ALGEBRA

Quadratwurzeln

Teil 1

Einführung und Grundeigenschaften

(Klasse 8 / 9)

Datei Nr. 12201

Friedrich W. Buckel

Stand: 10. Januar 2018

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

DEMO

Vorwort

Die Einführung des 12-jährigen Gymnasiums hat die Einführung der Quadratwurzeln größtenteils schon in Klasse 8 vorverlegt. Meistens jedoch noch ohne eine gründliche Behandlung (Wurzelgesetze, Potenzgesetze). Man benötigt sie vor allem, um den Satz des Pythagoras dort schon behandeln zu können.

Aus diesem Grund habe ich die Einführung der Quadratwurzeln umgeschrieben. Wer in Klasse 8 diesen Stoff lesen will, kann nun so weit damit arbeiten wie er es braucht. Mehr als § 1 bis 5 wird sicher kaum benötigt werden. Der Rest gehört wohl zu Klasse 9.

Ich habe die Untersuchungen, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch bzw. periodische Dezimalzahl schreiben lässt, die Berechnung mittels Intervallschachtelungen und das Näherungsverfahren von Heron aus diesem Text herausgenommen. Man findet diese Dinge in der Datei „13050 Reelle Zahlen“.

DEMO

Inhalt

§ 1 Quadratwurzeln

1.1 Warum man Quadratwurzeln braucht

Jede Rechenart lässt sich umkehren:

Addition: $16\boxed{+3}=19$

Umkehrung = Subtraktion: $19\boxed{-3}=16$

Dies kann man graphisch so andeuten: $16 \underset{-3}{\overset{+3}{\rightleftarrows}} 19$

Multiplikation: $16\boxed{\cdot 3}=48$

Umkehrung = Division: $48\boxed{:3}=16$

Dies kann man graphisch so andeuten: $16 \underset{:3}{\overset{\cdot 3}{\rightleftarrows}} 48$

Quadrieren: $3^2=9$

Umkehrung = Wurzelziehen $\sqrt{9}=3$

Dies kann man graphisch so andeuten: $3 \underset{\sqrt{}}{\overset{\text{hoch } 2}{\rightleftarrows}} 9$

Um Quadrieren rückgängig zu machen, verwendet man das Wurzelziehen.

$2 \xrightarrow[\text{quadr.}]{} 4$ rückgängig: $4 \xrightarrow[\text{Umkehrung: Wurzel ziehen}]{} 2$ Man schreibt: $\sqrt{4}=2$

$3 \xrightarrow[\text{quadr.}]{} 9$ rückgängig: $9 \xrightarrow[\text{Umkehrung: Wurzel ziehen}]{} 3$ Man schreibt: $\sqrt{9}=3$

$8 \xrightarrow[\text{quadr.}]{} 64$ rückgängig: $64 \xrightarrow[\text{Umkehrung: Wurzel ziehen}]{} 8$ Man schreibt: $\sqrt{64}=8$.

ACHTUNG: Das Quadrieren von negativen Zahlen kann man umkehren:

$-2 \xrightarrow[\text{quadr.}]{} 4$ rückgängig: $4 \xrightarrow[\text{Umkehrung: Wurzel ziehen}]{} 2$

$\sqrt{4}$ ist also nicht auch -2!

Merke:
Eine Wurzel ist stets
eine nicht negative Zahl!
Siehe Seite 6!

Schauen wir uns dazu einige Berechnungen an:

$\sqrt{25}=5$, denn $5^2=25$

$\sqrt{36}=6$, denn $6^2=36$

$\sqrt{49}=7$, denn $7^2=49$

$\sqrt{144}=12$, denn $12^2=144$

$\sqrt{0{,}36}=0{,}6$, denn $0{,}6^2=0{,}6\cdot 0{,}6=0{,}36$

DEMO

1.2 Die wichtigsten Quadratwurzeln sollte man lernen:

Damit man nicht ständig den Taschenrechner benützen muss, sollte man die Quadratzahlen bis 20 auswendig lernen. Dann kennt man auch die zugehörigen Wurzeln.

LERNE DRINGEND AUSWENDIG:

$1^2 = 1$	also	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	also	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	also	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	also	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	also	$\sqrt{25} = 5$
$6^2 = 36$	also	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	also	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	also	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	also	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	also	$\sqrt{100} = 10$
$11^2 = 121$	also	$\sqrt{121} = 11$
$12^2 = 144$	also	$\sqrt{144} = 12$
$13^2 = 169$	also	$\sqrt{169} = 13$
$14^2 = 196$	also	$\sqrt{196} = 14$
$15^2 = 225$	also	$\sqrt{225} = 15$
$16^2 = 256$	also	$\sqrt{256} = 16$
$17^2 = 289$	also	$\sqrt{289} = 17$
$18^2 = 324$	also	$\sqrt{324} = 18$
$19^2 = 361$	also	$\sqrt{361} = 19$
$20^2 = 400$	also	$\sqrt{400} = 20$

DEMO

Kennt man diese Quadrate bzw. Wurzeln, dann kann man auch andere schnell ermitteln, etwa

$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, denn $1{,}2^2 = 1{,}44$

$\sqrt{2500} = 50$, denn $50^2 = 2500$

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$\sqrt{\frac{196}{225}} = \frac{14}{15}$, denn $\left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{14}{15} \cdot \frac{14}{15} = \frac{196}{225}$

Wir werden auf den nächsten Seiten einige Regeln kennen lernen, die es uns noch leichter machen, aus Dezimalzahlen oder Brüchen die Wurzeln zu ziehen.
Die folgenden Übungen dienen jetzt einfach der Besinnung. Verwende die Wurzeln der Tabelle und versuche damit die Ergebnisse zu finden:

Aufgabe 1

Berechne ohne Taschenrechner: (Ausführliche Lösung Seite 16 auf der Mathematik-CD)

(a) $\sqrt{3{,}24}$ (b) $\sqrt{0{,}49}$ (c) $\sqrt{0{,}81}$

(d) $\sqrt{0{,}0144}$ (e) $\sqrt{1{,}69}$ (f) $\sqrt{0{,}0169}$

(g) $\sqrt{900}$ (h) $\sqrt{10000}$ (i) $\sqrt{28900}$

(j) $\sqrt{\frac{16}{81}}$ (k) $\sqrt{\frac{64}{9}}$ (l) $\sqrt{\frac{400}{361}}$

DEMO

Wir merken uns noch einen wichtigen Begriff:

Die Zahl, aus der man die Wurzel ziehen soll, die also unter der Wurzel steht, heißt **Radikand**.

Dieses Wort kennt jeder: Wenn er Radieschen isst, verspeist er eine Wurzel. Wurzel ziehen heißt auch Radizieren.

Ganz wichtig:

Das Ergebnis eines Quadrats ist stets eine nicht negative Zahl.
Daher kann man aus negativen Zahlen auch nie eine Wurzel ziehen:

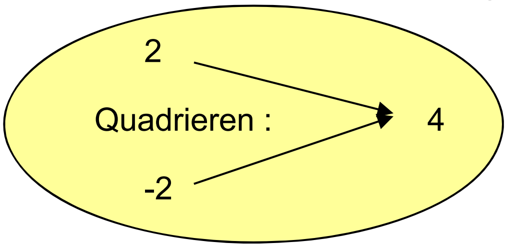
$\sqrt{-2}$ existiert für uns nicht, weil kein Quadrat das Ergebnis - 2 hat.

1.3 Wer das nicht weiß, erleidet Schiffbruch:

Wissen: Quadriert man eine negative Zahl wird sie positiv.

Es ist also $2^2 = 4$ und ebenso $(-2)^2 = 4$

Also gibt es zwei Zahlen mit dem Quadratergebnis 4:



In 1.1 hatten wir festgelegt: Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens. Wer sich streng daran hält, hat also nun Auswahl:

Soll $\sqrt{4} = 2$ sein, denn es gilt ja $2^2 = 4$

Oder soll $\sqrt{4} = -2$ sein, denn es gilt auch $(-2)^2 = 4$?

In der Mathematik gilt der Grundsatz:

Rechenergebnisse müssen eindeutig sein.

Man darf also nicht die Auswahl zwischen zwei verschiedenen Ergebnissen haben. Daher darf man nicht sagen: $\sqrt{4} = 2$ oder – 2.

Man hat daher festgelegt:

Das Ergebnis einer Quadratwurzel muss stets eine nicht negative Zahl sein: $\sqrt{a} \geq 0$

Also ist klar: $\sqrt{4} = 2$ <u>und nicht</u> $\sqrt{4} = -2$

1.4 Berechnung von nicht aufgehenden Wurzeln

Welche Zahl ist denn $\sqrt{2}$, oder $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$ usw.?

Ganz offenbar gibt es dazu kein ganzzahliges Ergebnis.

a) $\sqrt{2}$ ist eine Zahl zwischen 1 und 2, denn $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$.
Also ist $\sqrt{2} = 1{,}xxx$

Wir schauen im Taschenrechner nach. Entweder hat dieser direkt eine Wurzeltaste, oder er hat die Wurzel als Umkehroperation zum Quadrieren und man muss SHIFT x^2 eintippen.

Das Ergebnis jedenfalls ist 1,41421356237309….

Nun werdet ihr sagen, mein Rechner zeigt nicht so viele Stellen.
Meiner auch nicht ! Und trotzdem kennt er mehr als er anzeigt.

Mein Ergebnis stammt aus dem Rechner CASIO -9850GB PLUS

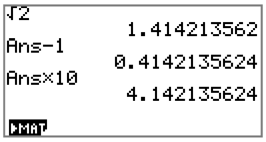
Und das zeigt er an:

Er verbirgt also noch 6 Stellen.

Mit diesem Trick kann man sie hervorholen:

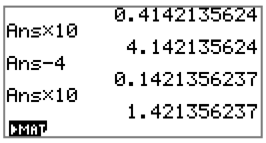
1. Schritt: Subtrahiere die Ganzen (also – 1)
2. Schritt: Multipliziere mit 10.

Das sieht dann so aus:



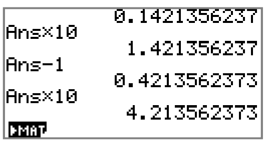
(„Ans“ heißt answer = letztes Ergebnis) ! Nun kam also die letzte 4 hervor.

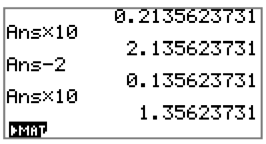
Diese beiden Schritte wiederhole ich:

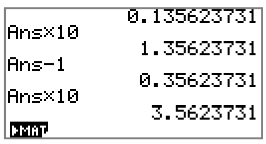


(- 4 und dann x 10 ergibt die Tatsache, dass die 4 aufgerundet war und nun zu 37 wird.)

Als nächstes folgt:







Man erkennt, dass nun nichts Neues mehr hervorkommt, der Speicher ist also ausgereizt.

DEMO

b) $\sqrt{3} = ?$ Taschenrechner-Display:

Hervorholen weiterer Stellen aus dem Speicher:

```
√3
              1.732050808
```

```
√3
              1.732050808
Ans-1
             0.7320508076
Ans×10
              7.320508076
```

```
             0.7320508076
Ans×10
              7.320508076
Ans-7
             0.3205080757
Ans×10
              3.205080757
```

```
             0.3205080757
Ans×10
              3.205080757
Ans-3
             0.2050807569
Ans×10
              2.050807569
```

```
             0.2050807569
Ans×10
              2.050807569
Ans-2
            0.05080756888
Ans×10
             0.5080756888
```

```
              2.050807569
Ans-2
            0.05080756888
Ans×10
             0.5080756888
Ans×10
              5.080756888
```

Man erkennt, ab wann diese beiden Schritte keine neuen Dezimalen mehr hervorzaubern können.

Der Rechner CASIO fx-9860 G liefert also

$\sqrt{3} = 1{,}732.060.808.756.888$

Uns nützen so viele Stellen gar nichts. Wichtig ist, dass wir diese Näherungszahlen kennen:

$$\boxed{\sqrt{2} \approx 1{,}414 \quad \text{und} \quad \sqrt{3} \approx 1{,}732}$$

DEMO

Information:

Wir werden später erfahren, warum die Ziffernfolge nicht periodisch weitergeht, sondern völlig unregelmäßig bleibt.

Und wir werden auch lernen, wie man „von Hand“ einige Dezimalstellen berechnen kann, wenn der Taschenrechner nicht in der Tasche ist …

Und man sollte wissen: $\sqrt{2}^2 = 2$ $\sqrt{3}^2 = 3$, $\sqrt{5}^2 = 5$ usw.

Denn dies war ja genau die Definition dieser Wurzelzahlen.

§ 2 Multiplikation von Wurzeln

2.1 Die Grundlagen

a) Um es gleich zu sagen: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

Das kann man **beweisen:**

Dazu berechnen wir $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2$ so:

$$\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{2}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}_{=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}$$ (Vertauschung zweier Faktoren:)

$$\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2=\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3}$$

$$\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2=6$$

Wir ziehen daraus die Wurzel:
Diese macht das Quadrieren rückgängig:

$$\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)=\sqrt{6}$$

Damit sehen wir, dass $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ ist.

b) Behauptung: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$$

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)^2=\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3}\cdot\underbrace{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}_{5}$$

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)^2=15$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$$

c) Diese Rechnung kann man allgemein machen:

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\underbrace{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}_{a}\cdot\underbrace{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}_{b}$$

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b$$

Wurzelziehen macht das Quadrieren rückgängig, also folgt

$$\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}}$$

In Worten: Soll man 2 Wurzeln multiplizieren, multipliziert man ihre Radikanden und zieht dann aus dem Ergebnis die Wurzel.

Die Operationen Wurzelziehen und Multiplizieren darf man also vertauschen.

2.2 Anwendungen der Produktformel

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Produktformel anzuwenden.

1. Anwendung: Produkte aus Wurzeln direkt berechnen

Wir können oft aus zwei Wurzeln, die sich <u>nicht</u> ganzzahlig berechnen lassen, ein Produkt berechnen, aus dem sich die Wurzel ziehen lässt!

(a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = ?$ laut Produktformel darf man die Radikanden multiplizieren: $=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

(b) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{2{,}5}=\sqrt{10\cdot 2{,}5}=\sqrt{25}=5$

(c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$

(d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}=\sqrt{2\cdot 72}=\sqrt{144}=12$

(e) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}=15$

(f) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{81}=9$

(g) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{100}=10$

Siehe Aufgabe 2 auf Seite 16.

2. Anwendung: Zerlegung von Wurzeln

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

In den oben gezeigten Berechnungen wurde diese Formel <u>von links nach rechts</u> angewandt, d. h. aus 2 Wurzeln wird eine gemacht.

Nun wenden wir die Formel in umgekehrter Richtung an, also <u>von rechts nach links</u>. Wir zerlegen also eine Wurzel mit einem großen Radikanden zuerst in ein Produkt und machen daraus das Produkt zweier Wurzeln:

a) $\sqrt{360.000}=\sqrt{36\cdot 10000}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{10000}=6\cdot 100=600$

b) $\sqrt{9000000}=\sqrt{9\cdot 100\cdot 100\cdot 100}=3\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot=3000$

c) $\sqrt{12.1\underbrace{00}.\underbrace{00}\underbrace{0.0}\underbrace{00}}=\sqrt{121\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 100}=11\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=110.000$

Für diese Rechnungen gibt es noch einen kleinen Trick, der die Berechnung etwas einfacher erscheinen lässt. Zunächst erkennt man, dass man am besten so zerlegt, dass möglichst oft der Faktor 100 auftritt, denn die Wurzel daraus ist 10.

DEMO

Also gruppiert man (vom gedachten Komma am rechten Rand aus beginnend) den Radikanden in Zweiergruppen:

Zu a) $\sqrt{\underbrace{36}_{6}\,|\,\underbrace{00\,|\,00}_{100}} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{100}\cdot\sqrt{100} = 6\cdot 100 = 600$

Man sieht also gleich, dass das Ergebnis eine 6 mit zwei Nullen wird.

Doch Vorsicht: Die folgende Wurzel täuscht die $\sqrt{36}$ vor, es klappt aber nicht, denn wenn man zerlegt, muss man so vorgehen:

$$\sqrt{3.600.000} = \sqrt{360\cdot 100\cdot 100} = \underbrace{\sqrt{360}}_{???}\cdot\underbrace{\sqrt{100}}_{10}\cdot\underbrace{\sqrt{100}}_{10} = \underbrace{\sqrt{360}}_{?}\cdot 100 = ???$$

Oder mit der Zweiergruppierung:

$$\sqrt{3.60\,|\,00\,|\,00} = \underbrace{\sqrt{360}}_{???}\cdot\underbrace{\sqrt{100}}_{10}\cdot\underbrace{\sqrt{100}}_{10} = \sqrt{360}\cdot 100 = ???$$

Analysiert man beide Aufgaben, dann erkennt man, dass es eine einfache Regel gibt, an Hand der man sehen kann, ob die Wurzel zu einer ganzen Zahl gezogen werden kann:

Man sollte von der Kommastelle aus <u>Zweiergruppen von Nullen zusammenfassen</u>, das ergibt die Anzahl der Stellen für das Ergebnis. Bleibt dann die Zahl übrig, aus der man noch die Wurzel ziehen kann, dann geht sie auf!

Zu b) $\sqrt{9000000} = ?$

Gruppierung: $\sqrt{9|00|00|00} = 3\cdot 1000 = 3000$

Aber bei $\sqrt{90|00|00|00} = \sqrt{90}\cdot 1000 = ?$ geht dies nicht.

Zu c) $\sqrt{12.100.000.000} = ?$

Gruppierung: $\sqrt{121|00|00|00|00} = 11\cdot 10000 = 110.000$

Noch ein Beispiel:

d) $\sqrt{640.000.000} = ?$

Gruppierung: $\sqrt{640|00|00|00} = \sqrt{640}\cdot 1000 = ?$

Dagegen: $\sqrt{64.000.000} = \sqrt{64\,|\,00\,|\,00\,|\,00} = \sqrt{64}\cdot 1000 = 8000$!

Siehe Aufgabe 3 auf Seite 16.

DEMO

3. Anwendung: Partielles Wurzelziehen

Manches Mal kann man eine der beiden bei der Zerlegung entstandenen Wurzeln nicht ziehen aber dennoch eine sinnvolle Umformung auf Grund der Produktregel vornehmen:

(a) $\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{99} = \sqrt{9\cdot 11} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

(c) $\sqrt{243} = \sqrt{81\cdot 3} = \sqrt{81}\cdot\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

TRICK:
Suche zuerst immer Quadratzahlen als Teiler des Radikanden - dann zerlege die Wurzel!

Siehe Aufgabe 4 auf Seite 16.

Man sieht, dass immer eine Wurzel stehen bleibt. Dies ist für viele spätere Aufgaben sinnvoll. Etwa in folgenden Berechnungen:

Berechnung von Produkten durch partielles Wurzelziehen:

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{32}\cdot\sqrt{18} &= \sqrt{16\cdot 2}\cdot\sqrt{9\cdot 2}\\ &= \sqrt{16}\cdot\sqrt{2}\cdot\underbrace{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}_{\text{vertauschen!}}\\ &= \sqrt{16}\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{9}\\ &= 4\cdot 2\cdot 3 = 24\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{28}\cdot\sqrt{175} &= \sqrt{4\cdot 7}\cdot\sqrt{7\cdot 25}\\ &= \sqrt{4}\cdot\underbrace{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}\cdot\sqrt{25}\\ &= 2\cdot 7\cdot 5 = 70\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt{147}\cdot\sqrt{27} &= \sqrt{49\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 9}\\ &= \sqrt{49}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{9}\\ &= 7\cdot 3\cdot 3 = 63\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\sqrt{50}\cdot\sqrt{98} &= \sqrt{25\cdot 2}\cdot\sqrt{49\cdot 2}\\ &= \sqrt{25}\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{49}\\ &= 5\cdot 2\cdot 7 = 70\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\sqrt{722}\cdot\sqrt{288} &= \sqrt{2\cdot 361}\cdot\sqrt{2\cdot 144}\\ &= \sqrt{361}\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{144}\\ &= 19\cdot 2\cdot 12 = 456\end{aligned}$$

Auch hier immer zuerst den Radikanden in Quadratzahlen zerlegen !!!!

Siehe Aufgabe 5 auf Seite 16.

DEMO

Mehrfaches partielles Wurzelziehen !!!

Manche Radikanden sind so groß, dass es nicht in einem Schritt gelingt, die Wurzel partiell zu ziehen. Wie man dann vorgeht, zeigen diese Beispiele:

f) $\sqrt{3380}$ Man erkennt, dass die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl 80 heißt. Weil diese durch 4 teilbar ist, ist auch 3380 durch 4 teilbar:

$$\sqrt{3380} = \sqrt{4 \cdot 845} = 2\sqrt{845}$$

Die Zerlegung von 845 ist schwieriger. 4 ist kein Teiler und 9 auch nicht (denn die Quersumme 8+4+5=17 ist nicht durch 9 teilbar). Aber man erkennt (an der 5), dass 5 ein Teiler von 845 ist: $845 : 5 = 169$ bzw. $845 = 5 \cdot 169$.

$$\sqrt{3380} = \sqrt{4 \cdot 845} = 2\sqrt{5 \cdot 169} = 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{5} = 26\sqrt{5}\,,$$

denn wegen $13^2 = 169$ ist $\sqrt{169} = 13$.

g) $\sqrt{4320}$ Wir erkennen wieder an den Endziffern 20, dass 4 ein Teiler ist: $4320 = 4 \cdot 1080$

$$\sqrt{4320} = 2\sqrt{1080}$$

Wir ziehen noch einmal die 4 heraus: $1080 = 4 \cdot 270$

$$\sqrt{4320} = 2\sqrt{1080} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{270} = 4 \cdot \sqrt{270}$$

Die Quersumme von 270 ist 9, also ist 9 ein Teiler: $270 = 9 \cdot 30$. Daher beenden wir die Lösung so:

$$\sqrt{4320} = 2\sqrt{1080} = 4 \cdot \sqrt{270} = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{30} = 12\sqrt{30}$$

h) $\sqrt{3388}$ 88 ist durch 4 teilbar, also folgt $3388 = 4 \cdot 847$

$$\sqrt{3388} = 2 \cdot \sqrt{847}$$

Jetzt erkennt man weder Teilbarkeit durch 4 noch durch 9. Man kann nun einmal durch 7 zu teilen versuchen: $847 : 7 = 121$ also ist $847 = 7 \cdot 121$.

$$\sqrt{3388} = 2 \cdot \sqrt{847} = 2 \cdot \sqrt{7 \cdot 121} = 2 \cdot 11 \cdot \sqrt{7} = 22\sqrt{7}$$

Übe diese Rechnungen mehrfach!

Übungsblatt

Ziehe die folgenden Wurzeln partiell im Kopf – möglichst rasch.

a)	$\sqrt{24}$	b)	$\sqrt{32}$
c)	$\sqrt{98}$	d)	$\sqrt{1250}$
e)	$\sqrt{700}$	f)	$\sqrt{72}$
g)	$\sqrt{48}$	h)	$\sqrt{45}$
i)	$\sqrt{117}$	j)	$\sqrt{68}$
k)	$\sqrt{80}$	l)	$\sqrt{60}$
m)	$\sqrt{75}$	n)	$\sqrt{180}$
o)	$\sqrt{375}$	p)	$\sqrt{242}$
q)	$\sqrt{288}$	r)	$\sqrt{135}$
s)	$\sqrt{28}$	t)	$\sqrt{96}$
u)	$\sqrt{243}$	v)	$\sqrt{252}$
w)	$\sqrt{76}$	x)	$\sqrt{84}$
y)	$\sqrt{92}$	z)	$\sqrt{150}$
aa)	$\sqrt{1568}$	bb)	$\sqrt{2025}$
cc)	$\sqrt{648}$	dd)	$\sqrt{2028}$
ee)	$\sqrt{1575}$	ff)	$\sqrt{2888}$

DEMO

Lösungen zum Übungsblatt

Ich schreibe die Lösungen anfangs ganz ausführlich auf, später teils nur kurz.

a)	$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$	b)	$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
c)	$\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$	d)	$\sqrt{1250} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{2} = 25\sqrt{2}$
e)	$\sqrt{700} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{7} = 10\sqrt{7}$	f)	$\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
g)	$\sqrt{48} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$	h)	$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
i)	$\sqrt{117} = \sqrt{9}\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$	j)	$\sqrt{68} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$
k)	$\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$	l)	$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$
m)	$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$	n)	$\sqrt{180} = \sqrt{36}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
o)	$\sqrt{375} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{15} = 5\sqrt{15}$	p)	$\sqrt{242} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$
q)	$\sqrt{288} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$	r)	$\sqrt{135} = \sqrt{9}\sqrt{15} = 3\sqrt{15}$
s)	$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$	t)	$\sqrt{96} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$
u)	$\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$	oder	$\sqrt{243} = \sqrt{3 \cdot 81} = 9\sqrt{3}$
v)	$\sqrt{252} = \sqrt{4 \cdot 63} = 2 \cdot 3\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$		
w)	$\sqrt{76} = \sqrt{4 \cdot 19} = 2\sqrt{19}$	x)	$\sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}$
y)	$\sqrt{92} = \sqrt{4 \cdot 23} = 2\sqrt{23}$	z)	$\sqrt{150} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

Mehrfaches partielles Wurzelziehen:

aa) $\sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 392} = 2\sqrt{392} = 2 \cdot 2\sqrt{98} = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} = 28\sqrt{2}$

bb) $\sqrt{2025} = \sqrt{25 \cdot 81} = 5 \cdot 9 = 45$

cc) $\sqrt{648} = \sqrt{4 \cdot 162} = 2 \cdot \sqrt{81 \cdot 2} = 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

dd) $\sqrt{2028} = \sqrt{4 \cdot 507} = 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 169} = 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{3}$

507 hat die Quersumme 12 und ist somit durch 3 teilbar.

ee) $\sqrt{1575} = \sqrt{25 \cdot 63} = 5\sqrt{9 \cdot 7} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = 15\sqrt{7}$

ff) $\sqrt{2888} = \sqrt{4 \cdot 722} = 2\sqrt{2 \cdot 361} = 2 \cdot 19 \cdot \sqrt{2}$ denn $19^2 = 361$ (LERNEN!)

DEMO

Aufgabenblatt:

Aufgabe 2

a) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$ c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

d) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$ e) $\sqrt{1210}\cdot\sqrt{0{,}1}$ f) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$

g) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}$ h) $\sqrt{0{,}2}\cdot\sqrt{20}$ i) $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{27}$

j) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$ k) $\sqrt{120}\cdot\sqrt{0{,}3}$ l) $\sqrt{48}\cdot\sqrt{12}$

Aufgabe 3

Bestimme ganzzahlige Lösungen, wenn möglich

a) $\sqrt{144000000}$ b) $\sqrt{144000}$ c) $\sqrt{8100000000}$

d) $\sqrt{810000000}$ e) $\sqrt{1960000}$ f) $\sqrt{169000000000}$

g) $\sqrt{28900}$ h) $\sqrt{3610000000000}$ i) $\sqrt{22500000}$

Aufgabe 4

Ziehe teilweise die Wurzeln

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{162}$ d) $\sqrt{288}$

e) $\sqrt{45}$ f) $\sqrt{72}$ g) $\sqrt{32}$ h) $\sqrt{200}$

i) $\sqrt{125}$ j) $\sqrt{98}$ k) $\sqrt{128}$ l) $\sqrt{4000}$

Aufgabe 5

Berechne über partielles Wurzelziehen

a) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{48}$ b) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{72}$ c) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$

d) $\sqrt{112}\cdot\sqrt{7}$ e) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{50}$ f) $\sqrt{2{,}1}\cdot\sqrt{8{,}4}$

§ 3 Wurzeln aus Potenzen ziehen

Beispiele:

Potenz quadrieren		Umkehrung
$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2) = 2^6$	also	$\sqrt{2^6} = 2^3$
$(2^5)^2 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$		$\sqrt{2^{10}} = 2^5$
$(3^2)^2 = 3^2 \cdot 3^2 = 3^4$		$\sqrt{3^4} = 3^2$
$(3^7)^2 = 3^7 \cdot 3^7 = 3^{14}$		$\sqrt{3^{14}} = 3^7$

Wir beobachten folgende Regel:

REGEL: **Quadriert** man eine Potenz, dann wird der Exponent **verdoppelt.**
Zieht man aus einer Potenz mit geradem Exponenten die **Wurzel**, dann wird der Exponent **halbiert.**

d. h. $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3$ $\quad \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5$

$\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2$ $\quad \sqrt{3^{14}} = 3^{\frac{14}{2}} = 3^7$

kürzer: $\sqrt{2^8} = 2^4 = 16$ $\quad \sqrt{3^6} = 3^3 = 27$

$\sqrt{5^4} = 5^2 = 25$ $\quad \sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$

Wenn der Exponent ungerade ist, dann kann man wenigstens teilweise die Wurzel ziehen:

$$\sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = 2^3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3125} = \sqrt{5^5} = \sqrt{5^4 \cdot 5} = 5^2\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$$

DEMO

§ 4 Division von Wurzeln

4.1 Die Regel

Für die Division von Wurzeln gilt diese Regel:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (2)$$

Man darf also die Radikanden direkt dividieren.

1. Anwendung: Quotienten aus Wurzeln direkt berechnen

(a) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$

Durch das Schreiben unter eine gemeinsame Wurzel kann man den Bruch kürzen, so dass anschließend die Wurzel gezogen werden kann.

(b) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{1000}{40}} = \sqrt{25} = 5$

(c) $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{245}{5}} = \sqrt{49} = 7$

(d) $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$

Siehe Aufgabe 6 auf Seite 20.

2. Anwendung: Zerlegung von Wurzeln

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

In den oben gezeigten Berechnungen wurde die Formel von links nach rechts angewandt, d. h. aus 2 Wurzeln wird eine gemacht.

Nun wenden wir die Formel in umgekehrter Richtung an, also von rechts nach links. Wir zerlegen also eine Wurzel mit einem großen Radikanden in einen Bruch aus zweier Wurzeln:

(a) $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$ (b) $\sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{144}} = \frac{13}{12}$

Bemerkung: Es gibt Schüler, welche diese Sachlage völlig verkennen. Sie meinen, dass diese Formel unnötig ist, weil sie sofort das Ergebnis erkennen. Das ist jedoch ein Trugschluss: Wenn jemand sagt, er sieht sofort, dass $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$ gilt, dann beachtet er nicht, dass niemand zwei Berechnungen zugleich durchführen kann. Jeder rechnet hier zuerst $\sqrt{64} = 8$ und dann $\sqrt{9} = 3$ aus und setzt dann diese Teilergebnisse zum Gesamtergebnis $\frac{8}{3}$ zusammen.

DEMO

(c) $\sqrt{\frac{288}{50}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}\cdot 144}{\cancel{2}\cdot 25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$ Zuerst musste man kürzen.

(d) $\sqrt{\frac{343}{252}} = \sqrt{\frac{7\cdot 49}{7\cdot 36}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \frac{7}{6}$

Man kann beide Anwendungsrichtungen kombinieren:

(e) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{63}{28}} = \sqrt{\frac{9\cdot \cancel{7}}{4\cdot \cancel{7}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

Um kürzen zu können, macht man aus dem Bruch zuerst eine Wurzel, dann kürzt man, zerlegt die Wurzel wieder in einen Bruch aus zwei Wurzeln und zieht diese beiden dann.

So rechnet man im Grunde immer, auch wenn wir dies in der Regel nicht so ausführlich aufschreiben, sondern nur kurz.

(f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{48}{75}} = \sqrt{\frac{\cancel{3}\cdot 16}{\cancel{3}\cdot 25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

Immer derselbe TRICK: Suche zuerst immer Quadratzahlen als Teiler des Radikanden - dann zerlege die Wurzel!

Siehe Aufgabe 7 auf Seite 20.

3. Anwendung: Berechnung von Wurzeln aus kleinen Zahlen

(a) $\sqrt{0{,}000009}$

Wir verwandeln diese Zahl in einen **Bruch**. Dabei sollte im Nenner eine Quadratzahl stehen, also 100 oder 10,000 oder 1.000.000. Dann zerlegen wir die Wurzel in zwei:

$$\sqrt{0{,}000009} = \sqrt{\frac{9}{1.000.000}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1|00|00|00}} = \frac{3}{1000} = 0{,}003$$

Dieses Verfahren lässt sich durch Abzählen der Nullen und Setzen von Trennungsstrichen für Zweierpakete abkürzen. Jedes Zweierpaket (Nullgruppe) ergibt eine Dezimalstelle:

$$\sqrt{0{,}\underbrace{00}_{0}|\underbrace{00}_{0}|\underbrace{09}_{3}} = 0{,}003$$

(b) $\sqrt{0{,}00004}$

Hier vermutet man beim schnellen hinsehen ein Ergebnis der Form 0,…2. Es gibt jedoch gleich eine herbe Enttäuschung:

$$\sqrt{0{,}00|00|40} = \sqrt{\frac{40}{1|00|00|00}} = \frac{\sqrt{40}}{1000} = \frac{?}{1000}$$

Das Einteilen in Zweierpakete vom Komma aus führt nicht zur Quadratzahl 4 sondern zu 40. **Die Null hinter der 4 muss man setzen**, **damit drei Zweierpakete entstehen**. Nur dann kommt man zum Nenner 1.000.000, also zu Tausendstel nach dem Wurzelziehen.

DEMO

(c) $\sqrt{\underbrace{0{,}00|00|01|96}_{4\text{ Dezimalstellen}}} = \sqrt{\dfrac{196}{100|00|00|00}} = \dfrac{14}{10000} = 0{,}0014$

(d) $\sqrt{0{,}00|00|00|19|6} = \sqrt{0{,}00|00|00|19|60}$

Hier muss man eine Null anhängen, damit man im Nenner ein Quadratzahl bekommt.
Dann jedoch bekommt man ein Problem im Zähler:

$$\sqrt{\underbrace{0{,}00|00|00|19|60}_{5\text{ Null-Gruppen}}} = \frac{\sqrt{1960}}{\underbrace{100000}_{5\text{ Nullen}}} = ?$$

Wichtig ist der Vergleich zwischen (c) und (d).

(e) $\sqrt{\underbrace{0{,}00|00|00|00|00|49}_{6\text{ Nullgruppen ergeben ...}}} = 0{,}\underbrace{000.007}_{6\text{ Dezimalstellen}}$

(f) $\sqrt{\underbrace{0{,}00|00|00|00|04|9}_{\substack{6\text{ Nullgruppen ergeben}\\6\text{ Dezimalstellen}}}} = \sqrt{\underbrace{0{,}00|00|00|00|04|90}_{\substack{6\text{ Nullgruppen =}\\6\text{ Dezimalstellen}}}} = 0{,}\underbrace{000.0??}\notin \mathbb{Q}$

Siehe Aufgabe 8.

Aufgabenblatt

Aufgabe 6

a) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{432}}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{1960}}{\sqrt{10}}$ g) $\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 7

a) $\sqrt{\dfrac{36}{121}}$ b) $\sqrt{\dfrac{6250}{810}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1{,}21}{0{,}49}}$ d) $\sqrt{\dfrac{289}{361}}$

e) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$ f) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$ g) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{98}}$ h) $\dfrac{\sqrt{1250}}{\sqrt{162}}$

i) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{150}}$ j) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}$

Aufgabe 8

a) $\sqrt{0{,}0004}$ b) $\sqrt{0{,}000049}$ c) $\sqrt{0{,}000144}$

d) $\sqrt{0{,}0000025}$ e) $\sqrt{0{,}000000000025}$ f) $\sqrt{0{,}00000256}$

g) $\sqrt{0{,}00001}$ h) $\sqrt{0{,}00000001}$ i) $\sqrt{0{,}00001024}$

DEMO

4.2 Den Nenner rational machen

Es gibt eine **Vereinbarung** in der Mathematik, die lautet:

Wenn man aus einem Bruch die Wurzel nicht ziehen kann, dann erweitere oder kürze man den Bruch so, dass man wenigstens aus dem Nenner die Wurzel ziehen kann.

Der Vorteil liegt darin, dass man so das Ergebnis besser abschätzen kann.

Beispiele

(a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \quad \Big| \approx \frac{1}{3}\cdot 2{,}4 = 0{,}8$

Unter der Wurzel wird mit 3 erweitert, damit im Nenner eine Quadratzahl entsteht !

Schätzt man $\sqrt{6}$ als Zahl zwischen $\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{9} = 3$ zu etwa 2,4, dann ist ein Drittel davon etwa 0,8.

(b) $\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5\cdot 12}{12\cdot 12}} = \frac{\sqrt{60}}{12} = \frac{1}{12}\sqrt{60}$

So nicht rechnen !

Diese Aufgabe ist besonders wichtig, weil Anfänger hier schnell zu großzügig erweitern. <u>So sollte man jedoch nicht rechnen.</u> Das Ergebnis ist nicht falsch, aber <u>nicht fertig</u>, denn $\sqrt{60} = \sqrt{4\cdot 15} = 2\cdot\sqrt{15}$ vereinfacht das Ergebnis so:

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5\cdot 12}{12\cdot 12}} = \frac{\sqrt{60}}{12} = \frac{\sqrt{4\cdot 15}}{12} = \frac{2\cdot\sqrt{15}}{12} = \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$$

Die bessere Methode geht anders: Man muss erkennen, dass der Nenner die Quadratzahl 4 als Faktor enthält, also wird der Nenner vor dem Erweitern zerlegt:

$$\boxed{\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{15}}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}\sqrt{15}} \approx \frac{1}{6}\cdot 3{,}87 \approx 0{,}65$$

MERKE: Um einen Nenner rational zu machen, geht man so vor:

1. Man zerlegt den Nenner so, dass man die in ihm steckenden Quadrat-Faktoren herauszieht, oder man zerlegt ihn gleich in Primfaktoren.
2. Man erweitert dann mit den Faktoren, die keine Quadratzahlen bilden.
3. Dann kann man die Wurzel hinter den Bruch schreiben.

(c) $\sqrt{\frac{10}{63}} = \sqrt{\frac{10\cdot 7}{9\cdot 7\cdot 7}} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{70}}{3\cdot 7} = \frac{1}{21}\sqrt{70}$

Wichtig !!!

DEMO

Beispiele: (Keine Wurzel im Zähler)

(d) $\frac{12}{\sqrt{7}} = \frac{12\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{12}{7}\cdot\sqrt{7}$

(e) $\frac{32}{\sqrt{27}} = \frac{32\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{9}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3}} = \frac{32\cdot\sqrt{3}}{3\cdot3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$

(f) $\frac{16}{\sqrt{48}} = \frac{16\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3}} = \frac{16\cdot\sqrt{3}}{4\cdot3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Damit der Nenner rational wird, muss man in d) mit $\sqrt{7}$ erweitern!

Bei e) sollte man jedoch zuerst die Quadratzahl 9 herausziehen!

Dann genügt das Erweitern mit $\sqrt{3}$!

Diese spezielle Methode muss man sich merken!

Ganz interessant sind auch folgende Beispiele, deren Ergebnis man sich unbedingt merken sollte:

(g) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$ oder so: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

(h) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\cancel{5}\cdot\sqrt{5}}{\cancel{5}} = \sqrt{5}$ oder so: $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

usw.

Die bisherigen Aufgaben liefen so, dass man durch Erweitern den Nenner rational gemacht hat. Eine andere Möglichkeit, Brüche umzuformen ist das Kürzen. Es gibt Aufgaben, in denen das **Kürzen** deutlich schneller zum Ziel führt als das vorschnelle Erweitern.

(a) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{24}{12}} = \sqrt{2}$

(b) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{12}{48}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{10}{30}} = \sqrt{\frac{1\cdot3}{3\cdot3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

(d) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{27}{45}} = \sqrt{\frac{9\cdot3}{9\cdot5}} = \sqrt{\frac{3\cdot5}{5\cdot5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

Man sieht hier, wie wichtig es ist, größere Zahlen erst zu zerlegen.

Nenner mit Summen werden später behandelt.

DEMO

Aufgabenblatt

Aufgabe 9

a) $\sqrt{\frac{13}{8}}$ b) $\sqrt{\frac{44}{32}}$ c) $\sqrt{\frac{5}{24}}$ d) $\sqrt{\frac{7}{30}}$

e) $\sqrt{\frac{43}{18}}$ f) $\sqrt{\frac{39}{72}}$ g) $\sqrt{\frac{1}{120}}$ h) $\sqrt{\frac{16}{147}}$

i) $\sqrt{\frac{33}{50}}$ j) $\sqrt{\frac{50}{33}}$ k) $\sqrt{\frac{19}{20}}$ l) $\sqrt{\frac{17}{54}}$

Aufgabe 10

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{14}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{18}{\sqrt{6}}$ d) $\frac{75}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{12}{\sqrt{24}}$ f) $\frac{12}{\sqrt{75}}$ g) $\frac{144}{\sqrt{45}}$ h) $\frac{80}{\sqrt{96}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{720}}$ j) $\frac{25}{\sqrt{500}}$ k) $\frac{5}{\sqrt{0,4}}$ l) $\frac{200}{\sqrt{400000}}$

Aufgabe 11

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}}$ b) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{35}}$ c) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{55}}$

d) $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{108}}$ e) $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{27}}$ f) $\frac{5\sqrt{75}}{\sqrt{30}}$

g) $\frac{16\sqrt{80}}{24\sqrt{60}}$ h) $\frac{4\sqrt{275}}{5\sqrt{242}}$ i) $\frac{13\sqrt{6}}{4\sqrt{78}}$

(j) $\frac{\sqrt{204}}{\sqrt{255}}$ (k) $\frac{\sqrt{279}}{\sqrt{155}}$ (l) $\frac{25\sqrt{21}}{\sqrt{35}}$

(m) $\frac{12\sqrt{38}}{\sqrt{114}}$ (n) $\frac{7\sqrt{300}}{2\sqrt{175}}$

DEMO

§ 5 Addition und Subtraktion von Quadratwurzeln

Wurzeln kann man nicht so addieren und subtrahieren, wie man sie multiplizieren und dividieren darf!

Schauen wir uns Beispiele an:

Multiplikation: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{3\cdot 7}=\sqrt{21}$ Regel: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

Division: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ Regel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Addition: $\sqrt{5}+\sqrt{11}=\sqrt{5+11}=\sqrt{16}=4$ ***ist aber falsch!***

denn $\sqrt{5}+\sqrt{15}\approx 2{,}236+3{,}316\approx 5{,}55$ *aber nicht 4!*

Subtraktion: $\sqrt{31}-\sqrt{6}=\sqrt{31-6}=\sqrt{25}=5$ ***ist auch falsch!***

denn $\sqrt{31}-\sqrt{6}\approx 5{,}568-2{,}245\approx 3{,}1$ *aber nicht 5!*

Die Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ ist also **keine Regel**, weil sie **meistens** falsche Ergebnisse liefert.

Die Gleichung $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$ ist auch **keine Regel**, weil sie **meistens** falsche Ergebnisse liefert.

Fällt dir auf, dass hier „meistens" steht? Das bedeutet, dass diese Gleichung in Ausnahmefällen richtige Werte liefern kann, etwa in dieser Rechnung:

$$\sqrt{3}\pm\sqrt{0}=\sqrt{3\pm 0}=\sqrt{3}$$

Aber **eine Regel muss ohne Ausnahmen gelten,** oder man muss zur Regel angeben, für welche Zahlen sie gilt.

MERKE:
Wer die Radikanden zweier Wurzeln addiert oder subtrahiert, um daraus eine Wurzel zu bilden, der macht fast immer Fehler.

Was kann man also mit solchen Ausdrücken wie $\sqrt{5}+\sqrt{11}$ oder $\sqrt{31}-\sqrt{6}$ tun? Die einfache Antwort lautet:

Man kann nur die Näherungswerte der einzelnen Wurzeln addieren. Einen neuen Wurzelterm kann man jedoch nicht erzeugen!

DEMO

5.2 Zusammenfassen bestimmter Wurzeln

Nach der Enttäuschung der letzten Seite gibt es dennoch einen Hoffnungsschimmer:

Wenn gleiche Wurzeln im Spiel sind, kann man zusammenfassen!

Beispiele

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(b) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(5+2)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

(c) $12\sqrt{7}-5\sqrt{7}=(12-5)\sqrt{7}=7\sqrt{7}$

(d) $13\sqrt{5}+2\sqrt{5}-9\sqrt{5}=(13+2-9)\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

Zusammenfassen heißt hier „ausklammern".

Das tun wir doch ständig im Alltag. Selbst wenn wir Geld addieren, rechnen wir im Grunde so: $5\,€+2\,€=(5+2)\,€=7\,€$.

Wir klammern immer aus, weil wir nämlich nur die Koeffizienten (das sind die Zahlen „davor") addieren bzw. subtrahieren.

Wir haben also gesehen, dass wir durch Ausklammern zusammenfassen können, **wenn Vielfache derselben Wurzel addiert bzw. subtrahiert werden sollen!**

Es geht aber auch in diesen Fällen:

(e) $\sqrt{12}+\sqrt{27}=\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(f) $\sqrt{45}+\sqrt{80}=\sqrt{9\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}=3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

(g) $\sqrt{99}-\sqrt{44}=\sqrt{9\cdot 11}-\sqrt{4\cdot 11}=3\sqrt{11}-2\sqrt{11}=(3-2)\sqrt{11}=1\cdot\sqrt{11}=\sqrt{11}$

(h) $5\sqrt{63}+\sqrt{175}-5\sqrt{112}=5\sqrt{9\cdot 7}+\sqrt{25\cdot 7}-5\sqrt{16\cdot 7}=15\sqrt{7}+5\sqrt{7}-20\sqrt{7}$

$=(15+5-20)\sqrt{7}=0\cdot\sqrt{7}=0$

MERKE:
Vielfache von Wurzeln lassen sich addieren bzw. subtrahieren, wenn diese **Wurzeln gleich** sind oder sich durch teilweises Ziehen von Wurzeln in gleichen Wurzeln umformen lassen.
Das Zusammenfassen geschieht dann durch **Ausklammern** der Wurzel.

DEMO

Noch einmal zwei Beispiele, die nicht zusammengefasst werden können:

(i) $\sqrt{28}+\sqrt{52}=\sqrt{4\cdot 7}+\sqrt{4\cdot 13}=2\sqrt{7}+2\sqrt{13}$

Man könnte noch die 2 ausklammern zu $=2\left(\sqrt{7}+\sqrt{13}\right)$, aber auch dann kann man nur noch mit den Näherungszahlen weiterrechnen:
$\approx 2\cdot(2{,}646+3{,}606)\approx 12{,}503$

Oder:

(j) $5\sqrt{12}-3\sqrt{98}=5\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{49\cdot 2}=5\cdot 2\sqrt{3}-3\cdot 7\sqrt{2}=10\sqrt{3}-21\sqrt{2}$

Auch hier kann man nur noch mir den Näherungszahlen zu Ende rechnen:
$\approx -3{,}718$ (laut Taschenrechner).

Hier noch einige komplexere Beispiele zum üben:

(k) $13\sqrt{50}+12\sqrt{8}-24\sqrt{18}=13\cdot\sqrt{25\cdot 2}+12\sqrt{4\cdot 2}-24\sqrt{9\cdot 2}$

$=\left(13\cdot 5\sqrt{2}+12\cdot 2\sqrt{2}-24\cdot 3\sqrt{2}\right)=(65+24-72)\sqrt{2}=17\sqrt{2}$

Diese Aufgabe lösen geübte Rechner schneller, denn sie müssen nicht alle Zwischenschritte notieren:

$13\sqrt{50}+12\sqrt{8}-24\sqrt{18}=\left(13\cdot 5\sqrt{2}+12\cdot 2\sqrt{2}-24\cdot 3\sqrt{2}\right)=17\sqrt{2}$

(l) $\frac{1}{3}\sqrt{32}-\frac{1}{4}\sqrt{32}+\frac{5}{6}\sqrt{32}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot\sqrt{16\cdot 2}=\frac{4-3+10}{\underbrace{\cancel{12}}_{3}}\cdot\cancel{4}\sqrt{2}=\frac{11}{3}\sqrt{2}$

Wichtig ist, dass man immer so früh als möglich kürzt, damit die Zahlen nicht zu groß werden.

(m) $\frac{1}{2}\sqrt{27}+\frac{1}{3}\sqrt{75}-\frac{5}{24}\sqrt{48}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 3}+\frac{1}{3}\sqrt{25\cdot 3}-\frac{5}{24}\sqrt{16\cdot 3}=$

$=\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}-\frac{20}{24}\sqrt{3}=\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{6}\right)\sqrt{3}=\frac{9+10-5}{6}\sqrt{3}=\frac{14}{6}\sqrt{3}=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

Siehe dazu Aufgabe 12 auf Seite 31.

DEMO

§ 6 Anwenden der binomischen Formeln auf Wurzelterme

Zur Erinnerung die drei binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

6.1 Beispiele:

(a) $\left(\sqrt{3}+5\right)^2 = \sqrt{3}^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 5 + 5^2 = 3 + 10\sqrt{3} + 25 = 28 + 10\sqrt{3}$

(b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{2}^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

(c) $\left(8-\sqrt{32}\right)^2 = 8^2 - 2\cdot 8\cdot\sqrt{32} + \sqrt{32}^2 = 64 - 16\sqrt{32} + 32 = 96 - 16\sqrt{32}$

Nun kann man jedoch teilweise die Wurzel ziehen: $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$

also folgt: $\left(8-\sqrt{32}\right)^2 = 96 - 16\cdot 4\sqrt{2} = 96 - 64\sqrt{2}$.

Führt man dieses partielle Ziehen der Wurzel gleich durch, verläuft die Rechnung so:

$$\left(8-\sqrt{32}\right)^2 = \left(8-\sqrt{16\cdot 2}\right)^2 = \left(8-4\sqrt{2}\right)^2 = 8^2 - 2\cdot 8\cdot 4\sqrt{2} + \left(4\sqrt{2}\right)^2 =$$
$$= 64 - 64\sqrt{2} + 16\cdot 2 = 96 - 64\sqrt{2}$$

Das Ergebnis ist natürlich dasselbe.

Hier trat diese Zwischenrechnung auf: $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 16\cdot 2 = 32$.

(d) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$ Zunächst die umständliche Lösung eines "Blinden":

$$\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{12}^2 - 2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 12 - 2\sqrt{36} + 3 = 15 - 2\cdot 6 = 3$$

Nun die Lösung eines Experten:

$$\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Hast du an dieser Stelle etwas dazugelernt?

(e) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{80}\right)^2 = \left(\sqrt{5}+\sqrt{16\cdot 5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}+4\sqrt{5}\right)^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 25\cdot 5 = 125$

Das war nochmals eine Lösung mit Pfiff.

DEMO

(f) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2 = 4\cdot 3+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}+9\cdot 2 = 12+12\sqrt{6}+18 = 30+12\sqrt{6}$

Hier habe ich Zwischenschritte weggelassen und gleich a^2 und b^2 berechnet.

$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 4\cdot 3 = 12$ usw.

g) Besonders trickreich geht es hier zu:
$\left(3\sqrt{63}-2\sqrt{28}\right)^2 = \left(3\sqrt{9\cdot 7}-2\sqrt{4\cdot 7}\right)^2 = \left(9\sqrt{7}-4\sqrt{7}\right)^2 = \left(5\sqrt{7}\right)^2 = 25\cdot 7 = 175$

Jetzt Anwendungen der dritten binomischen Formel:

(h) $\left(\sqrt{5}-3\right)\left(\sqrt{5}+3\right) = \sqrt{5}^2-3^2 = 5-9 = -4$

(i) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right) = \sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2 = 7-6 = 1$

(j) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right) = \left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 9\cdot 2-4\cdot 3 = 18-12 = 6$

(k) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{8}\right)\left(3\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right)$

Hier muss man zuerst die Reihenfolge im Summenterm vertauschen:
$= \left(2\sqrt{5}-3\sqrt{8}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{8}\right) = \left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{8}\right)^2 = 20-72 = -52$

Die Erfahrung zeigt, dass hier die großen Probleme der Schüler beginnen, die sich die Regeln nicht merken. Daher sei daran erinnert:

1. Man kann verschiedene Radikanden nicht addieren:

   $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ kann man **nicht** zusammenrechnen (nur die Näherungswerte lassen sich addieren).

2. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ lässt sich jedoch zusammenfassen, weil man $\sqrt{8}$ so umformen kann: $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$:
   $\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{2}+2\sqrt{2} = (1+2)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

3. $\sqrt{17}\cdot\sqrt{17} = 17$, denn so wurde die Quadratwurzel ja definiert: Quadriert man sie, erhält man den Radikanden!

4. $3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}$ wird so berechnet, dass man die Zahlen ohne Wurzeln multipliziert und auch die Radikanden:
   $3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3} = 3\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} = 6\cdot\sqrt{15}$

5. Beim Rechnen mit Wurzeln sollte man stets zuerst versuchen, die Wurzel partiell zu ziehen, d.h. man sucht, ob der Radikand eine Quadratzahl als Teiler enthält: $\sqrt{98} = \sqrt{49\cdot 2} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{2} = 7\cdot\sqrt{2}$

Siehe dazu Aufgabe 13 auf Seite 31.

6.2 Nenner mit Summen rational machen

Beispiele:

a) $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$ Man erweitert den Bruch mit $\left(3-\sqrt{2}\right)$, weil dann im Nenner das Produkt $\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$ entsteht, das mit der 3. binomischen Formel zu $9-2=7$ wird.

Und so sieht die ganze Rechnung aus: $\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{\cancel{7}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{\cancel{9-2}}=3-\sqrt{2}$

b) $$\frac{\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)}{\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)}=\frac{4\sqrt{15}+15}{16-15}=\frac{4\sqrt{15}+15}{1}=4\sqrt{15}+15$$

Hier musste man mit $\left(4+\sqrt{15}\right)$ erweitern um in Nenner mit der 3. binomischen Formel die Wurzeln weg zu bekommen.

c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ Jetzt erweitert man für die 3. binomische Formel mit $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Damit kann man im Nenner mit der 3. binomischen Formel vereinfachen, während man Im Zähler die 1. binomische Formel benötigt.

Dann lautet die Berechnung:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=\frac{8}{2}+\frac{2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$$

d) $$\frac{5\sqrt{6}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{12}}=\frac{5\sqrt{6}\cdot\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{12}\right)}{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{12}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{12}\right)}=\frac{15\cdot 6-10\cdot\sqrt{72}}{9\cdot 6-4\cdot 12}=\frac{90-10\cdot\sqrt{36\cdot 2}}{54-48}=\frac{90-60\sqrt{2}}{6}$$

Nun führen Einzelbrüche zum Ziel: $=\frac{90}{6}-\frac{60}{6}\sqrt{2}=15-10\sqrt{2}$

e) Nun eine Falle: $\frac{7}{\sqrt{98}-\sqrt{32}}$.

Wer nichts Besonderes entdeckt und wie eben rechnet, bekommt dies „zu spüren“:

$$\frac{7}{\sqrt{98}-\sqrt{32}}=\frac{7\cdot\left(\sqrt{98}+\sqrt{32}\right)}{\left(\sqrt{98}-\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{98}+\sqrt{32}\right)}=\frac{7\sqrt{98}+7\sqrt{32}}{98-32}=\frac{7\sqrt{98}+7\sqrt{32}}{66}$$

Vielleicht erkennt der Schüler noch, dass man ja im Zähler partiell die Wurzel ziehen kann:

$$=\frac{7\cdot\sqrt{49\cdot 2}+7\cdot\sqrt{16\cdot 2}}{66}=\frac{7\cdot 7\cdot\sqrt{2}+7\cdot 4\cdot\sqrt{2}}{66}=\frac{49\sqrt{2}+28\sqrt{2}}{66}=\frac{77}{66}\sqrt{2}=\frac{7}{6}\sqrt{2}$$

Das alles wäre VIEL einfacher geworden, hätte der Betreffende gleich festgestellt, dass man den Nenner durch partielles Wurzelziehen vereinfachen kann:

$$\frac{7}{\sqrt{98}-\sqrt{32}}=\frac{7}{\sqrt{49\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}}=\frac{7}{7\sqrt{2}-4\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{7}{6}\sqrt{2}$$

Jetzt reichte es, mit $\sqrt{2}$ zu erweitern, da ja keine Summe mehr vorhanden war.

DEMO

f) $$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}-3}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}+3\right)}{\left(\sqrt{8}-3\right)\left(\sqrt{8}+3\right)}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{8}+2\sqrt{2}\cdot 3}{\sqrt{8}^2-3^2}=\frac{2\sqrt{16}+6\sqrt{2}}{8-9}=\frac{8+6\sqrt{2}}{-1}$$

$=-8-6\sqrt{2}$ (Beim Dividieren durch -1 ändern sich alle Vorzeichen.)

g) $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}=\frac{3-2\sqrt{3}\sqrt{7}+7}{3-7}=\frac{10-2\sqrt{21}}{-4}=-\frac{10}{4}+\frac{2}{4}\sqrt{21}$$

$$=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$$

Am besten zerlegt man diesen Term in zwei einzelne Brüche und kürzt dann!

h) $$\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}=\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}{\left(\sqrt{3}-3\right)\left(\sqrt{3}+3\right)}=\frac{3+2\sqrt{3}\cdot 3+9}{3-9}=\frac{12+6\sqrt{3}}{-6}=-\frac{12}{6}-\frac{6}{6}\sqrt{3}=-2-\sqrt{3}$$

i) $$\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)}$$

Im Nenner wäre damit alles klar für die 3. Binomische Formel. Jedoch bekommt man im Zähler Probleme, denn eigentlich hätte man hier gehofft, die 2. Binomische Formel anwenden zu können. Doch da passen die Vorzeichen nicht. In der 2. Klammer sind sie genau umgekehrt zur ersten.

Hier kann man auf zwei Arten weiter rechnen: Entweder man weiß, dass man dann ein Minuszeichen ausklammern kann, was die Vorzeichen ändert:

$$=\frac{-\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\left(-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)}=-\frac{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)}$$

$$=-\frac{9\cdot 5-2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}+4\cdot 3}{4\cdot 3-9\cdot 5}=-\frac{45-12\sqrt{15}+12}{12-45}=-\frac{57-12\sqrt{15}}{-33}$$

$$=-\left(-\frac{57}{33}+\frac{12}{33}\sqrt{15}\right)=\frac{19}{11}-\frac{4}{11}\sqrt{15}$$

Oder man sieht die Problematik gleich (Augen auf!) und vertauscht ohne Schwierigkeiten die Summe im Nenner:

$$\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)}=\frac{9\cdot 5-12\sqrt{15}+12}{45-12}=\frac{57-12\sqrt{15}}{33}$$

$$=\frac{57}{33}-\frac{12}{33}\sqrt{15}=\frac{19}{11}-\frac{4}{11}\sqrt{15}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass man sich eine Aufgabe gut ansehen sollte, bevor man loslegt und rechnet !

j) $$\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=0$$ Hier sollte man erkennen:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ und $(b-a)^2=b^2-2ba+a^2$ haben dasselbe Ergebnis. Daher ist die Differenz im Zähler gleich 0.

Siehe dazu Aufgabe 14 auf Seite 31.

DEMO

Aufgabenblatt

Aufgabe 12

a) $8\sqrt{17}+13\sqrt{17}-11\sqrt{17}$

b) $2\sqrt{99}+7\sqrt{176}-8\sqrt{275}$

c) $\frac{1}{5}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{5}-\frac{7}{4}\sqrt{5}$

d) $\frac{1}{6}\sqrt{20}-\frac{3}{2}\sqrt{45}+\frac{5}{4}\sqrt{80}$

e) $\frac{2}{5}\sqrt{12}+\frac{7}{20}\sqrt{48}+\frac{1}{90}\sqrt{243}$

f) $\frac{1}{8}\sqrt{28}+\frac{3}{20}\sqrt{175}-\frac{1}{4}\sqrt{112}$

g) $\frac{8}{25}\sqrt{150}-\frac{7}{10}\sqrt{96}-\frac{2}{15}\sqrt{216}$

h) $\frac{29}{10}\sqrt{13}-\frac{7}{20}\sqrt{52}+\frac{4}{15}\sqrt{117}$

Aufgabe 13

a) $\left(\sqrt{3}+3\right)^2$

b) $\left(4+\sqrt{11}\right)^2$

c) $\left(12-\sqrt{15}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{24}-6\right)^2$

e) $\left(\sqrt{98}-10\right)^2$

f) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{12}\right)^2$

g) $\left(7\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)^2$

h) $\left(8\sqrt{2}-4\sqrt{8}\right)^2$

i) $\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{50}\right)^2$

j) $\left(5\sqrt{27}-6\sqrt{12}\right)^2$

k) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{36}\right)^2$

l) $\left(4\sqrt{28}-\sqrt{112}\right)^2$

m) $\left(1-\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{7}\right)$

n) $\left(\sqrt{12}-8\right)\left(\sqrt{12}+8\right)$

o) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$

p) $\left(3\sqrt{15}+2\sqrt{10}\right)\left(3\sqrt{15}-2\sqrt{10}\right)$

q) $\left(12\sqrt{18}-18\sqrt{12}\right)\left(12\sqrt{18}+18\sqrt{12}\right)$

Aufgabe 14

a) $\dfrac{40}{5-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{4}{2+\sqrt{8}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{4+\sqrt{20}}$

d) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$

f) $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{32}-\sqrt{18}}$

g) $\dfrac{\sqrt{175}}{\sqrt{63}+\sqrt{28}}$

h) $\dfrac{4}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

i) $\dfrac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}-6\sqrt{5}}$

j) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

k) $\dfrac{4+\sqrt{15}}{\sqrt{15}-4}$

l) $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{10}}{\sqrt{12}+\sqrt{10}}$

m) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{10}}$

n) $\dfrac{\sqrt{500}}{8\sqrt{20}-2\sqrt{45}}$

o) $\dfrac{4607}{1-\sqrt{4608}}$

DEMO

§ 7 Wurzelterme mit Variablen

auf der CD geht es weiter…

Dort stehen auch die Lösungen der Trainingsaufgaben

DEMO