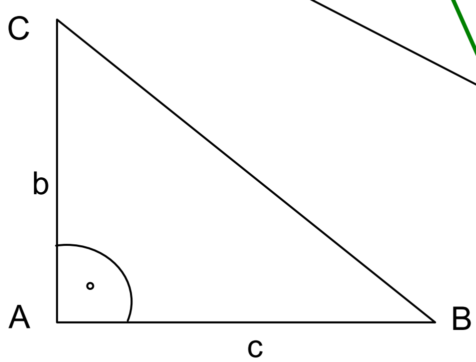


Beispiel 5

Konstruiere ein Dreieck aus $\alpha = 90^\circ$, b = 4 cm und c = 5 cm.

Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2. Lege an c in A Winkel α an.
3. Trage auf dem freien Schenkel von α von A aus die Strecke b bis C ab.



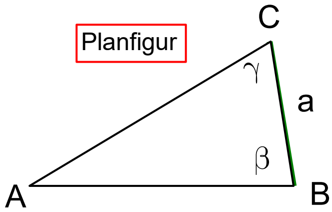
Ergebnis: 2. Kongruenzsatz (SWS):

Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent

3.3 Der Fall WSW: Gegeben sind zwei Winkel und die eingeschlossene Seite

Beispiel 6: Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5{,}8$ cm, $\beta = 60^O$ und $\gamma = 80^O$

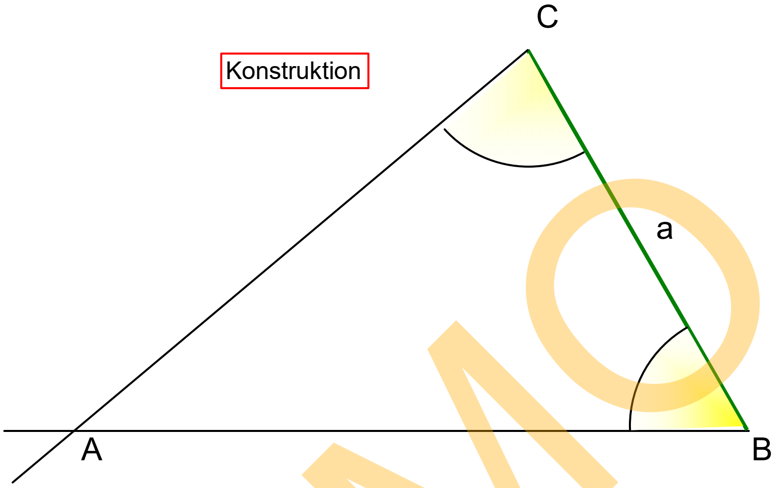
Planfigur



Eine Planfigur soll helfen, dass man sich die Situation besser vorstellen kann und man einen Weg für die Konstruktion findet.

Wichtig ist es, dass man weiß, dass beim Dreieck gleichnamige Seiten und Ecken gegenüber liegen !

Konstruktion



Konstruktionstext:

1. Zeichne a = BC. ← Dieser Satz legt fest, dass B und C die Endpunkte der Strecke a sein sollen !!!
2. Lege an a in B den Winkel β an.
3. Lege an a in C den Winkel γ an.
4. Die freien Schenkel von β und γ schneiden sich in A.

Erklärung: Wenn man die Strecke BC gezeichnet hat und daran den Winkel α anlegt, dann besitzt dieser zwei unterschiedliche Schenkel: Auf dem einen Schenkel befindet sich der Endpunkt C der Strecke a = BC. Der andere aber besitzt noch keinen Streckenendpunkt. Daher heißt er der **freie Schenkel** von α

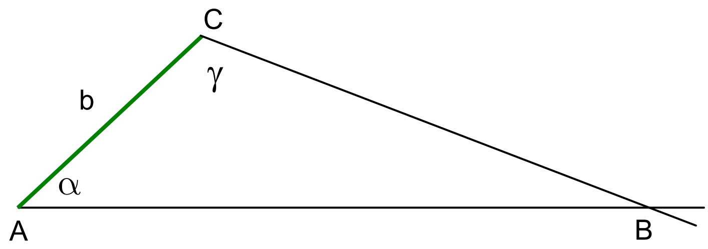
Hinweis:

Solche Texte fallen Kindern oft sehr schwer. Daher wird empfohlen, diese Fachsprache der Mathematik zunächst einmal auswendig lernen zu lassen.

Beispiel 7: Konstruiere ein Dreieck aus b = 3,5 cm, $\alpha = 47^{O}$ und $\gamma = 112^{O}$

Konstruktionstext:

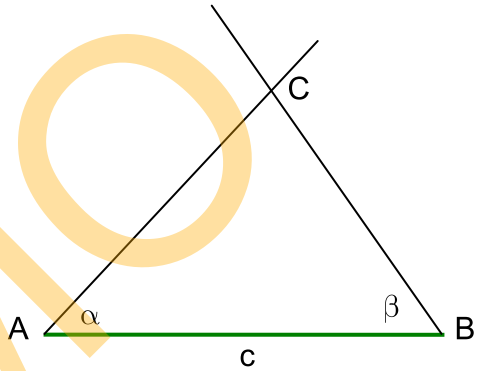
1. Zeichne AC = b
2. Lege an b in A den Winkel α an.
3. Lege an b in C den Winkel γ an.
4. Die freien Schenkel von α und γ schneiden sich in B.



Beispiel 8: Konstruiere ein Dreieck aus c = 5,3 cm, $\alpha = 47^{O}$ und $\beta = 55^{O}$

Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c
2. Lege an c in A den Winkel α an.
3. Lege an c in B den Winkel β an.
4. Die freien Schenkel von α und β schneiden sich in C.

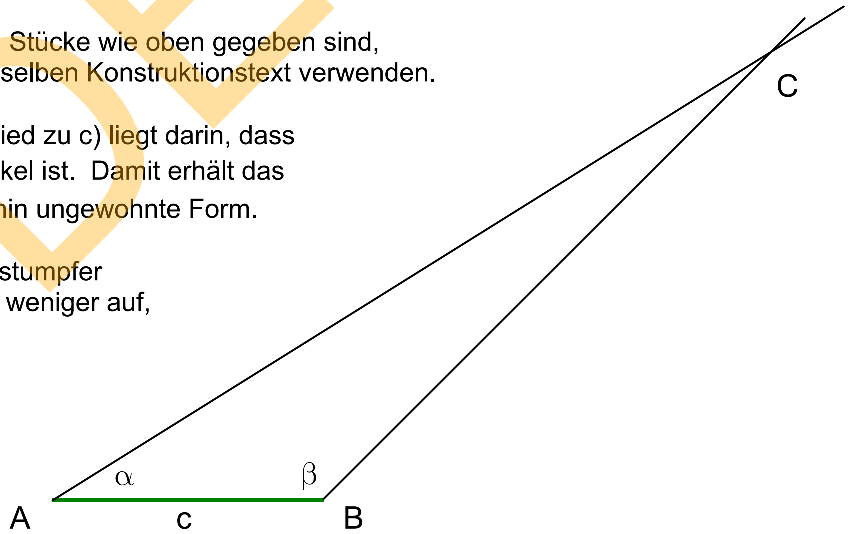


Beispiel 9: Konstruiere ein Dreieck aus c = 3,6 cm, $\alpha = 32^{O}$ und $\beta = 135^{O}$

Da hier die gleichen Stücke wie oben gegeben sind,
kann man auch denselben Konstruktionstext verwenden.

Der große Unterschied zu c) liegt darin, dass β ein stumpfer Winkel ist. Damit erhält das Dreieck eine bis dahin ungewohnte Form.

Auch in b) war bereits ein stumpfer Winkel im Spiel, nur fiel er weniger auf, weil er als γ oben lag.



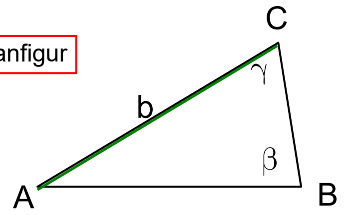
Ergebnis: 3. Kongruenzsatz (WSW):

Dreiecke, die in zwei Winkel und der eingeschlossenen Seite übereinstimmen, sind kongruent

3.4 Der Fall WWS: Gegeben sind zwei Winkel und eine Gegenseite

Beispiel 10: Konstruiere ein Dreieck aus $b = 6,8$ cm, $\beta = 60^O$ und $\gamma = 80^O$

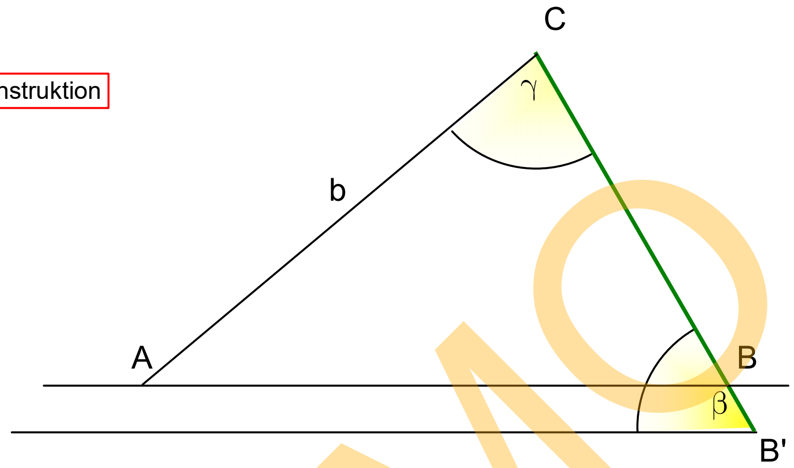
Planfigur



Eine Planfigur soll helfen, dass man sich die Situation besser vorstellen kann und man einen Weg für die Konstruktion findet.

Wichtig ist es, dass man weiß, dass beim Dreieck gleichnamige Seiten und Ecken gegenüber liegen.

Konstruktion



Konstruktionstext:

1. Zeichne AC = b.
2. Lege an AC in C den Winkel γ an.
3. Wähle auf dem freien Schenkel von γ einen Punkt B' und lege an CB' in B' den Winkel β an.
4. Zeichne zum freien Schenkel von β eine Parallele. Diese schneidet die Gerade (CB') in B.

MERKE:

Bei dieser Aufgabenstellung geht man so vor, dass man zunächst den 2. Winkel an einer beliebigen Stelle anlegt. Die Parallele zum freien Schenkel liefert dann den richtigen Punkt.

Alle Dreiecke, die zum Fall WWS gehören sind eindeutig im Ergebnis. Und damit auch kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und einer Gegenseite übereinstimmen. Nimmt man den Fall WSW und WWS zusammen, dann kann man den 3. Kongruenzsatz umfassender formulieren:

Ergebnis: 3. Kongruenzsatz (WSW und WWS)

Dreiecke, die in zwei Winkel und einer Seite übereinstimmen, sind kongruent

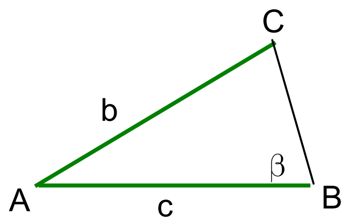
3.5 Der Fall SSW: Gegeben sind zwei Seiten und ein Gegenwinkel

Diese Aufgabe ist schwer und führt auch zu Fällen in denen es keine oder zwei verschiedene Lösungsdreiecke gibt. Hier drei Beispiele, zu jedem der drei Fälle eines.

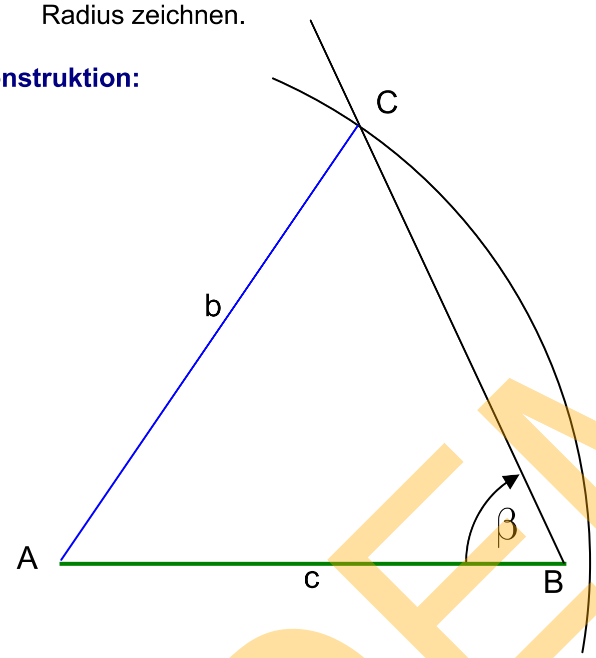
Beispiel 11: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6{,}7$ cm, $b = 7{,}0$ cm und $\beta = 65^\circ$.

Planfigur:

Man muss mit der Seite beginnen, an die man den Winkel anlegen kann, also mit c, und dann wird β angelegt.
Jetzt weiß man noch, dass C von A den Abstand 7,0 cm hat.
Daher wird man um A einen Kreis mit eben diesem Radius zeichnen.



Konstruktion:



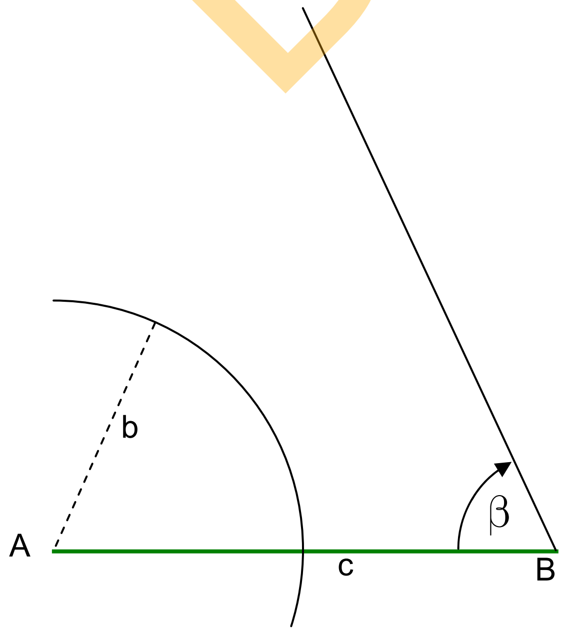
Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2. Lege an c in B β an.
3. Der Kreis um A mit Radius b schneidet den freien Schenkel von β in C.

Hier gibt es genau einen Schnittpunkt C (1. Fall)

Wie man erkennt, ist die Lösung eindeutig!

Beispiel 12: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6{,}7$ cm, $b = 3{,}3$ cm und $\beta = 65^\circ$.



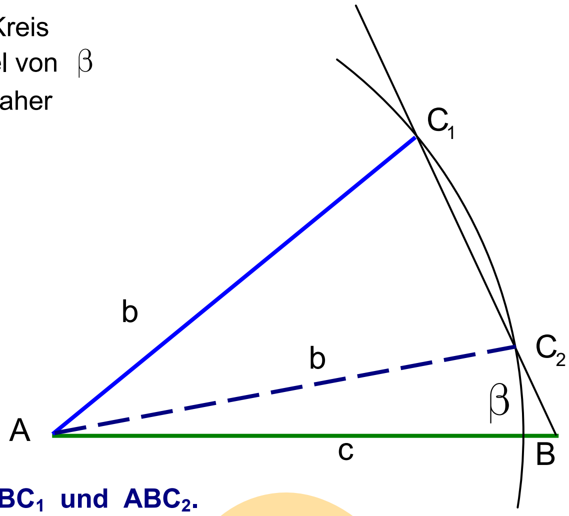
Diese Aufgabe hat <u>keine Lösung</u>, weil der Kreis um A den freien Schenkel von β nicht schneidet.

Die Strecke b ist dafür zu kurz.

(2. Fall)

Beispiel 13: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6{,}7$ cm, $b = 6{,}3$ cm und $\beta = 65^\circ$.

Jetzt beobachten wir den Fall, dass der Kreis um A mit Radius b den freien Schenkel von β zweimal schneidet. Diese Aufgabe hat daher zwei verschiedene Lösungen. (3. Fall)

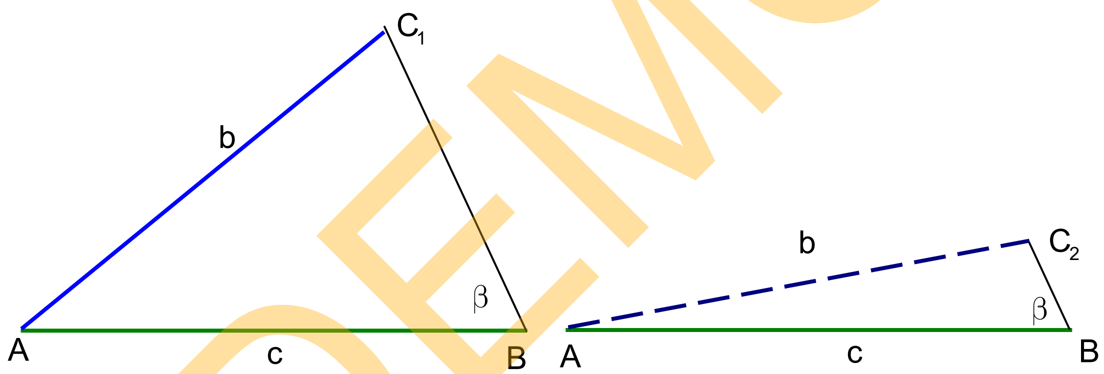


Konstruktionstext:

1. Zeichne AB = c.
2. Lege an c in B β an.
3. Der Kreis um A mit Radius b schneidet den freien Schenkel von β in C_1 und C_2.

Es gibt zwei <u>verschiedene</u> Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

Hier die beiden Lösungsdreiecke (ohne störende andere Linien.)



Grundprinzip für Konstruktionen

1. Beginne mit einer Strecke, damit hat man zwei Eckpunkte festgelegt.
2. Für den dritten Eckpunkt braucht man zwei Bedingungen.

   Ein Winkel gibt die Richtung an, in der man auf die dritte Ecke zugeht. Eine weitere Strecke gibt die Entfernung des dritten Punktes von einer der beiden anderen Ecken an, also zeichnet man damit einen Kreisbogen.

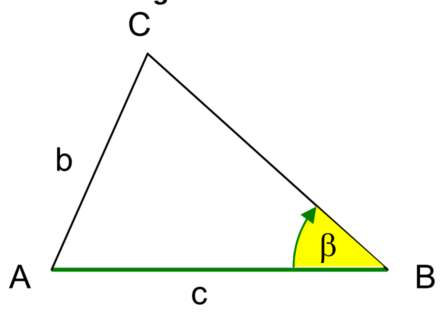
   Dort wo sich Kreisbögen und freie Schenkel schneiden, liegt der gesuchte 3. Eckpunkt.

Man kann die Beispiele 11, 12 und 13 zu einem Unterrichtsprojekt zusammenfassen mit dem Thema:

Wie konstruiert man den Fall SSW ?

Die Aufgabenstellung: ***Konstruiere aus 2 Seiten und einem Gegenwinkel ein Dreieck.***

Planfigur:



In diesem Beispiel sind also b und c gegeben und dazu ein Gegenwinkel, nämlich β (Es könnte auch γ gegeben sein).

Der Konstruktionsweg ist klar:

Man zeichnet AB = c, legt daran in B den Winkel β an.

Jetzt liegt C sowohl auf dem freien Schenkel von β, wie auch auf einem Kreis um A mit Radius b. Und dieser Kreis schafft nun Probleme.

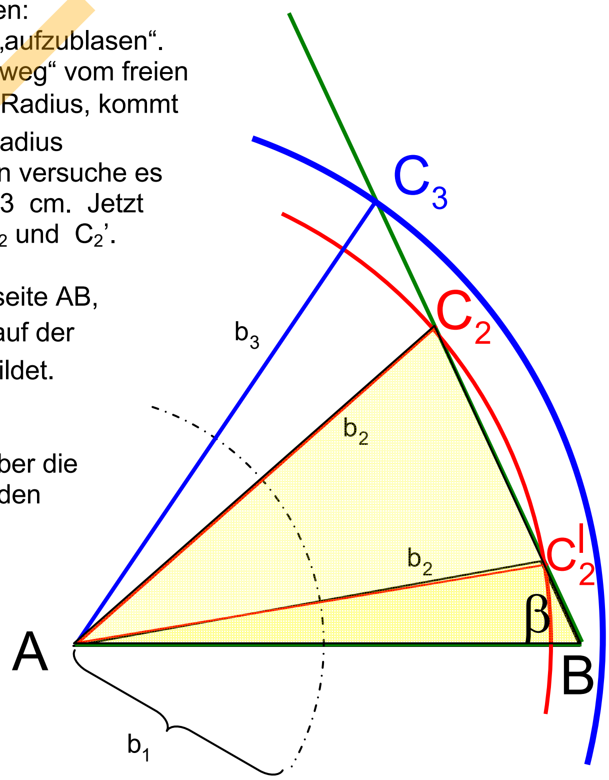
Vorgaben für die Konstruktion:

$c = 6{,}7$ cm, $\beta = 65^\circ$ **und nun noch b und zwar**

im 1. Fall $b_1 = 3{,}3$ cm,
im 2. Fall $b_2 = 6{,}3$ cm
im 3. Fall $b_3 = 7{,}0$ cm.

Wir tragen alle drei Kreisbögen in dieselbe Zeichnung ein:

Man kann sich dazu diese Geschichte vorstellen:
Ein Kreis beginnt sich um den Punkt A herum „aufzublasen“. Bei kleinem Radius, etwa b_1 ist er noch „weit weg“ vom freien Schenkel des Winkels β. Mit zunehmendem Radius, kommt er ihm jedoch immer näher. Bei etwa 6,1 cm Radius berührt er ihn (dies ist nicht eingezeichnet, man versuche es selbst!). Dann erreichet er den Radius $b_2 = 6{,}3$ cm. Jetzt schneidet er den freien Schenkel zweimal in C_2 und C_2'.



Jetzt haben wir also 2 Dreiecke mit der Grundseite AB, dem Winkel β und der Seite b_2. Beide sind auf der Seite zuvor in Blattmitte nebeneinander abgebildet.
Sie sind nicht kongruent.

Bei weiter wachsendem Radius kommen wir über die Länge der Seite c hinaus, so dass der Kreis, den ich jetzt blau gezeichnet habe, den freien Schenkel von β nicht mehr schneidet und außen ab B vorbei geht. Jetzt gibt es genau ein passendes Dreieck.

Ergebnis: Ist b zu klein, gibt es keine Lösung, dann kommt der Berührfall mit einer Lösung, der Doppelschnittfall mit zwei nicht kongruenten Dreieckslösungen und schließlich bei hinreichend großem b ein eindeutiges Dreieck.

Wichtig:

Wie kann man an den gegebenen Größen (Winkel und Seiten) erkennen, ob es keine, eine oder zwei Lösungen gibt?

Dazu muss man die Konstruktion nochmals unter folgendem Gesichtspunkt durchdenken:

Zuerst gibt es keine Lösung. Da ist b_2 kleiner als die andere gegebene Seite c.

Dann schneidet der Kreis den freien Schenkel des gegebenen Winkels.
Und wie man sieht auch die Seite c. Der Radius des Kreises, also die Länge der Seite b ist immer noch kleiner als die der anderen Seite c.

Erst jetzt, wenn der Radius b größer als c wird, schneidet der (blaue) Kreis die Grundseite c nicht mehr. Und jetzt haben wir eine eindeutige Lösung. Das heißt: Jeder, der so ein Dreieck konstruiert, also z.B. mit den Maßen $c = 6{,}7$ cm, $\beta = 65^\circ$ und $b = 7{,}0$ cm, erhält ein Dreieck, das zu allen anderen mit denselben Maßen kongruent ist.

Das ist nicht so, wenn b kleiner als c ist. Wenn es hier eine Lösung gibt, dann meistens sogar zwei. Wenn Klaus das große Dreieck als Ergebnis ansieht und Hans das kleine, dann haben sie bei gleichen Vorgaben keine kongruenten Dreiecke.

Merke:

Sind zwei Seiten und ein Gegenwinkel gegeben, dann gibt es nur dann eine eindeutige Lösung (Kongruenz!), wenn der Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüber liegt (SSW_g) !

Im Falle SSW_k (wenn also der gegebene Winkel der Gegenwinkel der kleineren Seite ist), gibt es entweder keine Lösung oder zwei nicht kongruente.

Der Sonderfall, dass der Kreisbogen berührt, ist so selten, dass man ihn hierbei meist nicht erwähnt.

Aufgaben:

Finde durch Nachdenken heraus, ob es eindeutige Lösungen gibt oder nicht:
Konstruiere im Anschluss die Dreiecke.

a) $a = 8{,}4$ cm ; $b = 4{,}3$ cm ; $\alpha = 118^\circ$

b) $a = 4{,}6$ cm ; $c = 6{,}4$ cm ; $\alpha = 24^\circ$

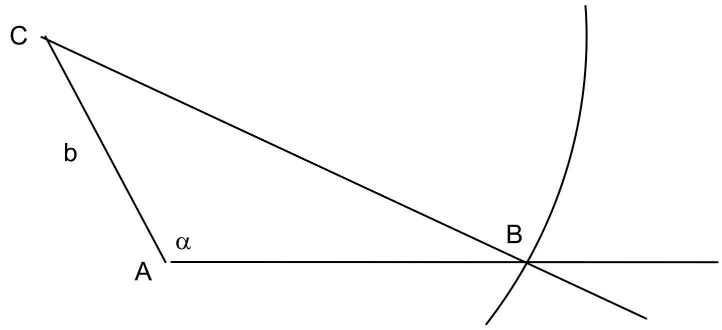
c) $b = 12{,}1$ cm ; $c = 9{,}8$ cm ; $\gamma = 100^\circ$

Lösung

a) $a = 8{,}4\text{ cm}; \quad b = 4{,}3\text{ cm}; \quad \alpha = 118^\circ$

Beobachtung: Der Winkel α liegt der größeren Seite gegenüber. Die Lösung ist eindeutig.

Konstruktion:



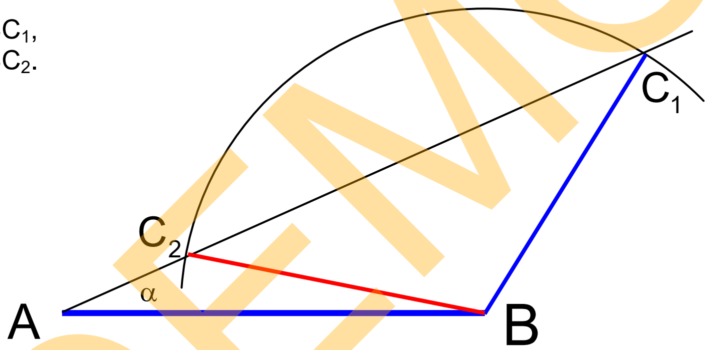
Konstruktionstext:

1. Zeichne AC = b.
2. Lege α an b in A an.
3. Der Kreis um C mit Radius a schneidet den freien Schenkel von α in B.

b) $a = 4{,}6\text{ cm}; \quad c = 6{,}4\text{ cm}; \quad \alpha = 24^\circ$

Beobachtung:
Der Winkel α liegt der kleineren Seite gegenüber. Es gibt also 0 1 oder 2 Lösungen.

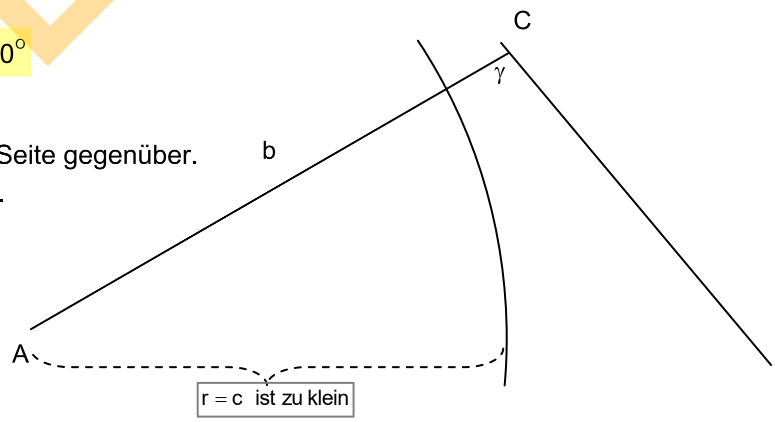
1. Lösung: ABC_1,
2. Lösung: ABC_2.



c) $b = 10{,}1\text{ cm}; \quad c = 8{,}8\text{ cm}; \quad \gamma = 100^\circ$

Beobachtung:
Der Winkel γ liegt der kleineren Seite gegenüber.
Es gibt also 0, 1 oder 2 Lösungen.

Ergebnis:
Es gibt keine Lösung.



Wir können also festhalten, dass es im Fall SSW nur dann ein eindeutiges Ergebnis und somit Kongruenz gibt, wenn der Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüber liegt.
Dies nennt man den Fall SSW_g,

4. Ergebnis: 4. Kongruenzsatz (SSW_g)

Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, sind kongruent.

3.6 Zusammenfassung

Kongruenzsätze für Dreiecke.

Liegen zwei Dreiecke vor, dann gibt es vier Möglichkeiten, zu entscheiden, ob sie kongruent sind oder nicht. Man nennt diese vier Möglichkeiten die vier Kongruenzsätze. Jeder macht eine Aussage der Form:

**Wenn zwei Dreiecke in diesen drei Stücken übereinstimmen,
dann sind sie kongruent.**

(d.h. man kann sie ausschneiden und passend aufeinanderlegen.).

1. Kongruenzsatz: SSS = alle 3 Seiten
2. Kongruenzsatz: SWS = 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel
3. Kongruenzsatz: WSW oder WWS = 2 Winkel und eine Seite
4. Kongruenzsatz: SSW_g = 2 Seiten und der Gegenwinkel der größeren

Das wird oft vergessen:

Dreiecke müssen nicht kongruent sein, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen.
Die Seiten können dann unterschiedlich lang sein. Und sie müssen nicht kongruent sein, wenn der Fall SSW_k vorliegt. In diesem Fall kann beim Konstruieren eintreten, dass es zwei nicht kongruente Lösungen gibt oder genau eine oder auch gar keine.