ALGEBRA

Potenzen und Wurzeln

Kurzfassung zur Wiederholung
mit Wissenstest zum Potenzrechnen

für alle, die es brauchen …

Datei Nr. 12311

Stand 7. Januar 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

VORWORT

Dieses Heft dient der Wiederholung des Potenzrechnens und Teilen des Wurzelrechnens. Daher gibt es auch immer nur ein paar Beispiele zum jeweiligen Thema.

Gut zur Prüfungsvorbereitung.

Wer mehr üben sollte, kann dies mit den anschließend genannten Texten tun, die hunderte von Aufgaben mir Lösungen enthalten.

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201	Quadratwurzeln
12202	Reelle Zahlen
12203	Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht
12205	Lernblatt: Wurzeln mit Variablen
12210	n-te Wurzeln
12211	Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300	Potenzen mit natürlichem Exponenten.
12301	Potenzen mit negativen Exponenten
12302	Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)
12305	Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht
12306	Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht
12310	Potenzrechnen (alter Text, alles in einem) – n-te Wurzeln, viele Aufgaben.
12311	Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur) (dieser Text)
12321	Lernprogramm
12333	Übung 4
12500	Gruße Aufgabensammlung
12510	Sammlung von Tests (Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Inhalt

Test zur Wissenskontrolle

Wenn du wiederholen und vergessene Kenntnisse auffrischen möchtest, kannst du hier zuerst testen, was du noch weißt. Beantworte bitte unbedingt auch die Fragen zur Theorie, denn ohne Hintergrundwissen kann man nicht rechnen. Die Lösungen des Tests stehen am Ende dieses Heftes. Drucke diese Seiten aus und trage die Ergebnisse ein!

Berechne immer nur das Ergebnis als Potenz. Der Zahlenwert ist jetzt nicht so wichtig.

Thema 1: Multiplikation von Potenzen mit positiven Exponenten

a) $4^5 \cdot 4^3 =$ b) $5^6 \cdot 3^6 =$ c) $4^2 \cdot 3^3 =$ d) $(3x)^4$

e) Formuliere die beiden Regeln zur Multiplikation von Potenzen

Thema 2: Division von Potenzen mit positiven Exponenten

a) $\dfrac{24^3}{8^3} =$ b) $\dfrac{6^9}{6^5} =$ c) $\dfrac{5^2}{3^4} =$ d) $\left(\dfrac{a}{5}\right)^2$

e) Formuliere die beiden Regeln zur Division von Potenzen

Thema 3: Negative Exponenten

Schreibe die folgenden Ergebnisse so um, dass keine negativen Exponenten mehr da stehen und berechne den Zahlenwert. Verwende wenn nötig Brüche aber keine Dezimalzahlen.

a) $7^{-2} =$ b) $\dfrac{1}{5^{-3}} =$ c) $\left(\dfrac{1}{3^{-2}}\right)^{-3}$ d) $\left(3^{-2}\right)^{-1}$

Thema 4: Potenzieren von Potenzen

a) $\left(3^2\right)^5 =$ b) $\left(8^{-4}\right)^{-2}$ c) $\left(\dfrac{4^{-3}}{8^2}\right)^{-1}$ d) $\left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{-3}$

e) Formuliere die Regel zum Potenzieren von Potenzen

Thema 5: Wurzeln als Potenzen

Schreibe die Wurzeln in Potenzen um:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{8}^3$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

Schreibe die Potenzen in Wurzeln um:

e) $3^{\frac{5}{2}}$ f) $16^{-\frac{1}{2}}$ g) $6^{-\frac{3}{2}}$ h) $4^{\frac{2}{3}}$

Thema 6: Rechnen mit Wurzeln und Vereinfachen der Wurzeln

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$ b) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\sqrt{9}}$ e) $\sqrt{8}^3 \cdot \sqrt{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{24x^3}}{\sqrt{2}}$

1. Natürliche Exponenten

Potenzen hat man eingeführt, um damit Rechnungen vereinfachen zu können.

Es handelt sich genauer gesagt um Produkte aus lauter gleichen Faktoren.

Definition:

Ist n eine natürliche Zahl (1, 2, 3, usw.), dann bedeutet $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,\text{Faktoren}}$

Beispiele:

$2^6 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 64$, $\quad 3^2 = 3\cdot3 = 9 \quad$ $12^3 = 12\cdot12\cdot12 = 1728$

$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{243} \quad$ $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

$2^5\cdot3^4 = (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3) = 32\cdot81 = 2592$

(Die Klammern hätte man hier nicht benötigt).

Weil man viele Potenzen einfach <u>wissen</u> muss, damit man schnell rechnen kann, sollte man diese auswendig lernen:

Zweierpotenzen:	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$
Dreierpotenzen:	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
Viererpotenzen:	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
Fünferpotenzen:	$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	

Quadratzahlen

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$
$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$	$16^2 = 256$
$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$

Rechnen mit natürlichen Exponenten

Schüler, die nicht Bescheid wissen, machen oft schlimme Rechenversuche. Man kann hier nicht einfach irgendetwas „rechnen“, denn es gibt strenge Regeln dafür. Diese wollen wir nun wiederholen.

1.1 Multiplikation von Potenzen mit positiven Exponenten

Erkennst Du den Unterschied zwischen diesen drei Aufgaben?

a) $3^5 \cdot 3^2$, b) $3^5 \cdot 2^5$ c) $3^5 \cdot 2^4$

Hier die Antwort:

a) Hier werden zwei Potenzen mit gleicher Basis multipliziert.
b) Hier werden zwei Potenzen mit gleichem Exponenten multipliziert.
c) Hier werden zwei Potenzen multipliziert, die nichts gemeinsam haben.

Für die Rechnungen in a) und b) gibt es Rechenmethoden, für c) aber nicht.
(Mit Rechenmethoden meine ich die direkte Berechnung über Potenzregeln, nicht mit einem Taschenrechner …)

Lösung:

a) $\boxed{3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7}$

Man sollte dies erklären können. Dazu schreibt man die Potenzen ausführlich auf:

3^5 ist $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ und $3^2 = 3 \cdot 3$. Also folgt für das Produkt:

$3^5 \cdot 3^2 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{} = 3^7$.

Die Potenz 3^5 ergibt 5 Faktoren, dazu die zwei von 3^2, macht zusammen 7 Faktoren, was man abgekürzt 3^7 schreibt.

Diese Regel bitte auswendig lernen und aufsagen können:

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis lässt.

Regel 1a

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Dazu noch ein paar Beispiele in Kurzform:

$7^{12} \cdot 7^8 = 7^{20}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^6$ und $3^{4x} \cdot 3^2 = 3^{4x+2}$

$\sqrt{3}^3 \cdot \sqrt{3}^9 = \sqrt{3}^{12}$, $(5x-3)^2 \cdot (5x-3) = (5x-3)^3$ und $\left(4x^2\right)^3 \cdot \left(4x^2\right)^4 = \left(4x^2\right)^7$

b) $\boxed{3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5}$

Man sollte diese Berechnung erklären können. Dazu schreibt man die Potenzen ausführlich auf:

$$3^5 \cdot 2^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{} = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = (3 \cdot 2)^5 = 6^5$$

Da man in einem Produkt die Faktoren vertauschen darf, kann man immer eine 3 und eine 2 zu einem Produkt 6 zusammenfassen.

Diese Regel bitte auswendig lernen und aufsagen können:

Zwei Potenzen <u>mit gleichem Exponenten</u> werden multipliziert, indem man <u>die Basen multipliziert</u> und den <u>Exponenten lässt</u>.

Regel 1b

$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

Dazu noch ein paar Beispiele in Kurzform:

$7^{12} \cdot 5^{12} = (7 \cdot 5)^{12} = 35^{12}$, $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$,

$3^{4x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{4x} = \left(3 \cdot \frac{1}{6}\right)^{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ $\quad \left(\frac{4}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^3 = \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{25}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

Hier wurde am Ende gekürzt!

$\boxed{\sqrt{2}^3 \cdot \sqrt{8}^3 = \sqrt{2 \cdot 8}^3 = \sqrt{16}^3} = 4^3 = 64$ $\quad (5x-3)^2 \cdot x^2 = \left[(5x-3) \cdot x\right]^2 = \left(5x^2 - 3x\right)^2$

c) Unwissende Schüler versuchen oftmals, die Aufgabe $3^5 \cdot 2^4$ durch irgendeine Methode zu berechnen. Weil die Basen 3 und 2 verschieden sind, kann man die Regel 1a nicht anwenden, weil die Exponenten 5 und 4 verschieden sind, passt auch die Regel 1b nicht.
Das einzige was geht, ist die direkte Berechnung der beiden Potenzen:

$3^5 = 243$ und $2^4 = 16$.

Damit folgt: $3^5 \cdot 2^4 = 243 \cdot 16 = 3888$.

Aber dies hat mit Potenzrechnen nichts mehr zu tun.

Man kann die Regeln 1a und 1b auch auf mehr als 2 Faktoren anwenden:

Potenzen mit gleicher Basis: $4^3 \cdot 4^5 \cdot 4^2 = 4^{3+5+2} = 4^{10}$

Potenzen mit gleichem Exponenten: $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 5 \cdot 3)^4 = 30^4$

Trainingsaufgaben bunt gemischt:

Aufgabe 1

a)	$5^3 \cdot 5^{11}$	b)	$2^5 \cdot 8^5$	c)	$4^3 \cdot 4^{11} \cdot 4^2$	d)	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
e)	$a^3 \cdot b^3$	f)	$16^7 \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^7$	g)	$12^4 \cdot 12^3 \cdot 12^5$	h)	$2^3 \cdot 3^2$
i)	$7^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$			j)	$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \cdot 5^3$		

1.2 Division von Potenzen

Erkennst Du den Unterschied zwischen diesen drei Aufgaben?

a) $\frac{3^6}{3^2}$, b) $\frac{12^5}{4^5}$ c) $\frac{3^5}{2^3}$

Hier die Antwort:

a) Hier werden zwei Potenzen mit gleicher Basis dividiert.

b) Hier werden zwei Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert.

c) Hier werden zwei Potenzen dividiert, die nichts gemeinsam haben.

Für die Rechnungen in a) und b) gibt es Rechenmethoden, für c) aber nicht.
(Mit Rechenmethoden meine ich die direkte Berechnung über Potenzregeln, nicht mit einem Taschenrechner …)

Lösung:

a) $\frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 3^{6-2} = 3^4$ (= 81)

Man kann zwei gleiche Faktoren herauskürzen, damit nimmt man vom Exponenten 6 zwei weg, dies ist die gezeigte Subtraktion.

Diese Regel bitte auswendig lernen und aufsagen können:

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis lässt.

Regel 2a

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Dazu noch zwei Beispiele in Kurzform:

$$\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-3} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = \tfrac{1}{2}$$

b) $\frac{12^5}{4^5} = \frac{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4}\cdot\frac{12}{4} = \left(\frac{12}{4}\right)^5 = 3^5 \quad (=243)$

Da man wegen dem gleichen Exponenten im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren hat, kann man gleich viele einzelne Brüche machen und diese wieder als Potenz schreiben!

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten lässt.

Regel 2b

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Dazu noch zwei Beispiele in Kurzform:

$$\frac{12^6}{15^6} = \left(\frac{12}{15}\right)^6 = \left(\frac{4}{5}\right)^6 \qquad \frac{4^3}{20^3} = \left(\frac{4}{20}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \quad \left(=\frac{1}{125}\right)$$

c) Unwissende Schüler versuchen oftmals, die Aufgabe $\frac{3^5}{2^3}$ durch irgendeine Methode zu berechnen. Weil die Basen 3 und 2 verschieden sind, kann man die Regel 2a nicht anwenden, weil die Exponenten 5 und 3 verschieden sind, passt auch die Regel 2b nicht.

Das einzige was geht, ist die direkte Berechnung der beiden Potenzen: $3^5 = 243$ und $2^3 = 8$.

Damit folgt: $\frac{3^5}{2^3} = \frac{243}{8}$. Aber dies hat mit Potenzrechnen nichts mehr zu tun.

Trainingsaufgabe 2

a) $\frac{5^{11}}{5^4}$ b) $\frac{2^5}{8^5}$ c) $\frac{15^3}{12^4}$ d) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

e) $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^6}$ f) $\frac{4^2 \cdot 4^9}{4^3 \cdot 4^3}$ g) $\frac{6^3}{2^{10}} \cdot 4^3$ h) $\frac{15^5}{8^5} \cdot \frac{4^5}{5^5}$

1.3 Umkehrung der Regeln (Extrem wichtig!)
Das vergessen viele Lehrer – weil es für sie selbstverständlich ist…

a) Die **Regel 1a** lautet: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleicher Basis multipliziert.

Man kann diese Regel umkehren in: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Dann sagt sie uns, wie man eine Potenz in ein Produkt zweier Potenzen zerlegen kann:

$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$ oder $2^{4+\frac{1}{2}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ (was $2^{\frac{1}{2}}$ bedeutet wird weiter hinten besprochen).

b) Die **Regel 1b** lautet: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleichem Exponenten multipliziert.

Man kann diese Regel umkehren in: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Dann sagt sie uns, wie man eine Potenz eines Produkts in zwei Potenzen zerlegen kann:

$(4a)^2 = 4^2 \cdot a^2 = 16\,a^2$, $(3x)^3 = 3^3 \cdot x^3 = 27\,x^3$ oder $(-2ab)^4 = (-2)^4 \cdot a^4 \cdot b^4 = 16\,a^4\,b^4$

Das wird sehr oft gebraucht! Schüler machen oft diesen Fehler und rechnen: $(4a)^2 = 4a^2$.

Dann haben sie vergessen, dass man auch 4 quadrieren muss.

c) Die **Regel 2a** lautet: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleicher Basis dividiert.

Man kann diese Regel umkehren in: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Dann sagt sie uns, wie man eine Potenz in einen Bruch aus zwei Potenzen zerlegen kann:

$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8}$ oder $2^{4-\frac{1}{2}} = \frac{2^4}{2^{\frac{1}{2}}}$ (was $2^{\frac{1}{2}}$ bedeutet wird weiter hinten besprochen).

d) Die **Regel 2b** lautet: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Sie sagt uns, wie man Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert.

Man kann diese Regel umkehren in: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Dann sagt sie uns, wie die Potenz eines Produkts in zwei Potenzen zerlegen kann:

$\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4^2} = \frac{x^2}{16}$, oder $\left(\frac{2x}{3}\right)^3 = \frac{(2x)^3}{3^3} = \frac{2^3 \cdot x^3}{3^3} = \frac{8x^3}{27}$

Das wird sehr oft gebraucht! Schüler machen oft diesen Fehler und rechnen: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^3}{3}$.

Dann haben sie vergessen, dass man auch den Nenner quadrieren muss.

Trainingsaufgabe 3

Zerlege in Potenzen a) 3^{3+5} b) 2^{x+6} c) $(5x)^3$

d) $\left(\frac{4}{x}\right)^3$ e) 5^{n-2} f) $(9ab)^2$ g) $\left(\frac{5a}{7x}\right)^3$

2. Ganzzahlige Potenzen

2.1 WISSEN durch LERNEN der Grundlagen:

a) Zu Beginn des Potenzrechnens definiert man Potenzen nur für natürliche Hochzahlen.
Demnach soll 5^4 bedeuten, dass man 4-mal die Basis 5 mit sich selbst multiplizieren soll.
Das sieht so aus: $5^{\boxed{4}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\boxed{4}\text{ Faktoren}}$

b) Die Zahl 0 im Exponenten kann nach dieser Definition zunächst keine Bedeutung haben, denn was sollen „0 Faktoren" bedeuten? Dann wird ja für $5^{\boxed{0}}$ gar keine Zahl aufgeschrieben!

Mit der **Divisionsregel 2a** $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ kann man jedoch die Definition auf a^0 erweitern:

Die Aufgabe $\frac{5^7}{5^7}$ führt durch Kürzen (durch 5^7) auf den Bruch $\frac{5^7}{5^7} = \frac{1}{1} = 1$

Andererseits führt die Divisionsregel auf $\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$

Hier wird dieselbe Aufgabe auf 2 Weisen gelöst. Man legt daher fest: $\boxed{5^0 = 1}$

Die kann man mit beliebigen Potenzen nachmachen:

Durch Kürzen erhält man $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Durch die Divisionsregel kommt man auf $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Daher legt man fest: Für jede Zahl $a \neq 0$ soll gelten: $\boxed{a^0 = 1}$

c) **Auf ähnliche Weise legt man fest, was negative Exponenten bedeuten sollen:**

(1) Die Aufgabe $\frac{5^3}{5^7}$ ergibt durch Kürzen: $\frac{5^3}{5^7} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^4}$

und nach der Potenzregel entsteht : $\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{\boxed{-4}}$

(was zunächst noch sinnlos ist).

Also legt man fest, dass $\boxed{5^{-4} = \frac{1}{5^4}}$ sein soll!

(2) Die Aufgabe $\frac{a^5}{a^6}$ ergibt durch Kürzen: $\frac{a^5}{a^6} = \frac{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \cdot a} = \frac{1}{a}$

und nach der Potenzregel entsteht: $\frac{a^5}{a^6} = a^{5-6} = a^{\boxed{-1}}$

Also legt man fest, dass $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$ sein soll!

Beispiele dazu: $4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ $\quad 3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$ $\quad 12^{-1}=\frac{1}{12^1}=\frac{1}{12}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{25}}=\frac{25}{4} \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{1}{\frac{64}{27}}=\frac{27}{64}$$

Daraus erkenn man:

Wenn man durch einen Bruch dividieren soll, wird mit seinem Kehrwert multipliziert!

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\underbrace{\left(\frac{3}{1}\right)^1}_{\text{weglassen!}}=3 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

MERKE: (Regel 3)

Die negative Hochzahl -1 erzeugt den Kehrwert: $\boxed{a^{-1}=\frac{1}{a}}$ $\quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}}$

Eine negative Hochzahl –n bewirkt, dass die Potenz mit positiver Hochzahl im Nenner steht $\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$ $\quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Folgerung: $\boxed{\frac{1}{a^{-1}}=a}$ $\quad \boxed{\frac{1}{a^{-n}}=a^n}$

Also gilt auch $\frac{1}{3^{-2}}=3^2=9$, und $\frac{1}{(ab)^{-1}}=(ab)^1=ab$ aber $\boxed{\frac{1}{3x^{-2}}=\frac{1}{3}\cdot x^2}$!!!

Die 3 hat im Nenner keinen Exponenten, das „hoch" 2 gilt nur für x, weshalb die 3 im Nenner beibt,

Trainingsaufgaben zu negativen Exponenten

Aufgabe 4: **Berechne wie gesehen:**

a) 3^{-3} b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ c) $\frac{1}{10^{-2}}$ d) $\left(\frac{11}{5}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$ f) 2^{-5} g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ h) $\frac{2^{-3}}{5^{-2}}$

i) 10^{-3} j) $\frac{1}{4x^{-1}}$ k) 5^{-3} l) $\frac{2a}{5b^{-2}}$

2.2 Multiplizieren mit negativen Exponenten

Beispiele:

a) $4^{-3}\cdot 4^{-2}=4^{(-3)+(-2)}=4^{-5}=\frac{1}{4^5}$

b) $5^{-3}\cdot 5^{4}=5^{-3+4}=5^{1}=5$

Oder so : $5^{-3}\cdot 5^{4}=5^{-3+4}=5^{1}=5$

c) $2^{3}\cdot 2^{-4}=2^{3+(-4)}=2^{3-4}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

d) $12^{-4}\cdot 12^{4}=12^{-1+4}=12^{0}=1$

Oder so : $12^{-4}\cdot 12^{4}=\frac{1}{12^4}\cdot 12^4=\frac{\cancel{12^4}}{\cancel{12^4}}=1$

Bei gleicher Basis werden die Exponenten addiert. (Regel 1a)

e) $3^{-1}\cdot 2^{-1}=(3\cdot 2)^{-1}=6^{-1}=\frac{1}{6}$

Oder so : $3^{-1}\cdot 2^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

f) $6^{-5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}=\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)^{-5}=2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

Bei gleichem Exponenten bleibt dieser erhalten und die Basen werden multipliziert. (Regel 1b)

2.3 Dividieren mit negativen Exponenten

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{3}}\right)^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

b) $\frac{4^5}{4^{-3}}=4^{5-(-3)}=4^{5+3}=4^{8}$

c) $\frac{2^{-3}}{2^{4}}=2^{-3-4}=2^{-7}=\frac{1}{2^7}\;(=\frac{1}{128})$

d) $\frac{5^{-4}}{5^{-6}}=5^{-4-(-6)}=5^{-4+6}=5^{2}=25$

Bei gleicher Basis werden die Exponenten subtrahiert. (Regel 2a)

e) $\frac{8^{-3}}{4^{-3}}=\left(\frac{8}{4}\right)^{-3}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

f) $\frac{8^{-2}}{24^{-2}}=\left(\frac{8}{24}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^{2}=9$

g) $\frac{14^{-1}}{21^{-1}}=\left(\frac{14}{21}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$

Bei gleichem Exponenten bleibt dieser erhalten und die Basen werden dividiert. (Regel 2b)

Trainingsaufgaben zu negativen Exponenten

Aufgabe 5:

a) $4^{-2} \cdot 4^{3} =$ b) $3^{-5} \cdot 5^{-5} =$ c) $8^{-3} \cdot 8^{4} =$

d) $\frac{2^{-1}}{2^{-3}} =$ e) $\frac{9^{2}}{9^{-2}} =$ f) $\frac{30^{-2}}{40^{-2}} =$

g) $6^{-2} \cdot 6^{-3} =$ h) $6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{-2} =$ i) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{15}\right)^{-3} =$

j) $(-1)^{-5}$ k) $(-2)^{-4} \cdot (-2)^{8}$ l) $\frac{-5^{6}}{(-5)^{-3}}$

Du kannst dir eine wichtige Hilfe selbst geben:

Suche zu jeder Aufgabe das Merkmal und sage dann die Regel im Wortlaut auf, dann rechne:

Regel 1a: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, …

Regel 1b: Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, …

Regel 2a: Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, …

Regel 2b: Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, …

Das sind die Verkehrsregeln im Potenzrechnen …..

Und vor dem Können kommt das Wissen ;-))

3. Potenzieren von Potenzen

a) 8^4 heißt doch: $8^4 = \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}_{\text{4 Faktoren}}$.

Entsprechendes gilt auch für $\left(2^3\right)^4$: $\left(2^3\right)^4 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}_{\text{4 Faktoren}} = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$

Wir haben jetzt 4 Faktoren, also wird im Exponenten 4-mal die Zahl 3 addiert, das ergibt 12.

In Kurzform haben wir also jetzt: $\left(2^3\right)^4 = 2^{\boxed{3 \cdot 4}} = 2^{12}$

b) $\left(3^{-4}\right)^2 = 3^{-4} \cdot 3^{-4} = 3^{-4+(-4)} = 3^{-8}$ kurz: $\left(3^{-4}\right)^2 = 3^{\boxed{-4 \cdot 2}}$

c) $\left(5^2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(5^2\right)^3} = \dfrac{1}{5^6}$ kurz: $\left(5^2\right)^{-3} = 5^{\boxed{2 \cdot (-3)}} = 5^{-6}$

d) $\left(2^{-4}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(2^{-4}\right)^3} = \dfrac{1}{2^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-4}} = \dfrac{1}{2^{-12}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2^{12}}} = 2^{12}$ $\left(2^{-4}\right)^{-3} = 2^{\boxed{(-4) \cdot (-3)}} = 2^{12}$

Diese Beispiele zeigen, wie man die Potenz einer Potenz kurz berechnet.

Es gilt diese Regel:

MERKE: $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$ **Regel 4**

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert!

Trainingsaufgaben:

Aufgabe 6

a) $\left(3^5\right)^3$ b) $\left(2^{-5}\right)^{-2}$ c) $\left(8^{-3}\right)^2$ d) $\left(5^6\right)^{-1}$

e) $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ f) $\left(\left(-4\right)^{-2}\right)^3$ g) $-\left(-2^3\right)^{-5}$ h) $-\left(-3^{-4}\right)^{-2}$

4. Zahlen zum Potenzieren in Primfaktoren zerlegen

a) Die Aufgabe $4^3 \cdot 2^5$ zeigt weder eine gemeinsame Basis noch gemeinsame Exponenten. Wenn man aber weiß, dass die Basis 4 selbst eine Potenz von 2 ist, dann kann man 4 durch 2^2 ersetzen. Die Rechnung lässt sich dann durchführen:

$$\boxed{4^3 \cdot 2^5 = \left(2^2\right)^3 \cdot 2^5 = 2^6 \cdot 2^5 = 2^{6+1} = 2^{11}}$$

Ähnlich geht man den folgenden Aufgaben vor:

Wenn man zwei Potenzen auf eine gemeinsame Basis umrechnen kann, dann ist ihr Produkt oder ihr Quotient auch eine Potenz mit dieser Basis!

b) $9^3 \cdot 27^{-2} = \left(3^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^{-2} = 3^6 \cdot 3^{-6} = 3^{6+(-6)} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$

c) $\frac{1}{16} \cdot 8^2 = \frac{1}{2^4} \cdot 8^2 = 2^{-4} \cdot \left(2^3\right)^2 = 2^{-4} \cdot 2^6 = 2^{-4+6} = 2^2 = 4$

d) $\frac{25^5}{125^3} = \frac{\left(5^2\right)^5}{\left(5^3\right)^3} = \frac{5^{10}}{5^9} = 5^{10-9} = 5^1 = 5$

e) $\frac{32^{-3}}{8^5} = \frac{\left(2^5\right)^{-3}}{\left(2^3\right)^5} = \frac{2^{-15}}{2^{15}} = 2^{-15-15} = 2^{-30}$

Bei manchen Aufgaben muss man sogar in mehrere Primfaktoren zerlegen:

f) $\frac{6^3}{2^4} = \frac{(2\cdot 3)^3}{2^4} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{2^4} = 2^{3-4} \cdot 3^3 = 2^{-1} \cdot 3^3 = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$

SCHWER

Die erreicht man auch durch Kürzen durch 2^3: $\frac{6^3}{2^4} = \frac{(2\cdot 3)^3}{2^4} = \frac{\cancel{2^3} \cdot 3^3}{\cancel{2^4}} = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$

g) $\frac{54^2}{3^6} = \frac{(27\cdot 2)^2}{3^6} = \frac{27^2 \cdot 2^2}{3^6} = \frac{\left(3^3\right)^2 \cdot 2^2}{3^6} = \frac{\cancel{3^6} \cdot 2^2}{\cancel{3^6}} = 2^2 = 4$

Hier sind viele Schritte nötig. Vor allem muss man die Regel 1b rückwärts anwenden, also die Potenz $(27\cdot 2)^2$ in zwei Potenzen zerlegen: $= 27^2 \cdot 2^2$. Dann muss man wissen, dass $27 = 3^3$ ist usw.

Trainingsaufgabe 7

a) $4^5 \cdot 2^{-10}$ b) $8^{-2} \cdot 16^3$ c) $81^{-1} \cdot 27^2$

d) $\frac{64^2}{32^3}$ e) $\frac{27^{-4}}{9^{-7}}$ f) $\frac{7^3}{49^{-2}}$

g) $\frac{10^3}{5^2}$ h) $\frac{12^6}{54^3}$ i) $\frac{8^5 \cdot 4^{-3}}{16^2 \cdot 32^{-1}}$

5. Zusammengesetzte Aufgaben

Beispiele:

(a) $\left(6x^2\right)^{-3} = 6^{-3} \cdot \left(x^2\right)^{-3} = 6^{-3} \cdot x^{-6} = \frac{1}{6^3} \cdot \frac{1}{x^{+6}}$ oder $= \frac{1}{216\,x^6}$

Zur Erinnerung: Hier wird die Multiplikationsregel in umgekehrter Form angewendet (siehe 1.3)!

(b) $\left(4a^3\right)^2 \cdot \left(12\,a^{-1}\right)^3 =$

Achtung:

> Weil 4 selbst eine Zweierpotenz ist und weil in 12 auch die 2 enthalten ist, muss man 4 und 12 zuerst in Primfaktoren zerlegen:
> $4 = 2^2$ und $12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2$. Dann ist die Rechnung so lösbar.

$$\left(4a^3\right)^2 \cdot \left(12\,a^{-1}\right)^3 = \left(2^2a^3\right)^2 \cdot \left(3 \cdot 2^2a^{-1}\right)^3$$

2. Schritt: Die Klammern auflösen nach der Regel $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, die man nun in umgekehrter Richtung anwendet, also so: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$!

Das ergibt $\left(2^2a^3\right)^2 = 2^4 \cdot a^6$

und $\left(3 \cdot 2^2a^{-1}\right)^3 = 3^3 \cdot 2^6 \cdot a^{-3}$.

Zusammengesetzt: $= 2^4 \cdot a^6 \cdot 3^3 \cdot 2^6 \cdot a^{-3}$

3. Schritt: Nun fasst man die Faktoren mit gleicher Basis zusammen:

$$= 2^{4+6} \cdot 3^3 \cdot a^{6-3} = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot a^3 = 1024 \cdot 27 \cdot a^3 = \ldots$$

Mehr kann man ohne Taschenrechner nicht erreichen. Hier endet also die Übung.

(c) $\left(40yx^{-2}\right)^4 \cdot \left(36y^{-1}x^3\right)^3$

1. Schritt: Zerlegen: $40 = 5 \cdot 8 = 5 \cdot 2^3$ und $36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$

$$\left(40yx^{-2}\right)^4 \cdot \left(36y^{-1}x^3\right)^3 = \left(5 \cdot 2^3 \cdot yx^{-2}\right)^4 \cdot \left(2^2 \cdot 3^2 \cdot y^{-1}x^3\right)^3$$

2. Schritt: Weil $\left(5 \cdot 2^3 \cdot yx^{-2}\right)^4 = 5^4 \cdot 2^{12}y^4 \cdot x^{-8}$

und $\left(2^2 \cdot 3^2 \cdot y^{-1}x^3\right)^3 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot y^{-3} \cdot x^9$

Zusammengesetzt: $= 5^4 \cdot 2^{12}y^4 \cdot x^{-8} \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot y^{-3} \cdot x^9$

3. Schritt: Faktoren mit gleicher Basis zusammenfassen:

$$= 5^4 \cdot 2^{12+6} \cdot 3^6 \cdot x^{-8+9} \cdot y^{4-3}$$
$$= 5^4 \cdot 2^{18} \cdot 3^6 \cdot x^1 \cdot y^1$$
$$= \underbrace{5^4 \cdot 2^{18} \cdot 3^6}_{=\ldots\text{Zahl}} \cdot xy$$

Mehr kann man ohne Taschenrechner nicht erreichen. Hier endet also die Übung.

(d) $\dfrac{\left(18a^2b^{-2}\right)^3}{\left(24a^3b\right)^2} =$

1. Schritt: Zerlegen: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$ und $24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3$

$$\frac{\left(18a^2b^{-2}\right)^3}{\left(24a^3b\right)^2} = \frac{\left(2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^{-2}\right)^3}{\left(3 \cdot 2^3 \cdot a^3 \cdot b\right)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^6 \cdot a^6 \cdot b^{-6}}{3^2 \cdot 2^6 \cdot a^6 \cdot b^2}$$

2. Schritt: Zusammenfassen der Potenzen mit gleicher Basis:

$$\frac{2^3}{2^6} 2^{3-6} = 2^{-3}, \quad \frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4, \quad \frac{a^6}{a^6} = a^0 = 1, \quad \frac{b^{-6}}{b^2} = b^{-6-2} = b^{-8}$$

Zusammengesetzt: $= 2^{-3} \cdot 3^4 \cdot 1 \cdot b^{-8}$
(„Mal 1“ sollte man weglassen.)

3. Schritt: Jetzt schreibt man den Term noch so auf, dass nur positive Exponenten übrig bleiben: Die Potenzen mit den negativen Exponenten kommen in den Nenner:

$$= \frac{3^4}{2^3 \cdot b^8}.$$

e) $\dfrac{\left(25^5 x^2 y^4\right)^{-3}}{\left(20^{-4} x^{-5} y^2\right)^2} =$

1. Schritt: Zerlegen: $25 = 5^2$ und $20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$

$$\frac{\left(25^5 x^2 y^4\right)^{-3}}{\left(20^{-4} x^{-5} y^2\right)^2} = \frac{\left(5^{10} x^2 y^4\right)^{-3}}{\left(2^{-8} \cdot 5^{-4} x^{-5} y^2\right)^2} = \frac{5^{-30} x^{-6} y^{-12}}{2^{-16} \cdot 5^{-8} \cdot x^{-10} \cdot y^4}$$

2. Schritt: Zusammenfassen der Potenzen mit gleicher Basis:

$$\frac{5^{-30}}{5^{-8}} = 5^{-30-(-8)} = 5^{-30+8} = 5^{-22}, \quad \frac{1}{2^{-16}} = 2^{16}$$

$$\frac{x^{-6}}{x^{-10}} = x^{-6-(-10)} = x^{-6+10} = x^4 \quad \text{und} \quad \frac{y^{-12}}{y^4} = y^{-12-4} = y^{-16}$$

Zusammengesetzt $= 5^{-22} \cdot 2^{16} \cdot x^4 \cdot y^{-16}$

3. Schritt: Jetzt schreibt man den Term noch so auf, dass nur positive Exponenten übrig bleiben: Die Potenzen mit den negativen Exponenten kommen in den Nenner:

$$= \frac{x^4 \cdot 2^{16}}{5^{22} \cdot y^{16}}$$

Mehr zusammenfassen ist Unsinn. Das sind ohnehin reine Trainingsaufgaben für die Umformungen.

Trainingsaufgaben 8

a) $\left(54a^2\right)^3 \cdot \left(40a^{-4}\right)^2$ b) $\left(16x^3\right)^{-2} \cdot \left(24^2x^2\right)^4$ c) $\left(a^2b^{-3}c^4\right)^{-3} \cdot \left(a^{-1}b^4 \cdot c^{-2}\right)^3$

d) $\dfrac{\left(12x^3\right)^3}{\left(45x^{-2}\right)^3}$ e) $\dfrac{\left(4a^2\right)^3\left(8ab^2\right)^5}{\left(16a^3b^{-2}\right)^4}$ f) $\left(98x^3\right)^2 \cdot \dfrac{4x^2}{\left(49x^{-2}\right)^2}$

6. Brüche als Exponenten - Wurzeln

6.1 Wurzeln sind auch Potenzen

Erinnerst du dich daran: Potenzen wurden zuerst nur für natürliche Zahlen definiert. Dann hat man den Exponenten 0 und negative ganze Zahlen als Exponenten eingeführt und so definiert, dass die Divisionsregel dazu passt. Genauso kann man Wurzeln als Potenzen mit Brüchen als Exponenten definieren. Warum das geht, wird hier kurz erklärt.

Weil einerseits gilt: Und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt{2}^2 = 2$ $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 2^1 = 2$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}}$ sein soll.
Weil einerseits gilt: Und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt{3}^2 = 3$ $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}}$ sein soll.
Weil einerseits gilt: Und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt{a}^2 = a$ $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$ sein soll.

Anmerkung: Die Berechnung von $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ ist natürlich nur rein formal möglich, denn wenn man noch nicht definiert hat, was $a^{\frac{1}{2}}$ bedeuten soll, kann ja auch nicht damit rechnen!

Wer schon gelernt hat, was 3. und 4. Wurzeln sind, sollte weiterlesen:

Weil einerseits gilt: und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt[3]{2}^3 = 2$ $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 2^1 = 2$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}}$ sein soll.
Weil einerseits gilt: und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt[3]{a}^3 = a$ $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\cdot 3} = a^1 = a$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}}$ sein soll.

Weil einerseits gilt: und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt[4]{2}^4 = 2$ $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{4}\cdot 4} = 2^1 = 2$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}}$ sein soll.
Weil einerseits gilt: und weil die Potenzregel dies liefert:	$\sqrt[4]{a}^4 = a$ $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a^{\frac{1}{4}\cdot 4} = a^1 = a$	hat man festgelegt, dass $\boxed{\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}}$ sein soll.

6.2 Rechnen mit gebrochenen Exponenten

Auf CD!