ALGEBRA

Potenzen und Wurzeln

Kurzfassung zur Wiederholung
mit Wissenstest zum Potenzrechnen

für alle, die es brauchen …

Datei Nr. 12311

Stand 7. Januar 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

VORWORT

Dieses Heft dient der Wiederholung des Potenzrechnens und Teilen des Wurzelrechnens.
Daher gibt es auch immer nur ein paar Beispiele zum jeweiligen Thema.

Gut zur Prüfungsvorbereitung.

Wer mehr üben sollte, kann dies mit den anschließend genannten Texten tun,
die hunderte von Aufgaben mir Lösungen enthalten.

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201 Quadratwurzeln
12202 Reelle Zahlen
12203 Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht

12205 Lernblatt: Wurzeln mit Variablen

12210 n-te Wurzeln
12211 Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300 Potenzen mit natürlichem Exponenten.

12301 Potenzen mit negativen Exponenten
12302 Potenzen mit gebrochenen Exponenten
(Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)

12305 Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht

12306 Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht

12310 Potenzrechnen (alter Text, alles in einem) – n-te Wurzeln, viele Aufgaben.

12311 Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)
(dieser Text)

12321 Lernprogramm
12333 Übung 4

12500 Gruße Aufgabensammlung
12510 Sammlung von Tests
(Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Inhalt

Test zur Wissenskontrolle

Wenn du wiederholen und vergessene Kenntnisse auffrischen möchtest, kannst du hier zuerst testen, was du noch weißt. Beantworte bitte unbedingt auch die Fragen zur Theorie, denn ohne Hintergrundwissen kann man nicht rechnen. Die Lösungen des Tests stehen am Ende dieses Heftes. Drucke diese Seiten aus und trage die Ergebnisse ein!

Berechne immer nur das Ergebnis als Potenz. Der Zahlenwert ist jetzt nicht so wichtig.

Thema 1: Multiplikation von Potenzen mit positiven Exponenten

a) $4^5 \cdot 4^3 =$ b) $5^6 \cdot 3^6 =$ c) $4^2 \cdot 3^3 =$ d) $(3x)^4$

e) Formuliere die beiden Regeln zur Multiplikation von Potenzen

Thema 2: Division von Potenzen mit positiven Exponenten

a) $\frac{24^3}{8^3} =$ b) $\frac{6^9}{6^5} =$ c) $\frac{5^2}{3^4} =$ d) $\left(\frac{a}{5}\right)^2$

e) Formuliere die beiden Regeln zur Division von Potenzen

Thema 3: Negative Exponenten

Schreibe die folgenden Ergebnisse so um, dass keine negativen Exponenten mehr da stehen und berechne den Zahlenwert. Verwende wenn nötig Brüche aber keine Dezimalzahlen.

a) $7^{-2} =$ b) $\frac{1}{5^{-3}} =$ c) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-3}$ d) $\left(3^{-2}\right)^{-1}$

Thema 4: Potenzieren von Potenzen

a) $\left(3^2\right)^5 =$ b) $\left(8^{-4}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{4^{-3}}{8^2}\right)^{-1}$ d) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3}$

e) Formuliere die Regel zum Potenzieren von Potenzen

Thema 5: Wurzeln als Potenzen

Schreibe die Wurzeln in Potenzen um:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{8}^3$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

Schreibe die Potenzen in Wurzeln um:

e) $3^{\frac{5}{2}}$ f) $16^{-\frac{1}{2}}$ g) $6^{-\frac{3}{2}}$ h) $4^{\frac{2}{3}}$

Thema 6: Rechnen mit Wurzeln und Vereinfachen der Wurzeln

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$ b) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\sqrt{9}}$ e) $\sqrt{8}^3 \cdot \sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{24x^3}}{\sqrt{2}}$

1. Natürliche Exponenten

Potenzen hat man eingeführt, um damit Rechnungen vereinfachen zu können.

Es handelt sich genauer gesagt um Produkte aus lauter gleichen Faktoren.

Definition:

Ist n eine natürliche Zahl (1, 2, 3, usw.), dann bedeutet $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,\text{Faktoren}}$

Beispiele:

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ $12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$

$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

$2^5 \cdot 3^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 32 \cdot 81 = 2592$

(Die Klammern hätte man hier nicht benötigt).

Weil man viele Potenzen einfach <u>wissen</u> muss, damit man schnell rechnen kann, sollte man diese auswendig lernen:

Zweierpotenzen:	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$
Dreierpotenzen:	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
Viererpotenzen:	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
Fünferpotenzen:	$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	

Quadratzahlen

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$
$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$	$16^2 = 256$
$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$

Rechnen mit natürlichen Exponenten

Schüler, die nicht Bescheid wissen, machen oft schlimme Rechenversuche. Man kann hier nicht einfach irgendetwas „rechnen“, denn es gibt strenge Regeln dafür. Diese wollen wir nun wiederholen.

1.1 Multiplikation von Potenzen mit positiven Exponenten

Erkennst Du den Unterschied zwischen diesen drei Aufgaben?

a) $3^5 \cdot 3^2$, b) $3^5 \cdot 2^5$ c) $3^5 \cdot 2^4$

Hier die Antwort:

a) Hier werden zwei Potenzen <u>mit gleicher Basis</u> multipliziert.
b) Hier werden zwei Potenzen <u>mit gleichem Exponenten</u> multipliziert.
c) Hier werden zwei Potenzen multipliziert, die nichts gemeinsam haben.

Für die Rechnungen in a) und b) gibt es Rechenmethoden, für c) aber nicht.
(Mit Rechenmethoden meine ich die direkte Berechnung über Potenzregeln, nicht mit einem Taschenrechner …)

Lösung:

a) $\boxed{3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7}$

Man sollte dies erklären können. Dazu schreibt man die Potenzen ausführlich auf:

3^5 ist $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$ und $3^2 = 3\cdot3$. Also folgt für das Produkt:

$3^5 \cdot 3^2 = \underbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}\cdot\underbrace{3\cdot3} = 3^7$.

Die Potenz 3^5 ergibt 5 Faktoren, dazu die zwei von 3^2, macht zusammen 7 Faktoren, was man abgekürzt 3^7 schreibt.

Diese Regel bitte auswendig lernen und aufsagen können:

Zwei Potenzen <u>mit gleicher Basis</u> werden multipliziert, indem man <u>die Exponenten addiert</u> und die <u>Basis lässt</u>.

Regel 1a

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Dazu noch ein paar Beispiele in Kurzform:

$7^{12}\cdot 7^8 = 7^{20}$, $\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^6$ und $3^{4x}\cdot 3^2 = 3^{4x+2}$

$\sqrt{3}^3\cdot\sqrt{3}^9 = \sqrt{3}^{12}$, $(5x-3)^2\cdot(5x-3) = (5x-3)^3$ und $\left(4x^2\right)^3\cdot\left(4x^2\right)^4 = \left(4x^2\right)^7$

b) $\boxed{3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5}$

Man sollte diese Berechnung erklären können. Dazu schreibt man die Potenzen ausführlich auf:

$$3^5 \cdot 2^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{} = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = (3 \cdot 2)^5 = 6^5$$

Da man in einem Produkt die Faktoren vertauschen darf, kann man immer eine 3 und eine 2 zu einem Produkt 6 zusammenfassen.

Diese Regel bitte auswendig lernen und aufsagen können:

Zwei Potenzen <u>mit gleichem Exponenten</u> werden multipliziert, indem man <u>die Basen multipliziert</u> und den <u>Exponenten lässt</u>.

Regel 1b

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

Dazu noch ein paar Beispiele in Kurzform:

$7^{12} \cdot 5^{12} = (7 \cdot 5)^{12} = 35^{12}$, $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$,

$3^{4x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{4x} = \left(3 \cdot \frac{1}{6}\right)^{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ $\quad \left(\frac{4}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^3 = \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{25}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

Hier wurde am Ende gekürzt!

$\boxed{\sqrt{2}^3 \cdot \sqrt{8}^3 = \sqrt{2 \cdot 8}^3 = \sqrt{16}^3} = 4^3 = 64$ $\quad (5x-3)^2 \cdot x^2 = \left[(5x-3) \cdot x\right]^2 = \left(5x^2 - 3x\right)^2$

c) Unwissende Schüler versuchen oftmals, die 3. Aufgabe $3^5 \cdot 2^4$ durch irgendeine Methode zu berechnen. Weil die Basen 3 und 2 verschieden sind, kann man die Regel 1a nicht anwenden, weil die Exponenten 5 und 4 verschieden sind, passt auch die Regel 1b nicht.
Das einzige was geht, ist die direkte Berechnung der beiden Potenzen:

$$3^5 = 243 \quad \text{und} \quad 2^4 = 16.$$

Damit folgt: $3^5 \cdot 2^4 = 243 \cdot 16 = 3888$.

Aber dies hat mit Potenzrechnen nichts mehr zu tun.

Man kann die Regeln 1a und 1b auch auf mehr als 2 Faktoren anwenden:

Potenzen mit gleicher Basis: $4^3 \cdot 4^5 \cdot 4^2 = 4^{3+5+2} = 4^{10}$

Potenzen mit gleichem Exponenten: $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 5 \cdot 3)^4 = 30^4$

Trainingsaufgaben bunt gemischt:

Aufgabe 1

a) $5^3 \cdot 5^{11}$ b) $2^5 \cdot 8^5$ c) $4^3 \cdot 4^{11} \cdot 4^2$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

e) $a^3 \cdot b^3$ f) $16^7 \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^7$ g) $12^4 \cdot 12^3 \cdot 12^5$ h) $2^3 \cdot 3^2$

i) $7^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$ j) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \cdot 5^3$

1.2 Division von Potenzen

Erkennst Du den Unterschied zwischen diesen drei Aufgaben?

a) $\frac{3^6}{3^2}$, b) $\frac{12^5}{4^5}$ c) $\frac{3^5}{2^3}$

Hier die Antwort:

a) Hier werden zwei Potenzen mit gleicher Basis dividiert.

b) Hier werden zwei Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert.

c) Hier werden zwei Potenzen dividiert, die nichts gemeinsam haben.

Für die Rechnungen in a) und b) gibt es Rechenmethoden, für c) aber nicht.
(Mit Rechenmethoden meine ich die direkte Berechnung über Potenzregeln, nicht mit einem Taschenrechner …)

Lösung:

a) $\frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 3^{6-2} = 3^4$ (= 81)

Man kann zwei gleiche Faktoren herauskürzen, damit nimmt man vom Exponenten 6 zwei weg, dies ist die gezeigte Subtraktion.

Diese Regel bitte auswendig lernen und aufsagen können:

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis lässt.

Regel 2a

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Dazu noch zwei Beispiele in Kurzform:

$\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$, $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

b) $\frac{12^5}{4^5} = \frac{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4} = \left(\frac{12}{4}\right)^5 = 3^5$ $(=243)$

Da man wegen dem gleichen Exponenten im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren hat, kann man gleich viele einzelne Brüche machen und diese wieder als Potenz schreiben!

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten lässt.

Regel 2b

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Dazu noch zwei Beispiele in Kurzform:

$\frac{12^6}{15^6} = \left(\frac{12}{15}\right)^6 = \left(\frac{4}{5}\right)^6$ $\frac{4^3}{20^3} = \left(\frac{4}{20}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\left(= \frac{1}{125}\right)$

c) Unwissende Schüler versuchen oftmals, die Aufgabe $\frac{3^5}{2^3}$ durch irgendeine Methode zu berechnen. Weil die Basen 3 und 2 verschieden sind, kann man die Regel 2a nicht anwenden, weil die Exponenten 5 und 3 verschieden sind, passt auch die Regel 2b nicht.
Das einzige was geht, ist die direkte Berechnung der beiden Potenzen: $3^5 = 243$ und $2^3 = 8$.

Damit folgt: $\frac{3^5}{2^3} = \frac{243}{8}$. Aber dies hat mit Potenzrechnen nichts mehr zu tun.

Trainingsaufgabe 2

a) $\frac{5^{11}}{5^4}$ b) $\frac{2^5}{8^5}$ c) $\frac{15^3}{12^4}$ d) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

e) $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^6}$ f) $\frac{4^2 \cdot 4^9}{4^3 \cdot 4^3}$ g) $\frac{6^3}{2^{10}} \cdot 4^3$ h) $\frac{15^5}{8^5} \cdot \frac{4^5}{5^5}$

1.3 Umkehrung der Regeln (Extrem wichtig!)
Das vergessen viele Lehrer – weil es für sie selbstverständlich ist…

a) Die **Regel 1a** lautet: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleicher Basis multipliziert.

Man kann diese Regel umkehren in: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Dann sagt sie uns, wie man eine Potenz in ein Produkt zweier Potenzen zerlegen kann:

$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$ oder $2^{4+\frac{1}{2}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ (was $2^{\frac{1}{2}}$ bedeutet wird weiter hinten besprochen).

b) Die **Regel 1b** lautet: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleichem Exponenten multipliziert.

Man kann diese Regel umkehren in: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Dann sagt sie uns, wie man eine Potenz eines Produkts in zwei Potenzen zerlegen kann:

$(4a)^2 = 4^2 \cdot a^2 = 16\,a^2$, $(3x)^3 = 3^3 \cdot x^3 = 27\,x^3$ oder $(-2ab)^4 = (-2)^4 \cdot a^4 \cdot b^4 = 16\,a^4\,b^4$

Das wird sehr oft gebraucht! Schüler machen oft diesen Fehler und rechnen: $(4a)^2 = 4a^2$.

Dann haben sie vergessen, dass man auch 4 quadrieren muss.

c) Die **Regel 2a** lautet: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleicher Basis dividiert.

Man kann diese Regel umkehren in: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Dann sagt sie uns, wie man eine Potenz in einen Bruch aus zwei Potenzen zerlegen kann:

$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8}$ oder $2^{4-\frac{1}{2}} = \frac{2^4}{2^{\frac{1}{2}}}$ (was $2^{\frac{1}{2}}$ bedeutet wird weiter hinten besprochen).

d) Die **Regel 2b** lautet: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert.

Man kann diese Regel umkehren in: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Dann sagt sie uns, wie die Potenz eines Produkts in zwei Potenzen zerlegen kann:

$\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4^2} = \frac{x^2}{16}$, oder $\left(\frac{2x}{3}\right)^3 = \frac{(2x)^3}{3^3} = \frac{2^3 \cdot x^3}{3^3} = \frac{8x^3}{27}$

Das wird sehr oft gebraucht! Schüler machen oft diesen Fehler und rechnen: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^3}{3}$.

Dann haben sie vergessen, dass man auch den Nenner quadrieren muss.

Trainingsaufgabe 3

Zerlege in Potenzen a) 3^{3+5} b) 2^{x+6} c) $(5x)^3$

d) $\left(\frac{4}{x}\right)^3$ e) 5^{n-2} f) $(9ab)^2$ g) $\left(\frac{5a}{7x}\right)^3$

2. Ganzzahlige Potenzen

2.1 WISSEN durch LERNEN der Grundlagen:

a) Zu Beginn des Potenzrechnens definiert man Potenzen nur für natürliche Hochzahlen.
Demnach soll 5^4 bedeuten, dass man 4-mal die Basis 5 mit sich selbst multiplizieren soll.
Das sieht so aus: $5^{\boxed{4}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\boxed{4}\text{ Faktoren}}$

b) Die Zahl 0 im Exponenten kann nach dieser Definition zunächst keine Bedeutung haben, denn was sollen „0 Faktoren" bedeuten? Dann wird ja für $5^{\boxed{0}}$ gar keine Zahl aufgeschrieben!

Mit der **Divisionsregel 2a** $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ kann man jedoch die Definition auf a^0 erweitern:

Die Aufgabe $\frac{5^7}{5^7}$ führt durch Kürzen (durch 5^7) auf den Bruch $\frac{5^7}{5^7} = \frac{1}{1} = 1$

Andererseits führt die Divisionsregel auf $\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$

Hier wird dieselbe Aufgabe auf 2 Weisen gelöst. Man legt daher fest: $\boxed{5^0 = 1}$

Die kann man mit beliebigen Potenzen nachmachen

Durch Kürzen erhält man $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Durch die Divisionsregel kommt man auf $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Daher legt man fest: Für jede Zahl $a \neq 0$ soll gelten: $\boxed{a^0 = 1}$

c) **Auf ähnliche Weise legt man fest, was negative Exponenten bedeuten sollen:**

(1) Die Aufgabe $\frac{5^3}{5^7}$ ergibt durch Kürzen: $\frac{5^3}{5^7} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^4}$

und nach der Potenzregel entsteht : $\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{\boxed{-4}}$

(was zunächst noch sinnlos ist).

Also legt man fest, dass $\boxed{5^{-4} = \frac{1}{5^4}}$ sein soll!

(2) Die Aufgabe $\frac{a^5}{a^6}$ ergibt durch Kürzen: $\frac{a^5}{a^6} = \frac{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \cdot a} = \frac{1}{a}$

und nach der Potenzregel entsteht: $\frac{a^5}{a^6} = a^{5-6} = a^{\boxed{-1}}$

Also legt man fest, dass $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$ sein soll!

Beispiele dazu: $4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ $\quad 3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$ $\quad 12^{-1}=\frac{1}{12^1}=\frac{1}{12}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{25}}=\frac{25}{4} \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{1}{\frac{64}{27}}=\frac{27}{64}$$

Daraus erkenn man:

Wenn man durch einen Bruch dividieren soll, wird mit seinem Kehrwert multipliziert!

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\underbrace{\left(\frac{3}{1}\right)^1}_{\text{weglassen!}}=3 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

MERKE: (Regel 3)

Die <u>negative Hochzahl</u> -1 erzeugt den Kehrwert: $\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}}$

Eine negative Hochzahl –n bewirkt, dass die Potenz mit positiver Hochzahl im Nenner steht $\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Folgerung: $\boxed{\frac{1}{a^{-1}}=a}$ $\boxed{\frac{1}{a^{-n}}=a^n}$

Also gilt auch $\frac{1}{3^{-2}}=3^2=9$, und $\frac{1}{(ab)^{-1}}=(ab)^1=ab$ aber $\boxed{\frac{1}{3x^{-2}}=\frac{1}{3}\cdot x^2}$!!!

Die 3 hat im Nenner keinen Exponenten, das „hoch" 2 gilt nur für x, weshalb die 3 im Nenner beibt,

Trainingsaufgaben zu negativen Exponenten

Aufgabe 4: Berechne wie gesehen:

a) 3^{-3} b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ c) $\frac{1}{10^{-2}}$ d) $\left(\frac{11}{5}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$ f) 2^{-5} g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ h) $\frac{2^{-3}}{5^{-2}}$

i) 10^{-3} j) $\frac{1}{4x^{-1}}$ k) 5^{-3} l) $\frac{2a}{5b^{-2}}$

2.2 Multiplizieren mit negativen Exponenten

Beispiele:

a) $4^{-3}\cdot 4^{-2} = 4^{(-3)+(-2)} = 4^{-5} = \frac{1}{4^5}$

b) $5^{-3}\cdot 5^{4} = 5^{-3+4} = 5^1 = 5$

Oder so: $5^{-3}\cdot 5^{4} = 5^{-3+4} = 5^1 = 5$

c) $2^{3}\cdot 2^{-4} = 2^{3+(-4)} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

d) $12^{-4}\cdot 12^{4} = 12^{-1+4} = 12^0 = 1$

Oder so: $12^{-4}\cdot 12^{4} = \frac{1}{12^4}\cdot 12^4 = \frac{\cancel{12^4}}{\cancel{12^4}} = 1$

Bei gleicher Basis werden die Exponenten addiert. (Regel 1a)

e) $3^{-1}\cdot 2^{-1} = (3\cdot 2)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

Oder so: $3^{-1}\cdot 2^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

f) $6^{-5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(6\cdot\frac{1}{3}\right)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Bei gleichem Exponenten bleibt dieser erhalten und die Basen werden multipliziert. (Regel 1b)

2.3 Dividieren mit negativen Exponenten

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{3}}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{4^5}{4^{-3}} = 4^{5-(-3)} = 4^{5+3} = 4^8$

c) $\frac{2^{-3}}{2^4} = 2^{-3-4} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7} \left(= \frac{1}{128}\right)$

d) $\frac{5^{-4}}{5^{-6}} = 5^{-4-(-6)} = 5^{-4+6} = 5^2 = 25$

Bei gleicher Basis werden die Exponenten subtrahiert. (Regel 2a)

e) $\frac{8^{-3}}{4^{-3}} = \left(\frac{8}{4}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

f) $\frac{8^{-2}}{24^{-2}} = \left(\frac{8}{24}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

g) $\frac{14^{-1}}{21^{-1}} = \left(\frac{14}{21}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

Bei gleichem Exponenten bleibt dieser erhalten und die Basen werden dividiert. (Regel 2b)

Trainingsaufgaben zu negativen Exponenten

Aufgabe 5:

a) $4^{-2} \cdot 4^{3} =$ b) $3^{-5} \cdot 5^{-5} =$ c) $8^{-3} \cdot 8^{4} =$

d) $\frac{2^{-1}}{2^{-3}} =$ e) $\frac{9^{2}}{9^{-2}} =$ f) $\frac{30^{-2}}{40^{-2}} =$

g) $6^{-2} \cdot 6^{-3} =$ h) $6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{-2} =$ i) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{15}\right)^{-3} =$

j) $(-1)^{-5}$ k) $(-2)^{-4} \cdot (-2)^{8}$ l) $\frac{-5^{6}}{(-5)^{-3}}$

Du kannst dir eine wichtige Hilfe selbst geben:

Suche zu jeder Aufgabe das Merkmal und sage dann die Regel im Wortlaut auf, dann rechne:

Regel 1a: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, …

Regel 1b: Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, …

Regel 2a: Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, …

Regel 2b: Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, …

Das sind die Verkehrsregeln im Potenzrechnen …..

Und vor dem Können kommt das Wissen ;-))

3. Potenzieren von Potenzen

a) 8^4 heißt doch: $8^4 = \underbrace{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}_{\text{4 Faktoren}}$.

Entsprechendes gilt auch für $\left(2^3\right)^4$: $\left(2^3\right)^4 = \underbrace{2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3}_{\text{4 Faktoren}} = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$

Wir haben jetzt 4 Faktoren, also wird im Exponenten 4-mal die Zahl 3 addiert, das ergibt 12.

In Kurzform haben wir also jetzt: : $\left(2^3\right)^4 = 2^{\boxed{3\cdot 4}} = 2^{12}$

b) $\left(3^{-4}\right)^2 = 3^{-4}\cdot 3^{-4} = 3^{-4+(-4)} = 3^{-8}$ kurz: $\left(3^{-4}\right)^2 = 3^{\boxed{-4\cdot 2}}$

c) $\left(5^2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(5^2\right)^3} = \dfrac{1}{5^6}$ kurz: $\left(5^2\right)^{-3} = 5^{\boxed{2\cdot(-3)}} = 5^{-6}$

d) $\left(2^{-4}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(2^{-4}\right)^3} = \dfrac{1}{2^{-4}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{-4}} = \dfrac{1}{2^{-12}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2^{12}}} = 2^{12}$ $\left(2^{-4}\right)^{-3} = 2^{\boxed{(-4)\cdot(-3)}} = 2^{12}$

Diese Beispiele zeigen, wie man die Potenz einer Potenz kurz berechnet.

Es gilt diese Regel:

MERKE: : $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$ **Regel 4**

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert!

Trainingsaufgaben:

Aufgabe 6

a) $\left(3^5\right)^3$ b) $\left(2^{-5}\right)^{-2}$ c) $\left(8^{-3}\right)^2$ d) $\left(5^6\right)^{-1}$

e) $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ f) $\left((-4)^{-2}\right)^3$ g) $-\left(-2^3\right)^{-5}$ h) $-\left(-3^{-4}\right)^{-2}$

4. Zahlen zum Potenzieren in Primfaktoren zerlegen

a) Die Aufgabe $4^3 \cdot 2^5$ zeigt weder eine gemeinsame Basis noch gemeinsame Exponenten. Wenn man aber weiß, dass die Basis 4 selbst eine Potenz von 2 ist, dann kann man 4 durch 2^2 ersetzen. Die Rechnung lässt sich dann durchführen:

$$4^3 \cdot 2^5 = \left(2^2\right)^3 \cdot 2^5 = 2^6 \cdot 2^5 = 2^{6+1} = 2^{11}$$

Ähnlich geht man den folgenden Aufgaben vor:

Wenn man zwei Potenzen auf eine gemeinsame Basis umrechnen kann, dann ist ihr Produkt oder ihr Quotient auch eine Potenz mit dieser Basis!

b) $9^3 \cdot 27^{-2} = \left(3^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^{-2} = 3^6 \cdot 3^{-6} = 3^{6+(-6)} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$

c) $\frac{1}{16} \cdot 8^2 = \frac{1}{2^4} \cdot 8^2 = 2^{-4} \cdot \left(2^3\right)^2 = 2^{-4} \cdot 2^6 = 2^{-4+6} = 2^2 = 4$

d) $\frac{25^5}{125^3} = \frac{\left(5^2\right)^5}{\left(5^3\right)^3} = \frac{5^{10}}{5^9} = 5^{10-9} = 5^1 = 5$

e) $\frac{32^{-3}}{8^5} = \frac{\left(2^5\right)^{-3}}{\left(2^3\right)^5} = \frac{2^{-15}}{2^{15}} = 2^{-15-15} = 2^{-30}$

Bei manchen Aufgaben muss man sogar in mehrere Primfaktoren zerlegen:

f) $\frac{6^3}{2^4} = \frac{(2 \cdot 3)^3}{2^4} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{2^4} = 2^{3-4} \cdot 3^3 = 2^{-1} \cdot 3^3 = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$

SCHWER

Die erreicht man auch durch Kürzen durch 2^3: $\frac{6^3}{2^4} = \frac{(2 \cdot 3)^3}{2^4} = \frac{\cancel{2^3} \cdot 3^3}{\cancel{2^4}} = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$

g) $\frac{54^2}{3^6} = \frac{(27 \cdot 2)^2}{3^6} = \frac{27^2 \cdot 2^2}{3^6} = \frac{\left(3^3\right)^2 \cdot 2^2}{3^6} = \frac{\cancel{3^6} \cdot 2^2}{\cancel{3^6}} = 2^2 = 4$

Hier sind viele Schritte nötig. Vor allem muss man die Regel 1b rückwärts anwenden, also die Potenz $(27 \cdot 2)^2$ in zwei Potenzen zerlegen: $= 27^2 \cdot 2^2$. Dann muss man wissen, dass $27 = 3^3$ ist usw.

Trainingsaufgabe 7

a)	$4^5 \cdot 2^{-10}$	b)	$8^{-2} \cdot 16^3$	c)	$81^{-1} \cdot 27^2$
d)	$\frac{64^2}{32^3}$	e)	$\frac{27^{-4}}{9^{-7}}$	f)	$\frac{7^3}{49^{-2}}$
g)	$\frac{10^3}{5^2}$	h)	$\frac{12^6}{54^3}$	i)	$\frac{8^5 \cdot 4^{-3}}{16^2 \cdot 32^{-1}}$

5. Zusammengesetzte Aufgaben

Beispiele:

(a) $\left(6x^2\right)^{-3} = 6^{-3}\cdot\left(x^2\right)^{-3} = 6^{-3}\cdot x^{-6} = \frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{x^{+6}}$ oder $= \frac{1}{216\,x^6}$

Zur Erinnerung: Hier wird die Multiplikationsregel in umgekehrter Form angewendet (siehe 1.3)!

(b) $\left(4a^3\right)^2\cdot\left(12\,a^{-1}\right)^3 =$

Achtung:

> Weil 4 selbst eine Zweierpotenz ist und weil in 12 auch die 2 enthalten ist, muss man 4 und 12 zuerst in Primfaktoren zerlegen:
> $4 = 2^2$ und $12 = 3\cdot 4 = 3\cdot 2^2$. Dann ist die Rechnung so lösbar:

$$\left(4a^3\right)^2\cdot\left(12\,a^{-1}\right)^3 = \left(2^2a^3\right)^2\cdot\left(3\cdot 2^2a^{-1}\right)^3$$

2. Schritt: Die Klammern auflösen nach der Regel $a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$, die man nun in umgekehrter Richtung anwendet, also so: $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$!

Das ergibt $\left(2^2a^3\right)^2 = 2^4\cdot a^6$

und $\left(3\cdot 2^2a^{-1}\right)^3 = 3^3\cdot 2^6\cdot a^{-3}$.

Zusammengesetzt: $= 2^4\cdot a^6\cdot 3^3\cdot 2^6\cdot a^{-3}$

3. Schritt: Nun fasst man die Faktoren mit gleicher Basis zusammen:

$$= 2^{4+6}\cdot 3^3\cdot a^{6-3} = 2^{10}\cdot 3^3\cdot a^3 = 1024\cdot 27\cdot a^3 = \ldots$$

Mehr kann man ohne Taschenrechner nicht erreichen. Hier endet also die Übung.

(c) $\left(40yx^{-2}\right)^4\cdot\left(36y^{-1}x^3\right)^3$

1. Schritt: Zerlegen: $40 = 5\cdot 8 = 5\cdot 2^3$ und $36 = 4\cdot 9 = 2^2\cdot 3^2$

$$\left(40yx^{-2}\right)^4\cdot\left(36y^{-1}x^3\right)^3 = \left(5\cdot 2^3\cdot yx^{-2}\right)^4\cdot\left(2^2\cdot 3^2\cdot y^{-1}x^3\right)^3$$

2. Schritt: Weil $\left(5\cdot 2^3\cdot yx^{-2}\right)^4 = 5^4\cdot 2^{12}y^4\cdot x^{-8}$

und $\left(2^2\cdot 3^2\cdot y^{-1}x^3\right)^3 = 2^6\cdot 3^6\cdot y^{-3}\cdot x^9$

Zusammengesetzt: $= 5^4\cdot 2^{12}y^4\cdot x^{-8}\cdot 2^6\cdot 3^6\cdot y^{-3}\cdot x^9$

3. Schritt: Faktoren mit gleicher Basis zusammenfassen:

$$= 5^4\cdot 2^{12+6}\cdot 3^6\cdot x^{-8+9}\cdot y^{4-3}$$
$$= 5^4\cdot 2^{18}\cdot 3^6\cdot x^1\cdot y^1$$
$$= \underbrace{5^4\cdot 2^{18}\cdot 3^6}_{=\ldots\text{Zahl}}\cdot xy$$

Mehr kann man ohne Taschenrechner nicht erreichen. Hier endet also die Übung.

(d) $\dfrac{\left(18a^2b^{-2}\right)^3}{\left(24a^3b\right)^2} =$

1. Schritt: Zerlegen: $18 = 2\cdot 9 = 2\cdot 3^2$ und $24 = 3\cdot 8 = 3\cdot 2^3$

$$\frac{\left(18a^2b^{-2}\right)^3}{\left(24a^3b\right)^2} = \frac{\left(2\cdot 3^2\cdot a^2\cdot b^{-2}\right)^3}{\left(3\cdot 2^3\cdot a^3\cdot b\right)^2} = \frac{2^3\cdot 3^6\cdot a^6\cdot b^{-6}}{3^2\cdot 2^6\cdot a^6\cdot b^2}$$

2. Schritt: Zusammenfassen der Potenzen mit gleicher Basis:

$$\frac{2^3}{2^6}2^{3-6} = 2^{-3}\,,\quad \frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4\,,\quad \frac{a^6}{a^6} = a^0 = 1\,,\quad \frac{b^{-6}}{b^2} = b^{-6-2} = b^{-8}$$

Zusammengesetzt: $= 2^{-3}\cdot 3^4\cdot 1\cdot b^{-8}$
(„Mal 1“ sollte man weglassen.)

3. Schritt: Jetzt schreibt man den Term noch so auf, dass nur positive Exponenten übrig bleiben: Die Potenzen mit den negativen Exponenten kommen in den Nenner:

$$= \frac{3^4}{2^3\cdot b^8}.$$

e) $\dfrac{\left(25^5x^2y^4\right)^{-3}}{\left(20^{-4}x^{-5}y^2\right)^2} =$

1. Schritt: Zerlegen: $25 = 5^2$ und $20 = 4\cdot 5 = 2^2\cdot 5$

$$\frac{\left(25^5x^2y^4\right)^{-3}}{\left(20^{-4}x^{-5}y^2\right)^2} = \frac{\left(5^{10}x^2y^4\right)^{-3}}{\left(2^{-8}\cdot 5^{-4}x^{-5}y^2\right)^2} = \frac{5^{-30}x^{-6}y^{-12}}{2^{-16}\cdot 5^{-8}\cdot x^{-10}\cdot y^4}$$

2. Schritt: Zusammenfassen der Potenzen mit gleicher Basis:

$$\frac{5^{-30}}{5^{-8}} = 5^{-30-(-8)} = 5^{-30+8} = 5^{-22}\,,\quad \frac{1}{2^{-16}} = 2^{16}$$

$$\frac{x^{-6}}{x^{-10}} = x^{-6-(-10)} = x^{-6+10} = x^4 \quad\text{und}\quad \frac{y^{-12}}{y^4} = y^{-12-4} = y^{-16}$$

Zusammengesetzt $= 5^{-22}\cdot 2^{16}\cdot x^4\cdot y^{-16}$

3. Schritt: Jetzt schreibt man den Term noch so auf, dass nur positive Exponenten übrig bleiben: Die Potenzen mit den negativen Exponenten kommen in den Nenner:

$$= \frac{x^4\cdot 2^{16}}{5^{22}\cdot y^{16}}$$

Mehr zusammenfassen ist Unsinn. Das sind ohnehin reine Trainingsaufgaben für die Umformungen.

Trainingsaufgaben 8

a) $\left(54a^2\right)^3\cdot\left(40a^{-4}\right)^2$ b) $\left(16x^3\right)^{-2}\cdot\left(24^2x^2\right)^4$ c) $\left(a^2b^{-3}c^4\right)^{-3}\cdot\left(a^{-1}b^4\cdot c^{-2}\right)^3$

d) $\dfrac{\left(12x^3\right)^3}{\left(45x^{-2}\right)^3}$ e) $\dfrac{\left(4a^2\right)^3\left(8ab^2\right)^5}{\left(16a^3b^{-2}\right)^4}$ f) $\left(98x^3\right)^2\cdot\dfrac{4x^2}{\left(49x^{-2}\right)^2}$

6. Brüche als Exponenten - Wurzeln

6.1 Wurzeln sind auch Potenzen

Erinnerst du dich daran: Potenzen wurden zuerst nur für natürliche Zahlen definiert. Dann hat man den Exponenten 0 und negative ganze Zahlen als Exponenten eingeführt und so definiert, dass die Divisionsregel dazu passt. Genauso kann man Wurzeln als Potenzen mit Brüchen als Exponenten definieren. Warum das geht, wird hier kurz erklärt.

Weil einerseits gilt: $\sqrt{2}^2 = 2$

Und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 2^1 = 2$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}}$ sein soll.

Weil einerseits gilt: $\sqrt{3}^2 = 3$

Und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}}$ sein soll.

Weil einerseits gilt: $\sqrt{a}^2 = a$

Und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$ sein soll.

Anmerkung: Die Berechnung von $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ ist natürlich nur rein formal möglich, denn wenn man noch nicht definiert hat, was $a^{\frac{1}{2}}$ bedeuten soll, kann ja auch nicht damit rechnen!

Wer schon gelernt hat, was 3. und 4. Wurzeln sind, sollte weiterlesen:

Weil einerseits gilt: $\sqrt[3]{2}^3 = 2$

und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 2^1 = 2$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}}$ sein soll.

Weil einerseits gilt: $\sqrt[3]{a}^3 = a$

und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\cdot 3} = a^1 = a$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}}$ sein soll.

Weil einerseits gilt: $\sqrt[4]{2}^4 = 2$

und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{4}\cdot 4} = 2^1 = 2$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}}$ sein soll.

Weil einerseits gilt: $\sqrt[4]{a}^4 = a$

und weil die Potenzregel dies liefert: $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a^{\frac{1}{4}\cdot 4} = a^1 = a$

hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}}$ sein soll.

6.2 Rechnen mit gebrochenen Exponenten

Hier werden nur wenige Grundübungen vorgeführt und geübt. Zum Rechnen mir Wurzeln wird auf die Texte 12310, 12321 (!) und 12500 verwiesen.

(1) Multiplikation von Wurzeln

Die Multiplikationsregel $\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}}$ entspricht $\boxed{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}}$

Dies ist eine Form der Potenzegel 1a (gleiche Exponenten),die man ja nun kennen sollte!

Beispiele:

$\boxed{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}}=\sqrt{16}=4$, $\boxed{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12\cdot 3}}=\sqrt{36}=6$

$\boxed{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}}$ $\boxed{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot 8}}=\sqrt{4}=2$

Man erkennt, dass man mit dieser Regel bisweilen zu Radikanden (so heißt die Zahl unter der Wurzel) kommt, aus denen man dann die Wurzel ziehen kann.

Das gilt auch für 3. Wurzeln, 4. Wurzeln usw.:

$\boxed{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\cdot b}}$ entspricht $\boxed{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{3}}}$

$\boxed{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{a\cdot b}}$ $\boxed{a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{4}}}$

Beispiele:

$\boxed{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}}=3$ denn $3^3 = 37$

$\boxed{\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{60}}$ Diese Wurzel gibt keine rationale Zahl.

(2) Division von Wurzeln

Die Divisionsregel $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$ entspricht $\boxed{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}$

Die Divisionsregel $\boxed{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$ entspricht $\boxed{\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}$

Die Divisionsregel $\boxed{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}$ entspricht $\boxed{\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}}$

Beispiele:

$\boxed{\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{90}{10}}}=\sqrt{9}=3$ $\boxed{\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}=\sqrt[3]{\frac{3}{24}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{20}{5}}=\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{3}{24}}=\sqrt{\frac{1}{8}}$

(3) Potenzieren von Wurzeln

Viele Schüler können mit diesen Rechnungen nichts anfangen: $\sqrt{3}^4$, $\sqrt{7}^3$, $\sqrt{16}^{\frac{1}{2}}$ usw.
Dazu braucht man dieses Grundwissen:

a) $\sqrt{3}$ ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat 3 ergibt. Also ist doch $\boxed{\sqrt{3}^2 = 3}$

(Und bitte nicht so rechnen: $\sqrt{3}^2 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$ Das Ergebnis ist zwar richtig, aber die Berechnung zeugt nicht sehr von großer Ahnung!!!)

Daraus folgt nun: $\sqrt{3}^4 = \underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{=3}\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{=3} = 3\cdot 3 = 9$

Doch das alles wird ganz anders, einfacher, leichter, besser, schöner (usw.), wenn man die Wurzeln in Potenzen umschreibt und dann die Potenzgesetze zur Anwendung bringt.

$$\sqrt{3}^4 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 3^2 = 9$$

Zuerst wird die Wurzel als „hoch $\frac{1}{2}$" geschrieben. Dann wird mit 2 potenziert. Dazu werden die beiden Exponenten multipliziert. Und wenn jetzt auch noch weiß, dass $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ ist, dann ist man fertig.

b) $\sqrt{2}^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8$ oder $\sqrt{2}^6 = \left(\sqrt{2}^2\right)^3 = 2^3 = 8$.

c) $\sqrt{7}^{-4} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{-4} = 7^{\frac{1}{2}\cdot(-4)} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

Diese Aufgabe geht schneller wenn man diesen Trick anwendet und 4 in 2•2 zerleget:

$$\sqrt{7}^{-4} = \frac{1}{\sqrt{7}^4} = \frac{1}{\sqrt{7}^{\boxed{2\cdot 2}}} = \frac{1}{\underbrace{\left(\sqrt{7}^2\right)}_{=7}^2} = \frac{1}{49}$$

Hoch 4 heißt eben „zweimal nacheinander quadrieren", so wird aus $\sqrt{7}$ zuerst 7 und dann 49.

d) $\sqrt{5}^{12} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{12} = 5^{\frac{12}{2}} = 5^6$

Wenn eine Quadratwurzel mit einer geraden Zahl potenziert wird, fällt die Wurzel ganz weg.

e) Schwieriger ist diese Aufgabe: $\sqrt{2}^{11}$. Die Umrechnung führt auf eine gebrochene Hochzahl:

$\sqrt{2}^{11} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{11} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 11} = 2^{\frac{11}{2}}$!

Weil der Bruchexponent keine ganze Zahl mehr ist, zerlegt man diesen in eine gemischte Zahl: $2^{\frac{11}{2}} = 2^{5+\frac{1}{2}}$

Jetzt muss man die Potenzregel 1a in umgekehrter Richtung anwenden und damit die Potenz in ein Produkt zerlegen: $2^{\frac{11}{2}} = 2^{5+\frac{1}{2}} = 2^5\cdot 2^{\frac{1}{2}}$.

Schließlich ersetzt man $2^{\frac{1}{2}}$ wieder durch $\sqrt{2}$ und die ganze Berechnung ist fertig:

$$\boxed{\sqrt{2}^{11} = \underbrace{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{11} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 11}}_{\text{kann der gute Schüler weglassen}} = 2^{\frac{11}{2}} = 2^{5+\frac{1}{2}} = 2^5\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 32\cdot\sqrt{2}}$$

Wenn eine Quadratwurzel mit einer ungeraden Zahl potenziert wird, fällt die Wurzel nicht weg.

f) Noch zwei solche Beispiele, jetzt ohne ausführliche Erklärung der Rechenschritte:

$$\boxed{\sqrt{3}^{7} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{7} = 3^{\frac{7}{2}} = 3^{3+\frac{1}{2}} = 3^{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 27\cdot\sqrt{3}}$$

Üben!

$$\boxed{\sqrt{5}^{-5} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{-5} = 5^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5^{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5^{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{25\sqrt{5}}}$$

Beim letzten Beispiel findet diese empfohlene Zerlegung eben im Nenner statt.

f) Eine umfangreichere Aufgabe dazu: $\dfrac{\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{5}}{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} =$

Zuerst muss man die 6 in $2\cdot 3$ zerlegen: $\dfrac{\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{5}}{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} = \dfrac{\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{5}}{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} = \dfrac{2^{\frac{10}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}}$

jetzt fasst man die Zweierpotenzen zusammen und dann die Dreierpotenzen:

$$\frac{2^{\frac{10}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{10}{3}-\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{20}{6}-\frac{9}{6}}\cdot 3^{\frac{5}{4}-\frac{6}{4}} = 2^{\frac{11}{6}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{2^{\frac{11}{6}}}{3^{\frac{1}{4}}}$$

Jetzt wird der Exponent von 2 zerlegt: $2^{\frac{11}{6}} = 2^{1-\frac{5}{6}} = 2^{1}\cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2\cdot\sqrt[6]{2^{5}} = 2\cdot\sqrt[6]{32}$.

Insgesamt sieht die ganze Rechnung jetzt so aus:

$$\frac{\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{5}}{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} = \frac{\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{5}}{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} = \frac{2^{\frac{10}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{10}{3}-\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{20}{6}-\frac{9}{6}}\cdot 3^{\frac{5}{4}-\frac{6}{4}} = 2^{\frac{11}{6}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{2^{\frac{11}{6}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{1+\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{2\cdot\sqrt[6]{32}}{\sqrt[4]{3}}$$

g) $\left(\sqrt{\sqrt{8}}\right)^{5} = \left(\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{5} = 8^{\frac{5}{4}} = 8^{1+\frac{1}{4}} = 8^{1}\cdot 8^{\frac{1}{4}} = 4\cdot\sqrt[4]{8}$

Solche Aufgaben findet man in den genannten anderen Texten mehr.

6.3 Partielles Wurzelziehen

In Abschnitt 1.3 wurde die Umkehrung der Regeln besprochen. Das ist unglaublich wichtig!
Wir benötigen hier die Umkehrung der Multiplikationsregel für Wurzeln:
Für die Multiplikation zweier Wurzeln gilt: $\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}}$.
Die Umkehrung dieser Formel lautet: $\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$.
Sie besagt, dass man die Wurzel in zwei Wurzeln zerlegen darf, wenn der ursprüngliche Radikand aus zwei Faktoren besteht.

Dies ist für viele Beispiele eigentlich unwichtig, denn was hat man davon, wenn man so rechnet;
$\sqrt{16}=\sqrt{8\cdot 2}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$ oder $\sqrt{39}=\sqrt{3\cdot 13}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}$?

Es gibt jedoch ganz viele Aufgaben, da führt die Anwendung dieser Regel zu einer Vereinfachung der gegebenen Wurzel.

Beispiele

a) $\sqrt{8}$ ist keine rationale Zahl, man kann die Wurzel aus 8 nicht ziehen. Aber in der Zahl 8 ist die Quadratzahl 4 enthalten. Daher kann man die Zahl 8 in $4\cdot 2$ zerlegen.
Die Anwendung der umgekehrten Produktregel sieht dann so aus:

$$\boxed{\sqrt{8}=\sqrt{\boxed{4}\cdot 2}=\boxed{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{2}=\boxed{2}\sqrt{2}}.$$

Man sagt: Es wurde teilweise (partiell) die Wurzel gezogen.
Auf dasselbe Ergebnis kommt man auch mit dieser Potenzrechnung:

$$\sqrt{8}=8^{\frac{1}{2}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{2}$$

Die Wurzelmethode ist kürzer!

b) $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 2$

c) $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}$

d) $\sqrt{175}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=5\sqrt{7}$

e) $\sqrt{20a^3b^2c}=\sqrt{4\cdot 5\cdot a^2\cdot a\cdot b^2\cdot c}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{5ac}=2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{5ac}$
Hier wurde auch a^3 in $a^2\cdot a$ zerlegt, so dass man aus a^2 die Wurzel ziehen kann.

Das geht auch bei höheren Wurzeln:

f) $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=2\cdot\sqrt[3]{5}$ denn $2^3=8 \Rightarrow \sqrt[3]{8}=2$.

g) $\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{2}=5\cdot\sqrt[3]{2}$, denn $5^3=125 \Rightarrow \sqrt[3]{125}=5$.

h) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{16\cdot 5}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{5}=2\cdot\sqrt[4]{5}$, denn $2^4=16 \Rightarrow \sqrt[4]{16}=2$.

i) $\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{16\cdot 4}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{4}=2\cdot\sqrt[4]{4}$

Hier sollte man weiter rechnen: $\sqrt[4]{4}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

oder so: $\sqrt[4]{4}=\sqrt{\sqrt{4}}=\sqrt{2}$.

Also zusammen: $\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{16\cdot 4}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{4}=2\cdot\sqrt[4]{4}=2\cdot\sqrt{2}$

6.4 Den Nenner wurzelfrei (rational) machen.

Es ist üblich, dass man Terme wie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ durch Erweitern so umformt, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht. Hier erweitert man mit $\sqrt{2}$, das heißt „Zähler und Nenner werden mit $\sqrt{2}$ multipliziert". Dadurch entsteht im Nenner $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ und das Ziel ist erreicht. Dien ganze Rechnung sieht dann so aus:

a) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ oder }=\frac{1}{2}\sqrt{2}}$, denn nach der Regel $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$ gehört ein Faktor in den Zähler.

b) $\boxed{\frac{15}{\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}}$. Hier wurde mit $\sqrt{3}$ erweitert:

c) $\frac{24}{\sqrt{18}}$ Schüler neigen dazu, mit $\sqrt{18}$. Dann sieht die Rechnung so aus: (und ist ganz schlecht):

$$\frac{24}{\sqrt{18}}=\frac{24\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{24\cdot\sqrt{18}}{18}=\frac{4\cdot\sqrt{18}}{3}.$$

Dann teilweise die Wurzel ziehen: $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$.

Dann heißt das insgesamt: $\frac{24}{\sqrt{18}}=\frac{24\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{24\cdot\sqrt{18}}{18}=\frac{4\cdot\sqrt{18}}{3}=\frac{4\cdot 3\sqrt{2}}{3}=4\cdot\sqrt{2}$. **?**

Der kürzere und daher auch elegantere Weg kommt mit einer Erweiterung mit $\sqrt{2}$ aus. Wie kommt man darauf? Der Radikand enthält eine Quadratzahl als Teiler. Daher wird zerlegt:

! $\boxed{\frac{24}{\sqrt{18}}=\frac{24\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{9\cdot 2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{24\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=4\sqrt{2}}$. Man musste also nur mit $\sqrt{2}$ erweitern und kürzen.

d) $\frac{88}{\sqrt{44}}=\frac{88\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{4\cdot 11}\cdot\sqrt{11}}=\frac{88\cdot\sqrt{11}}{2\cdot 11}=4\cdot\sqrt{11}$

e) $\frac{6}{\sqrt{98}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{49\cdot 2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{7\cdot 2}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{7}$ oder $=\frac{3}{7}\cdot\sqrt{2}$

f) $\frac{30}{\sqrt[3]{24}}=\frac{30\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3}}{\sqrt[3]{8\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3}}=\frac{30\cdot\sqrt[3]{9}}{2\cdot 3}=5\cdot\sqrt[3]{9}$, denn $\sqrt[3]{8}=2$ und $\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3}=3$

Hoppla! Das war schwer, denn um von $\sqrt[3]{3}$ auf $\sqrt[3]{27}=3$ zu kommen ($\sqrt[3]{9}$ geht noch nicht!) kann man nicht mit $\sqrt[3]{3}$ erweitern sondern benötigt $\sqrt[3]{9}$. Ich habe extra $\sqrt[3]{3\cdot 3}$ geschrieben, damit man erkennt, dass dann im Nenner 3 Dreier unter der 3. Wurzel stehen. Damit kann man sie ziehen: $\frac{30\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3}}{\sqrt[3]{8\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3}}=\frac{30\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3}}=\frac{30\cdot\sqrt[3]{9}}{2\cdot 3}=5\cdot\sqrt[3]{9}$

Trainingsaufgaben zu Wurzeln folgen 2 Seiten weiter hinten (Aufgabe 8)

7. Zusammenstellung aller Trainingsaufgaben dieses Heftes

Aufgabe 1

a) $5^3 \cdot 5^{11}$ b) $2^5 \cdot 8^5$ c) $4^3 \cdot 4^{11} \cdot 4^2$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

e) $a^3 \cdot b^3$ f) $16^7 \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^7$ g) $12^4 \cdot 12^3 \cdot 12^5$ h) $2^{3} \cdot 3^2$

i) $7^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$ j) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \cdot 5^3$

Aufgabe 2

a) $\dfrac{5^{11}}{5^4}$ b) $\dfrac{2^5}{8^5}$ c) $\dfrac{15^3}{12^4}$ d) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

e) $\dfrac{3^5 \cdot 3^2}{3^6}$ f) $\dfrac{4^2 \cdot 4^9}{4^3 \cdot 4^3}$ g) $\dfrac{6^3}{2^{10}} \cdot 4^3$ h) $\dfrac{15^5}{8^5} \cdot \dfrac{4^5}{5^5}$

Aufgabe 3 Zerlege in Potenzen

a) 3^{3+5} b) 2^{x+6} c) $(5x)^3$

d) $\left(\dfrac{4}{x}\right)^3$ e) 5^{n-2} f) $(9ab)^2$ g) $\left(\dfrac{5a}{7x}\right)^3$

Aufgabe 4

a) 3^{-3} b) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-2}$ c) $\dfrac{1}{10^{-2}}$ d) $\left(\dfrac{11}{5}\right)^{-2}$

e) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}$ f) 2^{-5} g) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$ h) $\dfrac{2^{-3}}{5^{-2}}$

i) 10^{-3} j) $\dfrac{1}{4x^{-1}}$ k) 5^{-3} l) $\dfrac{2a}{5b^{-2}}$

Aufgabe 5

a) $4^{-2} \cdot 4^3 =$ b) $3^{-5} \cdot 5^{-5} =$ c) $8^{-3} \cdot 8^4 =$

d) $\dfrac{2^{-1}}{2^{-3}} =$ e) $\dfrac{9^2}{9^{-2}} =$ f) $\dfrac{30^{-2}}{40^{-2}} =$

g) $6^{-2} \cdot 6^{-3} =$ h) $6^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{12}\right)^{-2} =$ i) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3} : \left(\dfrac{2}{15}\right)^{-3} =$

j) $(-1)^{-5}$ k) $(-2)^{-4} \cdot (-2)^8$ l) $\dfrac{-5^6}{(-5)^{-3}}$

Aufgabe 6

a) $\left(3^5\right)^3$ b) $\left(2^{-5}\right)^{-2}$ c) $\left(8^{-3}\right)^2$ d) $\left(5^6\right)^{-1}$

e) $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ f) $\left((-4)^{-2}\right)^3$ g) $-\left(-2^3\right)^{-5}$ h) $-\left(-3^{-4}\right)^{-2}$

Aufgabe 7

a) $4^5 \cdot 2^{-10}$ b) $8^{-2} \cdot 16^3$ c) $81^{-1} \cdot 27^2$

d) $\dfrac{64^2}{32^3}$ e) $\dfrac{27^{-4}}{9^{-7}}$ f) $\dfrac{7^3}{49^{-2}}$

g) $\dfrac{10^3}{5^2}$ h) $\dfrac{12^6}{54^3}$ i) $\dfrac{8^5 \cdot 4^{-3}}{16^2 \cdot 32^{-1}}$

Aufgabe 8

a) $\left(54a^2\right)^3 \cdot \left(40a^{-4}\right)^2$ b) $\left(16x^3\right)^{-2} \cdot \left(24^2x^2\right)^4$ c) $\left(a^2b^{-3}c^4\right)^{-3} \cdot \left(a^{-1}b^4 \cdot c^{-2}\right)^3$

d) $\dfrac{\left(12x^3\right)^3}{\left(45x^{-2}\right)^3}$ e) $\dfrac{\left(4a^2\right)^3\left(8ab^2\right)^5}{\left(16a^3b^{-2}\right)^4}$ f) $\left(98x^3\right)^2 \cdot \dfrac{4x^2}{\left(49x^{-2}\right)^2}$

Trainingsaufgaben zu Wurzeln

Aufgabe 9

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$ b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$ c) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$

d) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ e) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ g) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 10

a) $\sqrt{6}^{4}$ b) $\sqrt{8}^{6}$ c) $\sqrt{3^5}^{2}$

d) $\sqrt{3}^{7}$ e) $\sqrt{18}^{5}$ f) $\sqrt{10}^{-2}$

g) $\sqrt{8}^{-4}$ h) $\sqrt{27}^{-6}$ i) $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^{6}$

Aufgabe 11

a) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt[3]{7}}$ e) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ f) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{8}}$

Aufgabe 12

Schreibe als Wurzeln, so dass dann nur noch positive Exponenten stehen bleiben:

a) $2^{\frac{5}{2}}$ b) $5^{\frac{9}{4}}$ c) $4^{\frac{13}{4}}$

d) $3^{-\frac{2}{3}}$ e) $8^{-\frac{5}{3}}$ f) $\dfrac{1}{9^{-\frac{3}{4}}}$

Aufgabe 13

Vereinfache irgendwie ;-))

a) $\sqrt{48}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{28}}$ c) $\left(4a^2\cdot\sqrt{b}\right)^4$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{60}}$ e) $\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}$ f) $\dfrac{\sqrt{32}^{-5}}{\sqrt{128}^{-3}}$

g) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{-\frac{2}{3}}$ h) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ i) $\dfrac{a}{\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a}}}}$

8. LÖSUNGEN der Trainingsaufgaben

Diese stehen im Originaltext auf der Mathe-CD.

Lösung des Eingangstests

Thema 1: Multiplikation von Potenzen mit positiven Exponenten

a) $4^5 \cdot 4^3 = 4^{5+3} = 4^8$ (Potenzen mit gleicher Basis) (1 P)

b) $5^6 \cdot 3^6 = (5 \cdot 3)^6 = 15^6$ (Potenzen mit gleichem Exponenten) (1 P)

c) $4^2 \cdot 3^3 = 16 \cdot 27 = ...$ (Basis und Exponenten verschieden, keine Vereinfachung mittels Potenzen möglich) (1 P)

d) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81\,x^4$ Die 3 muss auch potenziert werden! (1 P)

e) Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis lässt. (1 P)
Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten lässt. (1 P)

Thema 2: Division von Potenzen mit positiven Exponenten

a) $\frac{24^3}{8^3} = \left(\frac{24}{8}\right)^3 = 3^3 \; .... [= 27]$ (Potenzen mit gleichem Exponenten) (1 P)

b) $\frac{6^9}{6^5} = 6^{9-5} = 6^4$ (Potenzen mit gleicher Basis) (1 P)

c) $\frac{5^2}{3^4} = \frac{25}{81}$ (Basis und Exponenten verschieden, keine Vereinfachung mittels Potenzen möglich) (1 P)

d) $\left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{5^2} = \frac{a^2}{25}$ Die 5 muss auch potenziert werden. (1 P)

e) Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis lässt. (1 P)
Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten lässt. (1 P)

Thema 3: Negative Exponenten

Schreibe die folgenden Ergebnisse so um, dass keine negativen Exponenten mehr da stehen und berechne den Zahlenwert. Verwende wenn nötig Brüche aber keine Dezimalzahlen.

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$ ..... $\left[=\frac{1}{49}\right]$ (1 P)

b) $\frac{1}{5^{-3}} = 5^3$ ..... $[=125]$ ausführlicher: $\frac{1}{5^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = 5^3$ (1 P)

c) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-3} = \frac{1^{-3}}{\left(3^{-2}\right)^{-3}} = \frac{1}{3^{(-2)\cdot(-3)}} = \frac{1}{3^6}$ oder so: $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-3} = \left(3^2\right)^{-3} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$ (1 P)

d) $\left(3^{-2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-1} = 3^2$ ....$[=9]$ oder so: $\left(3^{-2}\right)^{-1} = 3^{(-2)\cdot(-1)} = 3^2 = 9$ (1 P)

Thema 4: Potenzieren von Potenzen

a) $\left(3^2\right)^5 = 3^{2\cdot 5} = 3^{10}$ (1 P)

b) $\left(8^{-4}\right)^{-2} = 8^{(-4)\cdot(-2)} = 8^{16}$ Mit $8 = 2^3$ folgt: $= \left(2^3\right)^{15} = 2^{3\cdot 15} = 2^{45}$ (2 P)

c) $\left(\frac{4^{-3}}{8^2}\right)^{-1} = \frac{4^3}{8^{-2}} = 4^3 \cdot 8^2 = \left(2^2\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^2 = 2^6 \cdot 2^6 = 2^{6+6} = 2^{12}$ (3 P)

d) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3} = \left(3^{-2}\right)^{-3} = 3^{(-2)\cdot(-3)} = 3^6$ (2 P)

Thema 5: Wurzeln als Potenzen

Schreibe die Wurzeln in Potenzen um:

a) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ (1 P)

b) $\sqrt{8}^3 = \sqrt{2^3}^3 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{9}{2}}$ (1 P)

Sollte man vereinfachen, könnte man so rechnen:
$\sqrt{8}^3 = \left(\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{8} = 8\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 8\cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{-\frac{1}{2}}$ (1 P)

d) $\sqrt[3]{a^2} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{3}} = a^{2\cdot\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (1 P)

Schreibe die Potenzen in Wurzeln um:

e) $3^{\frac{5}{2}} = \left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^5}$ oder $3^{\frac{5}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5 = \sqrt{3}^5$ (2 P)

f) $16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$ (2 P)

g) $6^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(6^3\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6^3}} = \frac{1}{\sqrt{6^2}\cdot 6} = \frac{1}{6\sqrt{6}}$ oder:

$6^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{6}^3} = \frac{1}{\sqrt{6}^2\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{6\cdot\sqrt{6}}$ oder so:

$6^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6^1\cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6\cdot\sqrt{6}}$ (3 P)

h) $4^{\frac{2}{3}} = \left(4^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$ ....$\left[=\sqrt[3]{8\cdot 2} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\cdot\sqrt[3]{2}\right]$ (2 P)

besser: $4^{\frac{2}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2^1\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\cdot\sqrt[3]{2}$

(+ 1 P) für das Ergebnis $2\cdot\sqrt[3]{2}$.

Thema 6: Rechnen mit Wurzeln und Vereinfachen der Wurzeln

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=3\sqrt{5}$ (2 P)

b) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{32}{8}}=\sqrt{4}=2$ (1 P)

c) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{2}=2\cdot\sqrt{2}$ (2 P)

d) $\sqrt{\sqrt{9}}=\sqrt{3}$ (1 P)

e) $\sqrt{8}^{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^{3}}^{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}^{9}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}^{10}=2^{5}=32$ (2 P)

Oder so:

$$\sqrt{8}^{3}\cdot\sqrt{2}=8^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=\left(2^{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{10}{2}}=2^{5}=32$$

f) $\dfrac{\sqrt{24x^{3}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{24x^{3}}{2}}=\sqrt{12x^{3}}=\sqrt{4\cdot 3\cdot x^{2}\cdot x}=2x\cdot\sqrt{3x}$ (3 P)

(hier muss man $x\geq 0$ voraussetzen).

Auswertung:

Für die Potenzaufgaben ohne Wurzeln kann man 24 Punkte vergeben, für die Wurzelaufgaben 24 Punkte, zusammen 48 Punkt.

Notentabelle:

Nur für die Potenzen: oder nur für die Wurzelaufgaben könnte man so benoten:

P	24, 23	22, 21	20, 19	18, 17	16,15	14, 13	12, 11	10, 9	8, 7	6, 5	4 bis 0
N	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

Für den ganzen Test:

P	48-46	45-42	41-38	37-34	33-30	29-26	25-22	21-18	17-14	13-10	9 bis 0
N	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

Hinweis:

Wenn man die im laufenden Text gezeigten Aufgaben mit den Testaufgaben vergleicht, entdeckt man, dass dieser Test wirklich nur „einfache“ Aufgaben enthält. Wer also hier nur befriedigend oder schlechter hat, der sollte gründlich üben.

Noch viel mehr Übungsaufgaben findet man in den auf der Vorderseite angegebenen Texten!