ALGEBRA
Terme 2

Termumformungen

Binomische Formeln

Meistens in Klasse 8

Datei Nr. 12102

Friedrich W. Buckel

Stand: 14. November 2010

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Inhalt

Diese Texte zu Termen gibt es in der Mathematik-CD

12101	Äquivalente Terme: Klammern multiplizieren
12101A	Aufgabenblätter zu 12101
12102:	Binomische Formeln
12103:	Faktorisieren und Quadratische Ergänzung
12104:	Faktorisieren mit beliebigen Klammern
12105:	Berechnung von $(a+b)^n$ mit Pascalschem Dreieck sowie $(a+b+c)^2$
12106	Binomialkoeffizient
12107	Testaufgaben
12108	Zur Wiederholung: Grundlagen kompakt
12109	Zur Wiederholung: Grundlagentest (Was weiß ich noch?)
12110	Bruchterme: Definitionsbereich, kürzen und erweitern
12111	Bruchterme: Add., Subtr., Mult. und Division von Bruchtermen
12112	Aufgabensammlung aus 12110 und 12111
12116:	Polynomdivision

6 Binomische Formeln

6.1 Vorübung

Eine Grundfähigkeit für die Algebra ist das Multiplizieren von Klammer-Termen.
Daher hier eine Vorübung:

$$(a+b)(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

Man bildet also vier Produkte: Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Hier noch eine anspruchsvollere Übung:

$$(2a+3b)(6a-4b)=2a\cdot 6a+2a\cdot(-4b)+3b\cdot 6a+3b\cdot(-4b)$$

oder schneller so:

$$(2a+3b)(6a-4b)=2a\cdot 6a-2a\cdot 4b+3b\cdot 6a-3b\cdot 4b$$
$$=12a^2-8ab+18ba-12b^2=12a^2+10ab-12b^2$$

Es gibt beim Multiplizieren zweier Klammern drei Sonderfälle, bei denen das Ergebnis so wichtig ist, dass man es sich merken muss. Diesen drei Fällen gab man daher auch besondere Namen. Man nennt sie die **binomischen Formeln**. Weil sie so wichtig sind, muss man sie auch herleiten können und nicht nur wissen, wie sie aussehen:

6.2 Die 1. Binomische Formel

Herleitung der Formel

Es geht um die Berechnung des Terms $(a+b)^2$, der ja eigentlich $(a+b)(a+b)$ heißt.
Wir wenden die Methode an, die man zur Multiplikation von Klammern immer anwendet:

$$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

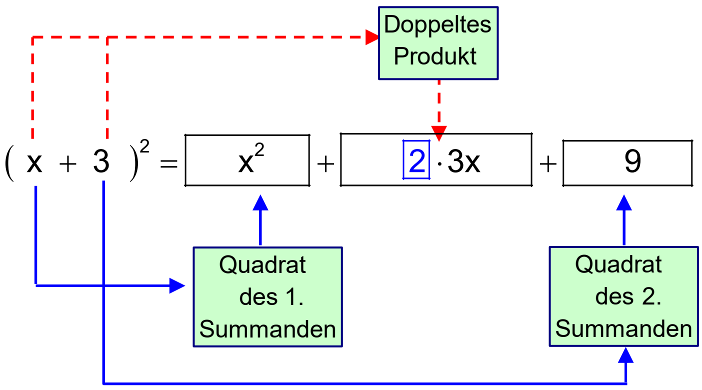
Das war schon alles. Daher merken wir uns:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

In Worten: a und b werden jeweils quadriert, also $a^2 + b^2$. Manche hören hier auf und vergessen, dass es einen dritten Summanden gibt: + 2ab, das **doppelte Produkt**!

Beispiele:

(a) $(x+3)^2=x^2+\boxed{2}\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$



(b) $(3x+5)^2=(3x)^2+\boxed{2}\cdot 3x\cdot 5+5^2=9x^2+30x+25$

Erklärung: Jetzt heißt es 3x statt a , also ist $a^2 = (3x)^2 = 9x^2$.
Dann kommt das doppelte Produkt, also 3x mal 5 und das ganze doppelt genommen, also nochmals mal 2, ergibt 30x.
Schließlich ist b = 5 also $b^2 = 25$.

Man kann diese Formel auch mit großen Platzhaltern darstellen:

$$\left(\square+\bigcirc\right)^2=\square^2+2\cdot\square\bigcirc+\bigcirc^2$$

Mit diesem Schema gelingt es kompliziertere Terme umzurechnen:

(c) $(5a+7b)^2=?$ Versuche es selbst!

Schreibe die Summanden in unser Schema!

$$\left(\boxed{5a} + 7b\right)^2 = \boxed{5a}^2 + 2\cdot\boxed{5a}\,7b + 7b^2$$
$$= 25a^2 + 70\cdot ab + 49b^2$$

Dieses Schema hilft, wenn Schüler durcheinander kommen, weil es in der binomischen Formel $(a+b)^2$ heißt, und hier steht plötzlich $(5a+7b)^2$.

Das a und das b in der Formel sind nur Platzhalter für den 1. und 2. Summanden des zu berechnenden Terms.

(d) $(3+2z)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2z + (2z)^2 = 9 + 12z + 4z^2$

(e) $(3y+12x)^2 = (3y)^2 + 2\cdot 3y\cdot 12x + (12x)^2 = 9y^2 + 72xy + 144x^2$.

(f) $(x^2+y^2)^2 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot y^2 + (y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

(g) $(4x^2+5)^2 = (4x^2)^2 + 2\cdot 4x^2\cdot 5 + 5^2 = 16x^4 + 40x^2 + 25$

(h) $(3x+8x^2)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 8x^2 + (8x^2)^2 = 9x^2 + 48x^3 + 64x^4$

(i) $(x^2y+xy^2)^2 = (x^2y)^2 + 2\cdot x^2y\cdot xy^2 + (xy^2)^2 = x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4$

denn $(x^2y)^2 = (x^2y)\cdot(x^2y) = x^2\cdot x^2\cdot y\cdot y = x^4\cdot y^2$ usw.

j) $(15x^3+16x^5)^2 = (15x^3)^2 + 2\cdot 15x^3\cdot 16x^5 + (16x^5)^2 = 225x^6 + 480\,x^8 + 256\,x^{10}$

denn $(x^3)^2 = x^3\cdot x^3 = (x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x) = x^6$ usw.

Trainingsaufgabe 1

Wende die 1. Binomische Formel an:

(a)	$(m+n)^2$	(b)	$(3a+4b)^2$	(c)	$(7x+15)^2$
(d)	$(5c+6d)^2$	(e)	$(15x+4y)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2$
(g)	$\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2$	(h)	$\left(8b+\frac{1}{16}a\right)^2$	(i)	$\left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)^2$

Lösung einige Seiten weiter.

6.3 Die 2. Binomische Formel

Es geht um die Berechnung des Terms $(a-b)^2$, der ja eigentlich $(a-b)(a-b)$ heißt. Wir wenden wieder die Methode an, die man zur Multiplikation von Klammern immer anwendet und erhält:

$$(a-b)(a-b) = a^2 + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Das war schon alles. Daher merken wir uns:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

In Worten: a und b werden jeweils quadriert, also $a^2 + b^2$. Manche hören hier auf und vergessen, dass es einen dritten Summanden gibt: - 2ab Man nennt ihn das **doppelte Produkt**! Dieses wird hier subtrahiert, weil es auch $a-b$ heißt.

Beispiele

(a) $(4x-1)^2 = (4x)^2 - 2\cdot 4x\cdot 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$

(b) $(4a-9b)^2 = (4a)^2 - 2\cdot 4a\cdot 9b + (9b)^2 = 16a^2 - 72ab + 81b^2$

(c) $(3x-5y)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$

(d) $(x^2-4)^2 = (x^2)^2 - 2\cdot x^2\cdot 4 + 4^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

(e) $(3x^2-5x)^2 = (3x^2)^2 - 2\cdot 3x^2\cdot 5x + (5x)^2 = 9x^4 - 30x^3 + 25x^2$

(f) $(10-8z)^2 = 100 - 160z + 64z^2$ Dies war jetzt ohne Zwischenrechnung!

(g) $(3ab^2 - 2a^2b)^2 = 9a^2b^4 - 12\,a^3b^3 + 4a^4b^2$

Trainingsaufgabe 2

Wende die 2. binomische Formel an:

(a)	$(5a-c)^2$	(b)	$(7a-2b)^2$	(c)	$(20x-25)^2$
(d)	$(ab-4)^2$	(e)	$(-2-4a)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\right)^2$
(g)	$\left(4x-\frac{1}{4}\right)^2$	(h)	$\left(\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v\right)^2$	(i)	$\left(\frac{2}{3}x^2-6\right)^2$

Lösung einige Seiten weiter.

6.4 Die 3. Binomische Formel

Es geht um die Berechnung des Terms $(a+b)(a-b)$. Wir wenden wieder die Methode an, die man zur Multiplikation von Klammern immer anwendet und erhält:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + a\cdot(-b) + b\cdot a + b\cdot(-b) = a^2 \boxed{-ab+ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Das war schon alles. Daher merken wir uns:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Jetzt gibt es also kein doppeltes Produkt, denn die gemischten Produkte „ab“ und „ba“ fallen weg!

Beispiele

(a) $(3a+2b)(3a-2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$

(b) $(3a-2b)(3a+2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$

Hast du entdeckt, dass die Aufgabe (a) identisch zu (b) ist: Es ist egal, ob die Klammer mit dem Minuszeichen die erste oder die zweite Klammer ist !

(c) $(8x-3)(8x+3) = (8x)^2 - 3^2 = 64x^2 - 9$

(d) $(4x-5)(5+4x)$ Achtung, jetzt muss man genauer hinsehen, denn die Klammern unterscheiden sich nicht nur um das Minuszeichen. Auch die Reihenfolge der Summanden ist anders. Daher muss man dies zuerst ändern. Man darf dies aber nur in der „Plus-Klammer“ tun, denn dort gilt 5 + 4x = 4x + 5:

$$(4x-5)(5+4x) = (4x-5)(4x+5) = (4x)^2 - 5^2 = 16x^2 - 25$$

(e) Vorsicht Falle: $(3x-4z)(3z+4x)$

Diese Aufgabe passt NICHT zur 3. binomischen Formel, denn in der zweiten Klammer stehen andere Summanden. Um die 3. binomische Formel anwenden zu können, müsste die Aufgabe so heißen:

$(3x-4z)(3x+4z) = 9x^2 - 16z^2$. Jetzt wurde auch wieder der Zwischenschritt weggelassen. Man macht ihn meistens im Kopf.

(f) $(x^2-3)(x^2+3) = (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

(g) $(7p+4q)(4q-7p) = (4q+7p)(4q-7p) = 16q^2 - 49p^2$

(h) $(xy-xz)(yx+zx) = (xy-xz)(xy+xz) = (xy)^2 - (xz)^2 = x^2y^2 - x^2z^2$

Trainingsaufgabe 3

(a)	$(c-d)(c+d)$	(b)	$(3a-2b)(3a+2b)$	(c)	$(5x+1)(5x-1)$
(d)	$(4a-\frac{1}{2})(4a+\frac{1}{2})$	(e)	$(a^2-b)(a^2+b)$	(f)	$(4-x^2)(x^2+4)$
(g)	$(\frac{1}{2}x+3)(\frac{1}{2}x-3)$	(h)	$(-8u-v)(-8u+v)$	(i)	$(6+2x)(-6+2x)$

6.5 Teuflische Minuszeichen

(für ganz bösartige Aufgaben)

Es gibt Terme, die nicht so richtig zu einer binomischen Formel passen, aber nach einer kleinen Umformung dann doch dafür geeignet sind. Dies liegt dann am Vorzeichen.

Dazu ein paar Vorübungen:

Wenn man in einer Differenz die beiden Zahlen vertauscht, dann ändert sich das Vorzeichen des Ergebnisses:

5 – 3 = 2 aber 3 – 5 = - 2

12 – 5 = 7 aber 5 – 12 = - 7

Als nächstes sehen wir uns folgende Rechnungen an:

$$-(5-3)=-5+3$$

$$-(12-5)=-12+5$$

Hier wird die vor der Klammer stehende Zahl – 1 (die 1 muss man nicht schreiben) in die Klammer hineinmultipliziert.

Lesen wir die beiden letzten Gleichungen von rechts nach links, dann erhalten wir:

$$-5+3=-(5-3)$$

$$-12+5=-(12-5)$$

Diese Gleichungen lehren uns:

Klammert man ein Minuszeichen aus, dann ändert dies alle Vorzeichen in der Klammer.

Anwendung

a) $(-5+3)(5+3)$

Für die 3. binomische Formel hätten wir gerne $(5-3)(5+3)$.
Dies erreichen wir durch Ausklammern von -1 aus der 1. Klammer.

$$(-5+3)(5+3)=-(5-3)(5+3)=-(5^2-3^2)=-(25-9)=-16$$

b) $(12+5)(-12+5)=-(12+5)(12-5)=-(12^2-5^2)=-(144-25)=-119$

c) $(a+b)(-a+b)=-(a+b)(a-b)=-(a^2-b^2)=-a^2+b^2$

d) $(-3x+4)(3x+4)=-(3x-4)(3x+4)=-((3x)^2-4^2)=-(9x^2-16)=-9x^2+16$

Diese Methode hilft auch bei dieser Aufgabe weiter:

$$\left(-a-b\right)\left(a+b\right)=?$$

Man klammert aus der ersten Klammer den Faktor (-1) aus:

$$(-a-b)=-(a+b)$$

Damit verändert sich die Berechnung so:

$$\mathbf{(-a-b)(a+b)=-(a+b)(a+b)=-(a+b)^2=-(a^2+2ab+b^2)=-a^2-2ab-b^2}$$

Beispiele

a) $(-x-4)(x+4)=-(x+4)(x+4)=-(x+4)^2=-(x^2+8x+16)=-x^2-8x-16$

b) $(-5a-2b)(2b+5a)=-(5a+2b)(2b+5a)=-(5a+2b)^2$
$=-(25a^2+20ab+4b^2)=-25a^2-20ab-4b^2$
Hier wurde verwendet: $(2b+5a)=(5a+2b)$, denn bei einer Summe darf man die Summanden vertauschen !

c) $(12rs+8r)(-8r-12rs)=-(8r+12rs)(8r+12rs)=-(8r+12rs)^2$
$=-\left((8r)^2+2\cdot 8r\cdot 12rs+(12rs)\right)=-(64r^2+192r^2s+144r^2s^2)$
$=-64r^2-192r^2s-144r^2s^2$
Hier wurde zuerst die erste Summe vertauscht und dann aus der 2. Klammer -1 ausgeklammert!

Auch diese Aufgabe ist so zu behandeln:

$$\left(-a+b\right)\left(a-b\right)=?$$

Man muss erkennen, dass die Vorzeichen in der ersten Klammer genau umgekehrt sind zu denen der zweiten Klammer. Also ändern wir dies, indem wir aus der 1. Klammer -1 ausklammern:

$$\mathbf{(-a+b)(a-b)=-(a-b)(a-b)=-(a-b)^2=-(a^2-2ab+b^2)=-a^2+2ab-b^2}$$

Beispiele

a) $(3-5a)(-3+5a)=-(3-5a)(3-5a)=-(3-5a)^2=-(9-30a+25a^2)$
$=-9+30a-25a^2$

b) $(4u-7v)(7v-4u)=-(4u-7v)(-7v+4u)=-(4u-7v)(4u-7v)$
Nun muss man wissen, dass $-7v+4u=4u-7v$ ist, denn auch hier liegt eine Summe vor, in der man die Summanden vertauschen darf. Das Minuszeichen zeigt also keine Differenz sondern ein Vorzeichen an.
$=-(4u-7v)^2=-(16u^2-56uv+49v^2)=-16u^2+56uv-49v^2$

c) $(15a-25b)(25b-15a)=-(15a-25b)\cdot(-25b+15a)$
$=-(15a-25b)\cdot(15a-25b)=-(15a-25b)^2=-\left(225a^2-750ab+625b^2\right)$
$=-225a^2+750ab-625b^2$

d) $(12uv-4v)(-12uv+4v)=-(12uv-4v)(12uv-4v)=-(12uv-4v)^2$
$=-\left(144u^2v^2-96uv^2+16v^2\right)=-144u^2v^2+96uv^2-16v^2$

Es gibt eine vierte Aufgabenstellung, die so bearbeitet werden kann:

$$(-a-b)^2=?$$

Dies heißt ausführlich: $(-a-b)(-a-b)$

Aus jeder Klammer ziehen wir den Faktor (-1) heraus. Dieser kommt dann zweimal vor die Klammer, und weil $(-1)\cdot(-1)=+1$ ist, fällt dies wieder weg, also gilt:

$$\boxed{(-a-b)^2=(a+b)^2 \text{ !!!}} \quad = a^2+2ab+b^2$$

Beispiele

a) $(-3x-6)^2=(3x+6)^2=9x^2+36x+36$

b) $\left(-5x-2x^2\right)^2=\left(5x+2x^2\right)^2=25x^2+20x^3+4x^4$

c) $(-13ab-5c)(-13ab-5c)=(13ab+5c)^2=169a^2b^2+130abc+25c^2$

Trainingsaufgabe 4 (ganz wichtig!)

Forme diese Terme durch Ausklammern von -1 um und wende dann binomische Formeln an.

a) $(2r-5s)(-2r-5s)$ b) $(4a+2b)(-4a-2b)$

c) $(-5x-3)(5x-3)$ d) $\left(x^2+5\right)\left(-x^2+5\right)$

e) $(-2ab-3)^2$ f) $(-ab+bc)^2$

g) $\left(-5x^2+2x\right)\left(2x-5x^2\right)$ h) $(6a-5b)(-5b-6a)$

i) $(-2b-5a)(5b-2a)$ j) $\left(-3a^2b+2b^2a\right)\left(-2b^2a-3a^2b\right)$

k) $(-2z-3w)(-2z+3w)$ l) $(-ab+ba)(ab-ba)$

6.6 Vermischte Aufgaben

Hier nochmals die drei binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

und die Minuszeichenregeln

$$(a-b) = -(b-a)$$
$$(-a-b) = -(a+b)$$

Trainingsaufgabe 5

Wende die geeigneten Formeln an:

(a)	$(3m+8n)(3m-8n)$	(b)	$\left(\frac{1}{2}x-5\right)^2$
(c)	$(3x+4)^2$	(d)	$(7u+2v)(2v-7u)$
(e)	$(4a-7b)(-4a-7b)$	(f)	$(-8x+2y)^2$
(g)	$(8x-2y)(-2y+8x)$	(h)	$(17a-b)(-17a-b)$
(i)	$(-16+25u)^2$	(j)	$(-65a+15a)^2$
(k)	$(6x^2-3x)(3x-6x^2)$	(l)	$(-5x+2)(2-5x)$
(m)	$(12x+3w)(-12x-3w)$	(n)	$(-8uv+3vw)(-8uv-3vw)$
(o)	$(-2pc-15rst)^2$	(p)	$(-z+3w)^2$

Hier nochmals zusammengestellt die Aufgaben 1 bis 4

(als Übungsblatt zum Wiederholen)

Trainingsaufgabe 1

(a)	$(m+n)^2$	(b)	$(3a+4b)^2$	(c)	$(7x+15)^2$
(d)	$(5c+6d)^2$	(e)	$(15x+4y)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2$
(g)	$\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2$	(h)	$\left(8b+\frac{1}{16}a\right)^2$	(i)	$\left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)^2$

Trainingsaufgabe 2

(a)	$(5a-c)^2$	(b)	$(7a-2b)^2$	(c)	$(20x-25)^2$
(d)	$(ab-4)^2$	(e)	$(-2-4a)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\right)^2$
(g)	$\left(4x-\frac{1}{4}\right)^2$	(h)	$\left(\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v\right)^2$	(i)	$\left(\frac{2}{3}x^2-6\right)^2$

Trainingsaufgabe 3

(a)	$(c-d)(c+d)$	(b)	$(3a-2b)(3a+2b)$	(c)	$(5x+1)(5x-1)$
(d)	$\left(4a-\frac{1}{2}\right)\left(4a+\frac{1}{2}\right)$	(e)	$\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)$	(f)	$\left(4-x^2\right)\left(x^2+4\right)$
(g)	$\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)$	(h)	$(-8u-v)(-8u+v)$	(i)	$(6+2x)(-6+2x)$

Trainingsaufgabe 4 (ganz wichtig !)

Forme diese Terme durch Ausklammern von -1 um und wende dann binomische Formeln an.

a)	$(2r-5s)(-2r-5s)$	b)	$(4a+2b)(-4a-2b)$
c)	$(-5x-3)(5x-3)$	d)	$\left(x^2+5\right)\left(-x^2+5\right)$
e)	$(-2ab-3)^2$	f)	$(-ab+bc)^2$
g)	$\left(-5x^2+2x\right)\left(2x-5x^2\right)$	h)	$(6a-5b)(-5b-6a)$
i)	$(-2b-5a)(5b-2a)$	j)	$\left(-3a^2b+2b^2a\right)\left(-2b^2a-3a^2b\right)$
k)	$(-2z-3w)(-2z+3w)$	l)	$(-ab+ba)(ab-ba)$

Lösungen zu den Trainingsaufgaben 1 bis 5

Trainingsaufgabe 1

Wende die 1. binomische Formel an:

(a)	$(m+n)^2$	(b)	$(3a+4b)^2$	(c)	$(7x+15)^2$
(d)	$(5c+6d)^2$	(e)	$(15x+4y)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2$
(g)	$\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2$	(h)	$\left(8b+\frac{1}{16}a\right)^2$	(i)	$\left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)^2$

Lösung

(a) $(m+n)^2 = m^2+2mn+n^2$

(b) $(3a+4b)^2 = (3a)^2+2\cdot 3a\cdot 4b+(4b)^2 = 9a^2+24ab+16b^2$

(c) $(7x+15)^2 = 49x^2+210x+225$

(d) $(5c+6d)^2 = 25c^2+60cd+36d^2$

(e) $(15x+4y)^2 = 225x^2+120xy+16y^2$

(f) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$

(g) $\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2 = (3x)^2+2\cdot 3x\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9x^2+4x+\frac{4}{9}$

Achtung: Hier gilt wieder der Grundsatz: Kürze vor dem Multiplizieren.
Also kürzt man im doppelten Produkt zuerst die 3 heraus.

(h) $\left(8b+\frac{1}{16}a\right)^2 = (8b)^2+2\cdot 8b\cdot\frac{1}{16}a+\left(\frac{1}{16}a\right)^2 = 64b^2+ab+\frac{1}{256}a^2$

Hier gilt dasselbe: Man kürzt im doppelten Produkt die Zahl 16.

(i) $\left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot 4x+(4x)^2 = \frac{1}{4}x^4+4x^3+16x^2$

Trainingsaufgabe 2

Wende die 2. binomische Formel an:

(a) $(5a-c)^2$ (b) $(7a-2b)^2$ (c) $(20x-25)^2$

(d) $(ab-4)^2$ (e) $(-2-4a)^2$ (f) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\right)^2$

(g) $\left(4x-\frac{1}{4}\right)^2$ (h) $\left(\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v\right)^2$ (i) $\left(\frac{2}{3}x^2-6\right)^2$

Lösung

(a) $(5a-c)^2 = 25a^2-10ac+c^2$

(b) $(7a-2b)^2 = 49a^2-28ab+4b^2$

(c) $(20x-25)^2 = 400x^2-1000x+625$

(d) $(ab-4)^2 = a^2b^2-8ab+16$

(e) $(-2-4a)^2 = (-2)^2-2\cdot(-2)\cdot 4a+(4a)^2 = 4+16a+16a^2$

(f) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{16}a^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{16}a^2-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}b^2$

(g) $\left(4x-\frac{1}{4}\right)^2 = 16x^2-2\cdot 4x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16} = 16x^2-2x+\frac{1}{16}$

(h) $\left(\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v\right)^2 = \frac{1}{16}u^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}uv+\frac{9}{16}v^2 = \frac{1}{16}u^2-\frac{3}{8}uv+\frac{9}{16}v^2$

Hier unbedingt kürzen und nicht zuerst $\frac{6}{16}$ im doppelten Produkt schreiben,

(i) $\left(\frac{2}{3}x^2-6\right)^2 = \frac{4}{9}x^4-2\cdot\frac{2}{3}\cdot 6\,x^2+36 = \frac{4}{9}x^4-8x^2+36$

Hier haben wir schon wieder diese Situation: Zuerst wird durch 3 gekürzt,

Der Meister der Algebra zeigt sich im frühzeitigen Kürzen

Trainingsaufgabe 3

(a)	$(c-d)(c+d)$	(b)	$(3a-2b)(3a+2b)$	(c)	$(5x+1)(5x-1)$
(d)	$\left(4a-\frac{1}{2}\right)\left(4a+\frac{1}{2}\right)$	(e)	$\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)$	(f)	$\left(4-x^2\right)\left(x^2+4\right)$
(g)	$\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)$	(h)	$(-8u-v)(-8u+v)$	(i)	$(6+2x)(-6+2x)$

Lösung

(a) $(c-d)(c+d)=c^2-d^2$

(b) $(3a-2b)(3a+2b)=9a^2-4b^2$

(c) $(5x+1)(5x-1)=25x^2-1$

(d) $\left(4a-\frac{1}{2}\right)\left(4a+\frac{1}{2}\right)=16a^2-\frac{1}{4}$

(e) $\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)=a^4-b^2$

(f) $\left(4-x^2\right)\left(x^2+4\right)=\left(4-x^2\right)\left(4+x^2\right)=16-x^4$

(g) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)=\frac{1}{4}x^2-9$

(h) $(-8u-v)(-8u+v)=(-8u)^2-v^2=64u^2-v^2$

(i) $(6+2x)(-6+2x)=(2x+6)(2x-6)=4x^2-36$

Trainingsaufgabe 4 (ganz wichtig !)

Forme diese Terme durch Ausklammern von -1 um und wende dann binomische Formeln an.

a) $(2r-5s)(-2r-5s)$ b) $(4a+2b)(-4a-2b)$

c) $(-5x-3)(5x-3)$ d) $(x^2+5)(-x^2+5)$

e) $(-2ab-3)^2$ f) $(-ab+bc)^2$

g) $(-5x^2+2x)(2x-5x^2)$ h) $(6a-5b)(-5b-6a)$

i) $(-2b-5a)(5b-2a)$ j) $(-3a^2b+2b^2a)(-2b^2a-3a^2b)$

k) $(-2z-3w)(-2z+3w)$ l) $(-ab+ba)(ab-ba)$

Lösung

a) $(2r-5s)(-2r-5s) = \mathbf{-}(2r-5s)(2r+5s) = -(4r^2-25s^2) = -4r^2+25s^2$

b) $(4a+2b)(-4a-2b) = \mathbf{-}(4a+2b)(4a+2b) = -(4a+2b)^2$
$= -(16a^2+16ab+4b^2) = -16a^2-16ab-4b^2$

c) $(-5x-3)(5x-3) = \mathbf{-(5x+3)}(5x-3) = -(25x^2-9) = -25x^2+9$

d) $(x^2+5)(-x^2+5) = \mathbf{-}(x^2+5)(x^2-5) = -(x^4-25) = -x^4+25$

oder man vertauscht in beiden Klammern die Summenden:

$(x^2+5)(-x^2+5) = (5+x^2)(5-x^2) = 25-x^4$

e) $(-2ab-3)^2 = -\left(-(2ab+3)^2\right) = (2ab+3)^2 = 4a^2b^2+12ab+9$

Hier wurde aus beiden Klammern (die sich im Quadrat verstecken) -1 ausgeklammert, was sich wieder aufhebt.

f) $(-ab+bc)^2 = (bc-ab)^2 = b^2c^2-2ab^2c+a^2b^2$

Hier wurden die beiden Summanden vertauscht.

g) $(-5x^2+2x)(2x-5x^2) = (2x-5x^2)(2x-5x^2) = (2x-5x^2)^2 = 4x^2-20x^3+25x^4$
Vertauscht man in der ersten Klammer beide Summanden, entstehen zwei identische Klammern. Man muss hier also nichts ausklammern: x und x^2 haben doch dieselben Koeffizienten (Vorzahlen) , also besteht auch kein Grund zu einer Änderung.

h) $(6a-5b)(-5b-6a)=-(6a-5b)(+5b+6a)=-(6a-5b)(6a+5b)$

Bei dieser Aufgabe muss man zweierlei analysieren:
1. sind die Vorzeichen verschieden und wir klammern aus der 2. Klammer -1 aus
2. stimmt dann die Reihenfolge nicht, also vertauschen wir in der 2. Klammer die Summanden. Nun eignet sich die 3. Binomische Formel zur Anwendung:

$$=-(36a^2-25b^2)=-36a^2+25b^2$$

i) $(-2b-5a)(5b-2a)$

Diese Aufgabe passt nicht zur 3. Binomischen Formel, denn einmal heißt es 5a, dann 2a. Man kann nur ganz normal die 1. Klammer mit der zweiten ausmultiplizieren:

$$(-2b-5a)(5b-2a)=-10b^2+4ab-25ab+10a^2=10a^2-21ab-10b^2$$

j) $(-3a^2b+2b^2a)(-2b^2a-3a^2b)=\mathbf{-}[\mathbf{-}(3a^2b-2b^2a)](2b^2a+3a^2b)$

Hier habe ich aus beiden Klammern -1 herausgezogen, was sich wieder aufhebt. Daher darf man gleich so weitermachen:

$$=(3a^2b-2b^2a)(2b^2a+3a^2b)=(3a^2b-2b^2a)(3a^2b+2b^2a)$$

Nun habe ich noch in der 2. Klammer die Summanden vertauscht!
Jetzt passt die 3. Binomische Formel.

$$=9a^4b^2-4b^4a^2$$

k) $(-2z-3w)(-2z+3w)=(-2z)^2-(3w)^2=4z^2-9w^2$

Verwende -2z für a in der 3. Binomischen Formel ….

l) $(-ab+ba)(ab-ba)=0$

denn ab = ba, also hat jede Klammer den Wert 0.

Hereingefallen?

Trainingsaufgabe 5

Wende die geeigneten Formeln an:

(a)	$(3m+8n)(3m-8n)$	(b)	$\left(\frac{1}{2}x-5\right)^2$
(c)	$(3x+4)^2$	(d)	$(7u+2v)(2v-7u)$
(e)	$(4a-7b)(-4a-7b)$	(f)	$(-8x+2y)^2$
(g)	$(8x-2y)(-2y+8x)$	(h)	$(17a-b)(-17a-b)$
(i)	$(-16+25u)^2$	(j)	$(-65a+15a)^2$
(k)	$(6x^2-3x)(3x-6x^2)$	(l)	$(-5x+2)(2-5x)$
(m)	$(12x+3w)(-12x-3w)$	(n)	$(-8uv+3vw)(-8uv-3vw)$
(o)	$(-2pc-15rst)^2$	(p)	$(-z+3w)^2$

Lösung

(a) $(3m+8n)(3m-8n)=9m^2-64n^2$

(b) $\left(\frac{1}{2}x-5\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}x\cdot 5+5^2=\frac{1}{4}x^2-5x+25$

(c) $(3x+4)^2=9x^2+24x+16$

(d) $(7u+2v)(2v-7u)=(2v+7u)(2v-7u)=4v^2-49u^2$

(e) $(4a-7b)(-4a-7b)=-(4a-7b)(4a+7b)=-\left(16a^2-49b^2\right)=-16a^2+49b^2$

Hier musste man -1 aus der 2. Klammer ausklammern, damit die 3. Binomische Formel einfach anwendbar wird.

(f) $(-8x+2y)^2=(2y-8x)^2=4y^2-32xy+64x^2$

Ich habe die Summanden in der Klammer vertauscht.

(g) $(8x-2y)(-2y+8x)=(8x-2y)(8x-2y)=(8x-2y)^2=64x^2-32xy+4y^2$

Hier musste man erkennen, dass beide Klammern identisch sind. In der zweiten Klammer wurden lediglich die Summanden vertauscht, was ich dann wieder rückgängig gemacht habe. Dazu musste <u>kein</u> Minuszeichen herausgezogen werden.

(h) $(17a-b)(-17a-b)=-(17a-b)(17a+b)=-\left(289a^2-b^2\right)=-289a^2+b^2$

Durch Ausklammern von -1 wurde in der 2. Klammer aus -17a wie in der ersten Klammer + 17a . Nun erkennt man die 3. Binomische Formel sofort.

(i) $(-16+25u)^2=(16-25u)^2=256-\underbrace{2\cdot 25u\cdot 16}_{=50\cdot 16=800}+625u^2$ (Siehe Anmerkung f)

(j) $(-65a+15a)^2=(65a-15a)^2=(50a)^2=2500\,a^2$

Wollte da irgendjemand eine Binomische Formel anwenden?
Hier muss man erkennen, dass man 65a und 15a subtrahieren kann.
Übrigens habe ich zuvor aus beiden Klammern -1 herausgezogen, was sich in der Wirkung aufgehoben hat.
Das muss man aber nicht tun, es geht auch anders:

$$(-65a+15a)^2=(-50a)^2=2500\,a^2$$

(k) $(6x^2-3x)(3x-6x^2)=\mathbf{-}(6x^2-3x)(-3x+6x^2)=\mathbf{-}(6x^2-3x)^2$
$=-(36x^4-36x^3+9x^2)=-36x^4+36x^3-9x^2$

Hier musste man erkennen, dass die Terme $6x^2$ und $3x$ in der 2. Klammer die entgegen gesetzten Vorzeichen haben. Durch Ausklammern von -1 wurde dies behoben. Nun stimmt nur noch nicht die Reihenfolge der Summanden überein, aber die Klammern sind sonst gleich, daher kann man sie zusammen als $(6x^2-3x)^2$ schreiben.

(l) $(-5x+2)(2-5x)=(-5x+2)(-5x+2)=(-5x+2)^2=(5x-2)^2$
$=25x^2-20x+4$

Hast du erkannt, dass die zweite Klammer gleich der ersten ist, bis auf die Reihenfolge der Summanden. Diese kann man vertauschen und dann hat man $(-5x+2)^2$. Dies kann man sofort mit der 1. Binomische Formel berechnen: $(-5x+2)^2=(-5x)^2+2\cdot(-5x)\cdot 2+2^2=25x^2-20x+4$.
Oder man kann wie ich es zuerst gezeigt habe, -1 aus beiden Klammern herausziehen, was sich in der Wirkung wieder aufhebt, d.h. man ändert einfach beide Vorzeichen.

(m) $(12x+3w)(-12x-3w)=\mathbf{-}(12x+3w)(12x+3w)=\mathbf{-}(12x+3w)^2=$
$-(144x^2+72xw+9w^2)=-144x^2-72xw-9w^2$

Durch Ausklammern von -1 aus der 2. Klammer wurden beide Klammern identisch.

(n) $(-8uv+3vw)(-8uv-3vw)=(-8uv)^2-(3vw)^2=64u^2v^2-9v^2w^2$

Hier kann man mit a = -8uv und b = 3vw direkt die 3. Binomische Formel verwenden.

(o) $(-2pc-15rst)^2=(2pc+15rst)^2=4p^2c^2+60pcrst+225r^2s^2t^2$

(p) $(-z+3w)^2=(z-3w)^2=z^2-6zw+9w^2$

6.7 Noch kompliziertere Terme !!!

BEISPIELE

a) $(a-b)^2-(a+b)^2=[a^2-2ab+b^2]-[a^2+2ab+b^2]$
$=a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2=-4ab$

Hier muss man mindestens den 2. Term nach der Anwendung der 1. Binomischen Formel in Klammern setzen, weil ja davor ein Minuszeichen steht.
Es müssen also alle drei Summanden subtrahiert werden.

Wer die Klammer vergisst, subtrahiert nur den ersten Summanden. Dies ist falsch und würde so aussehen:

$(a-b)^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2-a^2+2ab+b^2=2b^2$ (FALSCH!)

b) $(3x-4)^2-(3x-4)(3x+4)=9x^2-24x+16-[9x^2-16]=9x^2-24x+16-9x^2+16$
$=-24x+32$

Hier wurde nur das Umformungsergebnis des 2. Terms in (eckige) Klammern gesetzt, weil nur dies subtrahiert wird. Ich verwende die eckigen Klammern nur, damit sie besser auffallen. Man darf stattdessen auch runde Klammern nehmen.

c) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=(a^4+2a^2b^2+b^4)-(a^4-2a^2b^2+b^4)$
$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^4+2a^2b^2-b^4=4a^2b^2$.

Auch hier war es wieder wichtig, für das Zwischenergebnis des 2. Terms eine Klammer zu setzen und dann für die Subtraktion alle Vorzeichen umzukehren (rot). Die erste Klammer um $a^4+2a^2b^2+b^4$ ist unnötig. Ich verwende sie nur aus optischen Gründen!

Trainingsaufgabe 6

a) $(4a-2b)^2-(2a+b)^2-(2a-b)^2$

b) $(x^2-4)^2-(x^2+2)^2$

c) $(2u-8v)(2u+8v)-(8v+u)(8v-u)$

d) $(a+b)^2\cdot(a+b)$

e) $(a-b)^2\cdot(a-b)$

f) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2$

g) $(x+2)^2\cdot(x-2)^2$

h) $(3a-4b)(-4b-3a)-(3a+4b)(-3a-4b)$

Lösung Trainingsaufgabe 6

a) $(4a-2b)^2-(2a+b)^2-(2a-b)^2=$

$=16a^2-16ab+4b^2-[4a^2+4ab+b^2]-[4a^2-4ab+b^2]$

$=16a^2-16ab+4b^2-4a^2-4ab-b^2-4a^2+4ab-b^2$

$=8a^2-16ab+2b^2$

b) $(x^2-4)^2-(x^2+2)^2=x^4-8x^2+16-[x^4+4x^2+4]$

$=x^4-8x^2+16-x^4-4x^2-4=-12x^2+12$

c) $(2u-8v)(2u+8v)-(8v+u)(8v-u)$

$=4u^2-64v^2-[64v^2-u^2]=4u^2-64v^2-64v^2+u^2=5u^2-128v^2$

d) $(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)$

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

e) $(a-b)^2\cdot(a-b)=(a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b)$

$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

f) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2=a^4-b^4-[a^4-2a^2b^2+b^4]$

$=a^4-b^4-a^4+2a^2b^2-b^4=2a^2b^2-2b^4$

g) $(x+2)^2\cdot(x-2)^2=(x^2+4x+4)\cdot(x^2-4x+4)$

$=x^4-4x^3+4x^2+4x^3-16x^2+16x+4x^2-16x+16$

$=x^4-8x^2+16$

ACHTUNG

Aufgabe (g) lässt sich schneller lösen, wenn man folgendes beachtet:

$(x+2)^2\cdot(x-2)^2=(x+2)(x+2)(x-2)(x-2)=(x^2-4)(x^2-4)$

$=(x^2-4)^2=x^4-8x^2+16$

Oder kürzer:

$(x+2)^2(x-2)^2=[(x+2)(x-2)]^2=[x^2-4]^2=x^4-8x^2+16$

Das ist die optimale Lösung. Man kann sie durchführen, wenn man erkennt, dass man die vorhandenen 4 Terme geschickter zusammenfassen kann.

h) $(3a-4b)(-4b-3a)-(3a+4b)(-3a-4b)$

Die blaue und die rote Klammer sind identisch bis auf die Reihenfolge der Summanden. Aus beiden zieht man den Faktor - 1 heraus:

$-(3a-4b)(4b+3a)+(3a+4b)(3a+4b)=-(3a-4b)(3a+4b)+(3a+4b)^2$

$-(9a^2-16b^2)+(9a^2+24ab+16b^2)=-\cancel{9a^2}+16b^2+\cancel{9a^2}+24ab+16b^2$

$=32b^2+24ab$