ALGEBRA

Lineare Gleichungen

Teil 1:

Trainingsheft für

Klasse 7 und 8

Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Datei Nr. 12140

Friedrich W. Buckel

Stand 5. Januar 2018

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1. Was man an Grundlagen und Theorie wissen muss

1.1 Lineare Gleichungen – Aussagen und Aussageformen

Eine Gleichung heißt lineare Gleichung, wenn die Variable nur mit dem Exponenten 1 auftritt.

Beispiele für lineare Gleichungen:

$x = 8$, $x + 6 = 13$, $5x = 23$,
$12x - 13 = 25$, $3x + 2 = 5 - x$, $2(x+4) - 3(x+1) = 8(x-12)$

Keine linearen Gleichungen sind:

$x^2 + 4x - 6 = 0$ und $(x+4)^2 = 5x - 2$ (Es sind quadratische Gleichungen),

$x^3 = 8$ ist eine Gleichung dritten Grades

und $\frac{4}{x+1} - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{5}{x}$ ist eine Bruchgleichung weil x im Nenner steht.

Aussagen und Aussageformen

Eine Aussage muss wahr oder falsch sein:

4 + 6 = 10 ist eine wahre Aussage,
4 = 6 ist eine falsche Aussage.

$x + 2 = 8$ ist keine Aussage, denn dieser Ausdruck ist weder wahr noch falsch, da wir x nicht kennen. Eine solche Gleichung hat jedoch die Form einer Aussage: Wenn man für x eine Zahl einsetzt, dann entsteht eine überprüfbare Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.
Daher nennt man eine Gleichung mit einer Variablen eine **Aussageform**.

Diejenige Zahl, die durch Einsetzen aus einer Aussageform eine wahre Aussage macht, nennt man eine Lösung. Alle Lösungen zusammen bilden die Lösungsmenge.

Die Gleichung $x + 2 = 8$ hat die Lösungsmenge $L = \{6\}$, denn 6 ist die einzige Zahl, die durch Einsetzen für x zu einer wahren Aussage führt: 6 + 2 = 8 ! (Den Grund erfahren wir später!)

Die Gleichung $12(x+4) - 3(x+1) = 8(12-x)$ hat $L = \{3\}$, denn durch Einsetzen von 3 für x entsteht: $12 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 8 \cdot 9$ bzw. $84 - 12 = 72$. Dies ist eine wahre Aussage, die aus der Gleichung durch Einsetzen entstehen kann.

Es gibt auch Gleichungen mit 2 Lösungen: $x^2 = 4$ hat die Lösungen 2 und – 2 und somit die Lösungsmenge $L = \{-2; 2\}$. Es gibt aber auch Gleichungen ohne Lösung, wie $x + 3 = x + 5$.

Hier kann man einsetzen, was man will: Immer wird die rechte Seite um 2 größer sein als die linke. Die Lösungsmenge ist daher leer: $L = \{\ \}$.

1.2 Man findet die Lösungen einer linearen Gleichung durch Äquivalenzumformungen!

Schauen wir uns das gezeigte Beispiel $12(x+4)-3(x+1)=8(12-x)$ an.
Niemand erkennt sofort, dass sie die Lösungszahl 3 besitzt. Also fragt man sich, was man tun muss, um dies herauszufinden. Hier das wichtige …

Lösungsprinzip für Gleichungen

Man formt eine Gleichung so lange um, bis am Ende eine möglichst einfache Gleichung da steht, deren Lösungsmenge man rasch erkennt.

Wichtig ist dabei, dass sich bei diesen Umformungen die Lösungsmenge nicht verändern darf. Dann kann man nämlich die Lösung der letzten (also einfachen) Gleichung auch für die gegebene Anfangsgleichung übernehmen !

Eine Umformung, welche die Lösungsmenge nicht ändert, heißt Äquivalenzumformung.

Hier eine Aufzählung der erlaubten Äquivalenzumformungen, mit denen man Gleichungen so verändern kann, dass sie einfacher werden, aber ihre Lösungsmenge nicht verändern:

Beispiel 1

$$x+5=8$$

Die Umformung besteht darin, dass man **auf beiden Seiten die Zahl 5 subtrahiert.** Dann entsteht diese neue Gleichung:

$$x=3$$

Sie hat die Lösungsmenge $L=\{3\}$, denn durch Einsetzen folgt die wahre Aussage 3 = 3 !

Wir machen dazu noch die Probe und setzen in der Ausgangsgleichung ein:
Dadurch entsteht $3+5=8$ und das ist eine wahre Aussage.

Also ist die Subtraktion der Zahl 5 auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung .

Beispiel 2

$$x-8=2$$

Äquivalenzumformung: Die **Addition der Zahl 8 auf beiden Seiten** ergibt

$$x=10$$

Diese Gleichung hat die Lösungsmenge $L=\{3\}$, denn durch Einsetzen folgt die wahre Aussage 10 = 10 !

Probe in der Ausgangsgleichung: 10 – 8 = 2 ist eine wahre Aussage.

Also ist die Addition der Zahl 8 auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung .

Beispiel 3
$$4x = 8$$

Äquivalenzumformung: **Auf beiden Seiten durch 4 dividieren**.
Dann entsteht diese neue Gleichung:

$$x = 2$$

Sie hat für jeden erkennbar die Lösungsmenge $L = \{2\}$, denn durch Einsetzen folgt die wahre Aussage 2 = 2 !

Wir machen die Probe und setzen in der Ausgangsgleichung ein:
So entsteht $4 \cdot 2 = 8$, und das ist ebenfalls eine wahre Aussage.

Also ist die Division durch die Zahl 4 auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung.

Beispiel 4
$$\tfrac{1}{3}x = \tfrac{2}{5}$$

Äquivalenzumformung: **Auf beiden Seiten mit 3 multiplizieren**.
Dann entsteht diese neue Gleichung:

$$x = \tfrac{6}{5}$$

Sie hat für jeden erkennbar die Lösungsmenge $L = \left\{\tfrac{6}{5}\right\}$, denn durch Einsetzen folgt die wahre Aussage $\tfrac{6}{5} = \tfrac{6}{5}$!

Wir machen die Probe und setzen in der Ausgangsgleichung ein:
So entsteht $\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{6}{5} = \tfrac{2}{5}$ und das ist ebenfalls eine wahre Aussage.

Also ist die Multiplikation mit der Zahl 3 auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung

Beispiel 5
$$8x + 5 = 5x - 1$$

Das Ziel der ersten Umformung ist es, dass das x nur noch links vorkommt, also **subtrahiert man 5x auf beiden Seiten**, ergibt:

$$3x + 5 = -1$$

Nun wird auf beiden Seiten 5 subtrahiert, damit links nur noch ein Vielfaches von x steht: $3x = -6$

Nun dividieren wir durch 3 und erhalten $x = -2$ mit $L = \{-2\}$

Die Probe in der Ausgangsgleichung liefert die wahre Aussage
$8 \cdot (-2) + 5 = 5 \cdot (-2) - 1$ also $-11 = -11$.

Also ist die Subtraktion des Terms 5x auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung.

Beispiel 6

$$12x+1=11-3x$$

Erste Umformung: **Addition von 3x auf beiden Seiten**, ergibt

$$15x+1=11$$

Zweite Umformung: **Subtraktion von 1 auf beiden Seiten**, ergibt

$$15x=10$$

Dritte Umformung: **Division durch 15** ergibt

$x=\frac{10}{15}$ bzw. $x=\frac{2}{3}$ mit $L=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

Die Probe in der Ausgangsgleichung liefert die wahre Aussage
$12\cdot\frac{2}{3}+1=11-3\cdot\frac{2}{3}$ also $4\cdot 2+1=11-2$ bzw. $9=9$.

Also ist die Addition des Terms 3x auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung .

Beispiel 7

$$3(4x-3)=4(2x+1)$$

Erste Umformung: **Vereinfachung der Terme links und rechts** durch Ausmultiplizieren, ergibt

$$12x-9=8x+4$$

Zweite Umformung: **Subtraktion von 8x auf beiden Seiten**, ergibt

$$4x-9=4$$

Dritte Umformung: **Addition von 9 auf beiden Seiten**, ergibt

$$4x=13$$

Vierte Umformung: **Division durch 4 auf beiden Seiten,** ergibt

$x=\frac{13}{4}$ mit $L=\left\{\frac{13}{4}\right\}$

Die Probe in der Ausgangsgleichung liefert

$$3\left(4\cdot\frac{13}{4}-3\right)=4\left(2\cdot\frac{13}{4}+1\right)$$

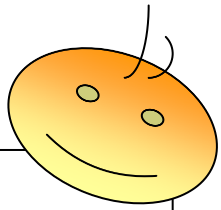
Um zu erkennen, ob dies eine wahre Aussage ist, empfiehlt es sich, bei so komplizierten Termen die linke Seite und die rechte Seite getrennt zu berechnen:

Probe: Linke Seite = $3\left(4\cdot\frac{13}{4}-3\right)=3\cdot(13-3)=3\cdot 10=30$

Rechte Seite = $4\left(2\cdot\frac{13}{4}+1\right)=4\cdot\left(\frac{13}{2}+1\right)=4\cdot\frac{15}{2}=2\cdot 15=30$

Die Termumformung ist also auch eine Äquivalenzumformung der Gleichung.

1.3 Die wichtigste Seite in diesem Manuskript!



Wir haben folgende Äquivalenzumformungen gesehen:

Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten (in Beispiel 1)
Addition einer Zahl auf beiden Seiten (in Beispiel 2)
Division einer Zahl auf beiden Seiten (in Beispiel 3)
Multiplikation einer Zahl auf beiden Seiten (in Beispiel 4)
Subtraktion eines Vielfachen von x auf beiden Seiten (in Beispiel 5)
Addition eines Vielfachen von x auf beiden Seiten (in Beispiel 6)
Vereinfachung eines Terms in einer Gleichung (in Beispiel 7).

VORSICHT. LEBENSGEFAHR.

Bei der Multiplikation einer Gleichung gibt es eine Einschränkung:
Man darf eine Gleichung nicht mit der Zahl 0 multiplizieren:

Beispiel, was dann passiert:

$x = 8$ hat die Lösungszahl 8.

Multipliziert man beide Seiten mit 0, erhält man die Gleichung $0 \cdot x = 0 \cdot 8$, also 0 = 0, und diese Gleichung hat jede Zahl als Lösung! Diese Multiplikation mit 0 verändert also die Lösungsmenge, weshalb sie als Äquivalenzumformung nicht in Frage kommt und somit verboten ist.

Zusammenfassung:

Äquivalenzumformungen für Gleichungen sind

1. **Addition und Subtraktion einer Zahl** auf beiden Seiten
2. **Multiplikation und Division mit einer Zahl ungleich 0** auf beiden Seiten
3. **Addition oder Subtraktion eines Vielfachen von x** auf beiden Seiten
4. **Termumformungen** auf einer oder beiden Seiten

Damit formt man die Gleichungen mit folgendem Ziel um:

1. Schritt: **Vereinfache wenn notwendig die Terme auf beiden Seiten der Gleichung.**

2. Schritt: **Addiere oder subtrahiere Terme (Zahlen oder Vielfache von x) so, dass auf einer Seite nur noch ein Vielfaches von x übrig bleibt.**

3. Schritt: **Multipliziere oder dividiere die Gleichung so, dass die Endgleichung nur noch die Form „x = Zahl“ hat.**

2 Musterbeispiele

Man schreibt die durchzuführende Äquivalenzumformung meistens hinter einen Begrenzungsstrich rechts neben die Gleichung.

Außerdem achte man darauf, dass die Gleichheitszeichen stets untereinander stehen, damit bleibt die Lösung der Gleichung übersichtlich!

Beispiel 8

$$\begin{aligned} 3x+15 &= 23-5x \quad &&|+5x \\ 8x+15 &= 23 &&|-15 \\ 8x &= 8 &&|:8 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $L=\{1\}$

Beispiel 9

$$\begin{aligned} 12x+4-5x+8 &= 3x-20 \\ 7x+12 &= 3x-20 \quad &&|-3x \\ 4x+12 &= -20 &&|-12 \\ 4x &= -32 &&|:4 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $L=\{-8\}$

Hier wurde im 1. Schritt der Term auf der linken Seite vereinfacht.
Das macht man immer zuerst!

Beispiel 10

$$\begin{aligned} 4(x+2) &= 2(3x-7) \\ 4x+8 &= 6x-14 \quad &&|-6x \\ -2x+8 &= -14 &&|-8 \\ -2x &= -22 &&|:(-2) \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $L=\{11\}$

Auch hier bestand der erste Schritt darin, die Terme zu vereinfachen.

Beispiel 11

$$\begin{aligned} 3(7x+8)+4(2-x) &= 8-3(5x-8) \\ 21x+24+8-4x &= 8-15x+24 \\ 17x+32 &= 32-15x \quad &&|+15x \\ 32x+32 &= 32 &&|-32 \\ 32x &= 0 &&|:32 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $L=\{0\}$

Und jetzt mit Bruchzahlen:

Beispiel 12

$$\frac{1}{3}x - 4 = 5 \quad |+4$$
$$\frac{1}{3}x = 9 \quad |\cdot 3$$
$$x = 27 \qquad \text{denn } 3\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{3} = 1$$

Lösungsmenge: $L = \{27\}$

Beispiel 13

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2}x \quad |\cdot 6 \;\; !!!$$
$$\frac{2}{3}\boxed{\cdot 6}\cdot x - \frac{1}{2}\boxed{\cdot 6} = 5\boxed{\cdot 6} - \frac{1}{2}\boxed{\cdot 6}\cdot x$$
$$4x - 3 = 30 - 3x \quad |+3x$$
$$7x - 3 = 30 \quad |+3$$
$$7x = 33 \quad |:7$$
$$x = \frac{33}{7}$$

Lösungsmenge: $L = \left\{\frac{33}{7}\right\}$

Hier habe ich einen wichtigen TRICK angewandt. Um die Brüche mit einem Schlag zu beseitigen, habe ich die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner 6 multipliziert und dabei gleich gekürzt:

$\frac{2}{3}x\cdot 6 = 2x\cdot 2 = 4x$, $\frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ usw.

Beispiel 14

$$3\left(\frac{3}{4}x + \frac{39}{20}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{4}\right)$$
$$\frac{9}{4}x + \frac{117}{20} = \frac{2}{15}x - \frac{1}{2} \quad |\cdot HN = 4\cdot 15 = 60$$
$$135x + 351 = 8x - 30 \quad |-8x$$
$$127x + 351 = -30 \quad |-351$$
$$127x = -381 \quad |:127$$
$$x = -3$$

Lösungsmenge: $L = \{-3\}$

Hier zeige ich noch einmal, wie man bei einer solchen Gleichung die Probe macht, indem man die linke und rechts Seite getrennt berechnet:

$$LS = 3\left(\frac{3}{4}\cdot(-3) + \frac{39}{20}\right) = 3\cdot\left(-\frac{9}{4} + \frac{39}{20}\right) = 3\cdot\left(-\frac{45}{20} + \frac{39}{20}\right) = 3\cdot\left(-\frac{6}{20}\right) = 3\cdot\left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{9}{10}$$
$$RS = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\cdot(-3) - \frac{5}{4}\right) = \frac{2}{5}\cdot\left(-1 - \frac{5}{4}\right) = \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{9}{10}.$$

Beide Seiten sind gleich, also ergibt sich durch Einsetzen eine wahre Aussage!

Sonderfälle von Gleichungen

Beispiel 15

$$\begin{aligned} 3(4x-2)-5(2x+6) &= 2(x+13) \\ 12x-6-10x-30 &= 2x+26 \\ 2x-36 &= 2x+26 \quad \mid -2x \\ -36 &= 26 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt eine falsche Aussage dar.
Sie hat keine Lösungsmenge. Man kann sagen, die Annahme, die Gleichung sei lösbar, führt zu einem Widerspruch, also war die Annahme falsch.

Die gegebene Gleichung hat keine Lösung: $L = \{\ \}$

Beispiel 16

$$\tfrac{2}{5}(x-3)+\tfrac{1}{3}(2x+5) = \tfrac{2}{3}(4x+1)-\tfrac{4}{5}(2x-9)$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner 15:

$$\begin{aligned} 6(x-3)+5(2x+5) &= 10(4x+1)-12(2x-9) \\ 6x-18+10x+25 &= 40x+10-24x+108 \\ 16x+7 &= 16x+118 \quad \mid -16x \\ 7 &= 118 \end{aligned}$$

Widerspruch, also $L = \{\ \}$

Beispiel 17

$$\begin{aligned} 4x+3-(15x+2) &= 2(4-4x)-(3x+7) \\ 4x+3-15x-2 &= 8-8x-3x-7 \\ -11x+1 &= -11x+1 \end{aligned}$$

Weil auf beiden Seiten der Gleichung derselbe Term steht, liefert das Einsetzen jeder beliebigen Zahl eine wahre Aussage.

Beispiel: Für x = 5 folgt: $-55+1 = -55+1$ bzw. $-54 = -54$!

Die Lösungsmenge ist die gesamte Grundmenge $L = \mathbb{Q}$!

Beispiel 18

$$\begin{aligned} 3\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)-4\left(x+\tfrac{1}{3}\right) &= -5\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}\right) \\ \tfrac{3}{2}x+3-4x-\tfrac{4}{3} &= -\tfrac{5}{2}x+\tfrac{5}{3} \\ \tfrac{3}{2}x-\tfrac{8}{2}x+\tfrac{9}{3}-\tfrac{4}{3} &= -\tfrac{5}{2}x+\tfrac{5}{3} \\ -\tfrac{5}{2}x+\tfrac{5}{3} &= -\tfrac{5}{2}x+\tfrac{5}{3} \\ L &= \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Man sagt in so einem Fall auch: Die Gleichung ist allgemeingültig.

3 Quadratische Gleichungen, die auf lineare Gleichungen führen

ACHTUNG: Zur Lösung der folgenden Gleichungen benötigt man meistens die binomischen Formeln: Diese sind in der Regel Stoff der 8. Klasse. Wer sie also noch nicht behandelt hat, kann diese Gleichung nicht lösen.

Beispiel 19

$$4(x-3)^2 = 2(2x^2-3)$$

2. Binomische Formel anwenden: $(x-3)^2 = x^2-6x+9$ ergibt:

$$\begin{aligned}
4(x^2-6x+9) &= 4x^2-6 \\
4x^2-24x+36 &= 4x^2-6 \quad |-4x^2 \\
-24x+36 &= -6 \quad |-36 \\
-24x &= -42 \quad |:(-24) \\
x &= \tfrac{42}{24} = \tfrac{7}{4} \\
L &= \left\{\tfrac{7}{4}\right\}
\end{aligned}$$

Der quadratische Term $4x^2$ tritt auf beiden Seiten auf und fällt daher durch die Äquivalenzumformung weg, wodurch eine lineare Gleichung übrig bleibt!

Beispiel 20

$$\left(\tfrac{1}{2}x+3\right)^2 + 3\left(\tfrac{1}{2}x-3\right)^2 = (x-2)(x+2)$$

Alle drei binomischen Formeln anwenden:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad \text{und} \quad (a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}x^2+3x+9+3\left(\tfrac{1}{4}x^2-3x+9\right) &= x^2-4 \\
\tfrac{1}{4}x^2+3x+9+\tfrac{3}{4}x^2-9x+27 &= x^2-4 \\
x^2-6x+36 &= x^2-4 \quad |-x^2 \\
-6x+36 &= -4 \quad |-36 \\
-6x &= -40 \quad |:(-6) \\
x &= \tfrac{20}{3} \\
L &= \left\{\tfrac{20}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Beispiel 21

$$\begin{aligned}
(2x+1)^2 &= 4(x^2+x-2) \\
4x^2+4x+1 &= 4x^2+4x-8 \quad |-4x^2 \\
4x+1 &= 4x-8 \quad |-4x \\
1 &= -8
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist $L = \{\ \}$.

Beispiel 22

$$\begin{aligned}
(3x-4)(3x+4)-(2x+5)^2 &= 5(x-2)^2-61 \\
9x^2-16-(4x^2+20x+25) &= 5(x^2-4x+4)-61 \\
5x^2-20x-41 &= 5x^2-20x-41
\end{aligned}$$

$L = \mathbf{Q}$, diese Gleichung ist allgemein gültig.

4 Textaufgaben, die zu Gleichungen führen

Beispiel 23

Zu welcher Zahl muss man 18 addieren, um ihr Dreifaches zu erhalten?

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: $x + 18$
   2. Term: $3x$
3. Schritt: Gleichung aufstellen: $x + 18 = 3x$
4. Schritt: Gleichung lösen $| - x$: $18 = 2x \quad | :2$
   $9 = x$
5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist 9.

Beispiel 24

Von welcher Zahl muss man 11 subtrahieren, um das Doppelte zu erhalten?

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: $x - 11$
   2. Term: $2x$
3. Schritt: Gleichung aufstellen: $x - 11 = 2x$
4. Schritt: Gleichung lösen $| - x$: $- 11 = x$
5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist - 11.

Beispiel 25

Addiert man zum Fünffachen einer Zahl 12, so erhält man dasselbe, als wenn man zu ihrem Dreifachen 30 addiert.

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: $5x + 12$
   2. Term: $3x + 30$
3. Schritt: Gleichung aufstellen: $5x + 12 = 3x + 30 \quad | -3x - 12$
4. Schritt: Gleichung lösen $2x = 18 \quad | :2$
   $x = 9$
5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist 9.

Beispiel 26

Multipliziert man die Differenz aus dem Dreifachen einer Zahl und 5 mit 8, erhält man dasselbe, als wenn man zum 10-fachen der Zahl 2 addiert.

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: $8(3x-5)$
   2. Term: 10 x + 2
3. Schritt: Gleichung aufstellen: $8(3x-5)=10x+2$
4. Schritt: Gleichung lösen

$$\begin{aligned} 24x-40 &= 10x+2 \quad |-10x+40 \\ 14x &= 42 \quad |:14 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist 3.

Anmerkung:

Diese Aufgabe ist nicht eindeutig gestellt und lässt noch einen zweiten Ansatz zu: Es ist nämlich nicht klar, ob man unter der Differenz von 3x und 5 $3x-5$ oder $5-3x$ versteht.

Die <u>zweite Lösung</u> sieht daher so aus:

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: $8(5-3x)$
   2. Term: 10 x + 2
3. Schritt: Gleichung aufstellen: $8(5-3x)=10x+2$
4. Schritt: Gleichung lösen

$$\begin{aligned} 40-24x &= 10x+2 \quad |-10x-40 \\ -34x &= -38 \quad |:(-34) \\ x &= \tfrac{38}{34}=\tfrac{19}{17} \end{aligned}$$

5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist $\frac{19}{17}$.

Man könnte die Aufgabe bzw. Lösung eindeutig machen, wenn man etwa sagt:

Multipliziert man die Differenz aus dem Dreifachen einer ganzen Zahl und 5 mit 8, erhält man dasselbe, als wenn man zum 10-fachen der Zahl 2 addiert.

Oder für die zweite Lösung: „*.... eines Bruches ....*“

Beispiel 27

Das Zehnfache einer Zahl ist um 8 größer als ihr Sechsfaches.

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: 10x
   2. Term: 6x
3. Schritt: Gleichung aufstellen:

Wenn das Zehnfache um 8 größer ist, muss man von ihm 8 subtrahieren, damit es gleich groß wird wie das Sechsfache:

$$10x - 8 = 6x \quad | +8 - 6x$$

4. Schritt: Gleichung lösen

$$4x = 8$$
$$x = 2$$

5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist 2.

Beispiel 27

Das Vierfache einer Zahl ist um 15 kleiner als ihr Siebenfaches.

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: 4x
   2. Term: 7x
3. Schritt: Gleichung aufstellen:

Wenn das Vierfache um 15 kleiner ist, muss man zu ihm 15 addieren, damit es gleich groß wird wie sein Siebenfaches:

$$4x + 15 = 7x \quad | -4x$$

4. Schritt: Gleichung lösen

$$15 = 3x \quad | :3$$
$$5 = x$$

5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist 5.

Beispiel 28

Subtrahiert man vom 12-fachen einer Zahl 15, erhält man eine Zahl, die um 3 kleiner ist, als wenn man das Fünffache um 30 vergrößert.

Lösung

1. Schritt: Die gesuchte Zahl sei x.
2. Schritt: 1. Term: 12x - 15
   2. Term: 5x+30
3. Schritt: Gleichung aufstellen: $12x - 15 + 3 = 5x + 30 \quad | -5x + 12$
4. Schritt: Gleichung lösen $7x = 42 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$
5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist 6.

Beispiel 29

In 20 Streichholzschachteln sollen je eine 1 € oder eine 2 € Münze gelegt werden. Der Gesamtbetrag soll 28 € sein. Wieviele Münzen benötigt man von jeder Sorte?

Lösung

1. Schritt: x sei die Anzahl der 1 € - Münzen.
Weil insgesamt nur 20 Münzen verwendet werden, bleiben 20 – x 2 € - Münzen übrig.

2. Schritt: 1. Term (Berechnung des Gesamtwertes aus den Münzen):
$$x \cdot 1\,€ + (20 - x) \cdot 2\,€$$
2. Term (Angegebener Gesamtbetrag: 28 €

3. Schritt: Gleichung aufstellen: $x + (20 - x) \cdot 2 = 28$ (ohne €)

4. Schritt: Gleichung lösen
$$\begin{aligned} x + 40 - 2x &= 28 \\ -x + 40 &= 28 \quad | +x - 28 \\ 12 &= x \end{aligned}$$

5. Schritt: Ergebnis: Man benötigt 12 1€ - Münzen und folglich 8 2 € - Münzen.

Beispiel 30

Kann man aus 15 Münzen in Form von 5 € Stücken und 2 € Stücken den Betrag 50 Euro bilden ?

Lösung

1. Schritt: x sei die Anzahl der 5 € - Münzen.
Weil insgesamt 15 Münzen verwendet werden, bleiben 15 – x 2 € - Münzen übrig.

2. Schritt: 1. Term (Berechnung des Gesamtwertes aus den Münzen):
$$x \cdot 5\,€ + (15 - x) \cdot 2\,€$$
2. Term (Angegebener Gesamtbetrag: 50 €

3. Schritt: Gleichung aufstellen: $5x + (15 - x) \cdot 2 = 50$ (ohne €)

4. Schritt: Gleichung lösen
$$\begin{aligned} 5x + 30 - 2x &= 50 \quad | -30 \\ 3x &= 20 \quad | :3 \\ x &= \tfrac{20}{3} \end{aligned}$$

Ergebnis: Da $\frac{20}{3}$ als Bruch nicht die Anzahl der 5 € - Münzen sein kann, ist es nicht möglich, auf diese Weise 50 € zusammen zu stellen.

Beispiel 31

Die Summe zweier Zahlen ist 46, ihre Differenz jedoch 16. Welche Zahlen sind gemeint?

Lösung

1. Schritt: Die erste Zahl sei x, die zweite sei y.
Weil ihre Summe x + y = 46 ist, können wir die zweite Zahl y auch so schreiben: y = 46 – x.

2. Schritt: Weitere Bedingung ist: Die Differenz ist 16. Das heißt
(a) x – y = 16 oder (b) y – x = 16

3. Schritt: Gleichung:
Ersetzt man y wieder durch 46 – x, erhält man:

(a) $x-(46-x)=16$ oder (b) $(46-x)-x=16$

$$x-46+x=16 \qquad 46-x-x=16$$
$$2x=62 \qquad -2x=-30$$
$$x=31 \qquad x=15$$

4. Schritt: Berechnung der zweiten Zahl durch y = 46 – x:
(a) zu x = 31: y = 46 – 31 = 15
(b) zu x = 15: y = 46 – 15 = 31

5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchten Zahlen sind 15 und 31.

Beispiel 32

Eine Zahl ist um 20 größer als die andere. Ihr Produkt ist gleich groß wie das Quadrat einer der beiden Zahlen.

Lösung

1. Schritt: Die erste Zahl sei x, die zweite ist dann y = x+20

2. Schritt: Bedingung ist:
(a) $x\cdot(x+20)=x^2$ oder (b) $x(x+20)=(x+20)^2$

3. Schritt: Lösen der Gleichung
(a) $x^2+20x=x^2$ oder $x^2+20x=x^2+40x+400$

$$20x=0 \qquad -20x=400$$
$$x=0 \qquad x=-20$$

4. Schritt: Berechnung der zweiten Zahl durch y = x + 20:
(a) zu x = 0: y = 0 + 20 = 20
(b) zu x = -20: y = -20 +20 = 0

5. Schritt: Ergebnis: Die gesuchten Zahlen sind 0 und 20.

Beispiel 33 (Geometrie)

Verkürzt man die Seite eines Quadrats um 5 cm, dann verkleinert sich sein Inhalt um 135 cm^2. Wie groß war die Quadratseite?

Lösung

Die alte Quadratseite sei x, die neue ist dann (x – 5).

Flächeninhalt des neuen Quadrats: $(x-5)^2$.

Gleichung: $(x-5)^2 = x^2 - 135$

Lösen:
$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= x^2 - 135 \\ -10x + 25 &= -135 \quad |+10x+135 \\ 160 &= 10x \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Quadratseite hatte 16 cm Länge.

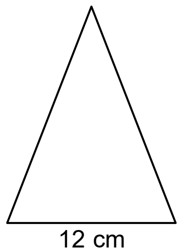
Beispiel 34 (Geometrie)

Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis 12 cm hat den Umfang 28 cm. Wie lang sind die beiden Schenkel?

Lösung

Ein Schenkel habe die Länge x, dann gilt für den Umfang U = 2x + 12.

Dies ergibt die Gleichung
$$\begin{aligned} 2x + 12 &= 28 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$



Ergebnis: Das Dreieck hat zwei Schenkel der Länge 8 cm.

Beispiel 35 (Geometrie)

Bei einem Rechteck haben die Seiten einen Unterschied von 4 cm. Sein Umfang beträgt 48 cm. Wie lang sind seine Seiten ?

Lösung

Die erste Rechteckseite sei x, die zweite y.
Weil der Unterschied 4 ist, gilt entweder y = x – 4 (dann ist y um 4 kleiner) oder y = x + 4 (dann ist y um 4 größer als x).

Umfang: $U = 2x + 2y = 2x + 2(x-4)$ oder $U = 2x + 2y = 2x + 2(x+4)$

Gleichung: $2x + 2(x-4) = 48$ oder $2x + 2(x+4) = 48$

Lösen: $4x - 8 = 48$ oder $4x + 8 = 48$

$4x = 56$ bzw. $4x = 40$

$x = 14$ bzw. $x = 10$

Berechnung der zweiten Seite:
Im 1. Fall ist y = x – 4 = 10 im 2. Fall ist y = x + 4 = 14.
Ergebnis: Die Rechtecksseiten sind 10 cm und 14 cm lang.

Beide Ansätze führen zum selben Ergebnis!

Beispiel 36

Wenn man einen Geldbetrag verdoppelt, hat man genau denselben Betrag mehr als 90 €, als man zuvor weniger als 90 € hatte.

Um welchen Betrag handelt es sich?

Lösung

Erster Betrag: x
Zweiter Betrag: $2x$
Differenz des 2. Betrags zu 90 €: $2x - 90$
Differenz des 1. Betrags zu 90 €: $90 - x$
(Denn der doppelte Betrag ist größer als 90 €, der ursprüngliche kleiner!)

Gleichung: $2x - 90 = 90 - x \quad | +x+90$

Lösen:
$$3x = 180$$
$$x = 60$$

Ergebnis: Der Geldbetrag war 60 €.

Beispiel 37

Die Summe zweier Zahlen beträgt 74, ihre Differenz 16.
Um welche Zahlen handelt es sich.

Lösung

Anmerkung: Wenn die Differenz 16 ist, dann ist die zweite Zahl y entweder um 16 kleiner als die erste Zahl x: y = x – 16, oder sie ist um 16 größer also die erste: y = x + 16.

Gleichung: $x + y = 74$

d.h.

$$x + (x-16) = 74 \quad \text{oder} \quad x + (x+16) = 74$$
$$2x - 16 = 74 \quad \text{oder} \quad 2x + 16 = 74$$
$$2x = 90 \quad \text{oder} \quad 2x = 58$$
$$x = 45 \quad \text{oder} \quad x = 29$$

Berechnung der zweiten Zahl y:

$$y = x - 16 = 45 - 16 = 29 \quad \text{oder} \quad y = x + 16 = 29 + 16 = 45$$

Ergebnis: Die gesuchten Zahlen sind 29 und 45.

Beide Ansätze führen zum selben Ergebnis!

Beispiel 38

Eine zweistellige Zahl hat die Quersumme 14. Vertauscht man die Ziffern, erhält man eine um 18 größere Zahl. Wie lautete sie ursprünglich?

Lösung

Eine zweistellige Zahl schreibt man normalerweise so „xy“ wobei x die Zehnerziffer und y die Einerziffer ist. Beispiel „47“ ist die Zahl $4 \cdot 10 + 7$
Daher ist „xy“ die Zahl $x \cdot 10 + y$ oder 10x + y.

Vertauscht man die Ziffern, entsteht die zweite Zahl $"yx" = 10y + x$.
Wir kennen die Quersumme: x + y = 14, also ist die Einerziffer y = 14 – x.
Ersetzen wir dies, erhalten wir
als erste Zahl: $"xy" = 10x + y = 10x + 14 - x = 9x + 14$
als zweite Zahl: $"yx" = 10y + x = 10(14 - x) + x = 140 - 10x + x = 140 - 9x$.

Eine der beiden Zahlen ist um 18 größer als die andere. Also gibt es 2 Möglichkeiten:

(1) $"xy" = "yx" - 18$

$$9x + 14 = 140 - 9x - 18$$
$$18x = 108$$
$$x = 6$$

(2) $"yx" = "xy" - 18$

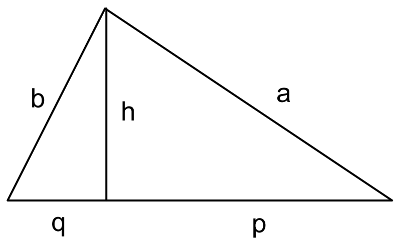
$$140 - 9x = 9x + 14 - 18$$
$$144 = 18x$$
$$8 = x$$

Die Einerziffer berechnet man über die Quersumme $y = 14 - x$

(1) $y = 14 - 6 = 8$ (2) $y = 14 - 8 = 6$

Ergebnis: Die Zahl heißt 68 bzw. 86, wenn die Ziffern vertauscht werden.

Beispiel 39



In einem Dreieck sei q = 3 cm und p = 5 cm.
Die Summe der Seiten a und b ist 16 cm
Bestimme die Längen der Seiten a und b.

Lösung:

Die Höhe h teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Auf jedes wendet man den Satz des Pythagoras an:

$$b^2 = q^2 + h^2 \qquad (1)$$
$$a^2 = p^2 + h^2 \qquad (2)$$

Durch Subtraktion fällt die unbekannte Höhe h heraus:

$$b^2 - a^2 = q^2 - p^2 \qquad (3)$$

Nun setzt man die gegebenen Größen ein:

$q = 3,\; p = 5$ und aus $a + b = 16$ macht man $b = 16 - a$

Aus (3) folgt dann: $(16-a)^2 - a^2 = 9 - 25$

$$256 - 32a + a^2 - a^2 = -16$$

Ordnen: $-32a = -272 \quad | : (-32)$

$$a = \frac{272}{32} = 8{,}5$$

Folgerung: $b = 16 - a = 16 - 8{,}5 = 7{,}5$

Ergebnis: Die Längen der gesuchten Seiten sind $a = 8{,}5\text{ cm}$ und $b = 7{,}5\text{ cm}$.

5 Trainingsteil – Vermischte Aufgaben zum Üben

5.0 Einfachste Gleichungen

(1) $x+7=-3$

(2) $4x=36$

(3) $\frac{1}{2}x=7$

(4) $-3x=-\frac{6}{5}$

(5) $-x+2=-5$

(6) $4x=0$

(7) $5x+8=12$

(8) $-3x+2=-4$

(9) $5x+22=7$

5.1 Einfache Gleichungen

(10) $-x+2=8-3x$

(11) $13x+4=8x-6$

(12) $24x+18=12x+18$

(13) $3x-15=13x+5$

(14) $-35x+12=28x+19$

(15) $3x+5-12x+18=7x-33$

(16) $-3x-5=12x+25$

(17) $6x+8=6x-13$

(18) $19x-11-17x+14=2x+3$

(19) $1729\,x-258=433x-474$

5.2 Gleichungen mit Brüchen

(20) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}=-\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$

(21) $\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}=\frac{1}{4}x-\frac{7}{6}$

(22) $\frac{4}{45}x-\frac{2}{18}=\frac{3}{5}x+\frac{13}{90}$

(23) $\frac{1}{12}x-\frac{3}{15}=-\frac{4}{20}x-\frac{1}{3}$

(24) $\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}$

(25) $\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}=\frac{3}{10}x-\frac{9}{20}$

(26) $-\frac{4}{9}+\frac{5}{18}x-\frac{5}{6}x-2=-3x-\frac{5}{2}$

(27) $\frac{4}{3}x+\frac{1}{7}-\frac{13}{3}x+\frac{8}{7}=\frac{13}{7}-\frac{5}{3}x$

(28) $\frac{100}{3}x+\frac{5}{8}-\frac{125}{6}x-\frac{7}{4}=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x-\frac{7}{12}$

(29) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}x+\frac{5}{24}=-\frac{7}{30}x-\frac{7}{40}+\frac{1}{4}x$

5.3 Gleichungen mit Klammern

(30) $5(2x-8)=3(4x+11)$

(31) $9(2x-13)-4(5x-3)=3(5x-10)-4(10+3x)$

(32) $13(5x-4)-6(7x-8)=-2(5x-6)+3(11x-4)$

(33) $14(2x-1)+3(8x+4)=3(2x+8)+14(-x+1)$

(34) $-2(-4x+5)+3(3x-11)=12(2x-2)-13(13x-5)$

(35) $\frac{1}{2}(2x+3)-\frac{2}{3}(x+6)-\frac{5}{4}\left(12x-\frac{8}{5}\right)=0$

(36) $\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{4}{9}\right)-2\left(\frac{5}{18}x+1\right)$

(37) $\frac{2}{3}\left(4x+\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{4}\left(5x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}x+1\right)-\frac{13}{6}$

(38) $7\left(\frac{5}{12}x+\frac{4}{18}\right)-5\left(\frac{5}{6}x+11\right)-\frac{3}{4}\left(2x-\frac{4}{3}\right)=\frac{23}{9}$

(39) $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}\right)-3\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}\right)$

5.4 Quadratische Gleichungen

(40) $(2x-5)^2 = 4(x+1)^2$

(41) $3x^2 + 2 = 3(x-1)^2$

(42) $x(x+2) + 4x(2x+1) = (3x-5)^2$

(43) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4(x+3)$

(44) $5(2x-1)^2 = 4(5x^2 - 2x + 1)$

(45) $(x+4)(x+3) - (2x+1)(2x-1) = 3(5-x^2)$

(46) $(4x+3)^2 - 2(x^2-4) = (3x+5)^2 + 5(x^2+3x-2)$

(47) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x-2\right)^2 = \frac{5}{2}(x-1)(x+1)$

(48) $(3x-12)^2 + (4x-9)^2 = (5x+11)^2 - 23$

(49) $(13x-1)^2 - (5x+2)^2 = (12x-4)^2 + 50x - 19$

Lösungen dazu

Die Lösungen der Trainingsaufgaben gibt es nur im Originaltext
auf der Mathe-CD.