Trigonometrie

Test

Grundlagen:

Sinus und Kosinus im Einheitskreis
Beliebige Werte berechnen
Einfache Gleichungen lösen

Die Grundlagen, sowie Musterbeispiele und Hintergründe
dazu stehen in 16012

Datei Nr. 16013

Stand: 10. August 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt

Alle Aufgaben sind ohne Rechner bzw. Tabellen zu lösen!

1. Sinus- und Kosinuswerte berechnen.

Winkel im Gradmaß:

a) $\sin 135^\circ$ b) $\cos 300^\circ$

Winkel im Bogenmaß:

c) $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ d) $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

2. Auf die Winkel zurückrechnen.

Berechne die passenden Winkel aus dem Bereich $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$, für die gilt:

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos\alpha = -0{,}5$

Berechne die passenden Winkel im aus dem Bereich $0 \le x \le 2\pi$, für die gilt:

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$ d) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß bzw. Umgekehrt.

a) $\alpha = 215^\circ$ b) $x = \frac{5}{12}\pi$

4. Umrechnung Sinus in Kosinus bzw. Umgekehrt.

a) $\sin\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \cos\alpha = ?$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = ?$

Kannst Du auch zu a) und b) den Tangenswert berechnen?

Lösungen

1. Sinus- und Kosinuswerte berechnen.

a) sin 135°

Überlegung: Der Sinuswert ist die y-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis. Für Punkte im 1. und 2. Quadranten (Feld) sind die y-Koordinaten positiv. Bei $\alpha = 135^{\circ}$ liegt der Punkt im 2. Feld. Der gesuchte Sinuswert ist daher positiv und ist gleich groß wie der Sinuswert des Winkels $\alpha' = 180^{\circ} - 135^{\circ} = 45^{\circ}$.

Rechnung:

$$\underbrace{\sin}_{y}\ \underbrace{135^{\circ}}_{2.Q.} = +\sin\left(180^{\circ} - 135^{\circ}\right) = +\sin 45^{\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

b) cos 300°

Überlegung: Der Kosinuswert ist die x-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis. Für Punkte im 1. und 4. Quadranten (Feld) sind die x-Koordinaten positiv. Bei $\alpha = 300^{\circ}$ liegt der Punkt im 4. Feld. Der gesuchte Kosinuswert ist daher positiv und ist gleich groß wie der Sinuswert des Winkels $\alpha' = 360^{\circ} - 300^{\circ} = 60^{\circ}$.

Rechnung:

$$\underbrace{\cos}_{x}\ \underbrace{300^{\circ}}_{4.Q.} = +\cos\left(360^{\circ} - 300^{\circ}\right) = \cos 60^{\circ} = \tfrac{1}{2}$$

c) $\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)$ Überlungen ähnlich wie oben, nur jetzt im Bogenmaß!

$\tfrac{4}{3}\pi$ ist größer als π (was 180° entspricht)

$$\underbrace{\sin}_{y}\ \underbrace{\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)}_{3.Q.} = -\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi - \pi\right) = -\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Denn $\tfrac{1}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} \tfrac{1}{3}\cdot 180^{\circ} = 60^{\circ}$!

d) $\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)$

$$\underbrace{\cos}_{x}\ \underbrace{\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)}_{2.Q.} = -\cos\left(\pi - \tfrac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Denn $\tfrac{1}{4}\pi \mathrel{\hat{=}} \tfrac{1}{4}\cdot 180^{\circ} = 45^{\circ}$!

2. Auf die Winkel zurückrechnen.

Berechne die passenden Winkel aus dem Bereich $0^{\circ} \le \alpha \le 360^{\circ}$, für die gilt:

a) $\underbrace{\sin\alpha}_{y} = \underbrace{-}_{\downarrow}\underbrace{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}_{\searrow}$

$\boxed{\text{3.oder 4. Feld.}}$ $\boxed{\sin 60^{\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}}$

ÜBERLEGUNG:
Die Sinusfunktion ergibt die y-Koordinate, und diese ist im 3. oder 4. Feld negativ.
Außerdem ist $\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ der Sinus von 60°.

3. Feld: $\alpha_1 = 180^{\circ} + 60^{\circ} = 240^{\circ}$

4. Feld: $\alpha_2 = 360^{\circ} - 60^{\circ} = 300^{\circ}$

Lösungsmenge: $L = \{ 240^{\circ} ; 300^{\circ} \}$.

b) $\underbrace{\cos\alpha}_{x} = \underbrace{-}_{\downarrow}\underbrace{0{,}5}_{\searrow}$

$\boxed{\text{2.oder 3. Feld.}}$ $\boxed{\cos 60^{\circ} = 0{,}5}$

2. Feld: $\alpha_1 = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$

3. Feld: $\alpha_2 = 180^{\circ} + 60^{\circ} = 240^{\circ}$

Lösungsmenge: $L = \{ 120^{\circ} ; 240^{\circ} \}$.

Berechne die passenden Winkel im aus dem Bereich $0 \le x \le 2\pi$, für die gilt:

c) $\underbrace{\sin x}_{y} = \underbrace{-}_{\downarrow}\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\searrow}$

$\boxed{\text{3.oder 4. Feld.}}$ $\boxed{\sin \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}}$

$x_1 = \pi + \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{7}{6}\pi$

$x_2 = 2\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{12}{6}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{11}{6}\pi$.

Im Gradmaß wären dies diese Rechnungen:

$\alpha_1 = 180^{\circ} + 30^{\circ} = 210^{\circ}$

$\alpha_2 = 360^{\circ} - 30^{\circ} = 330^{\circ}$

d) $\underbrace{\cos x}_{x\text{–K.}} = \underbrace{-}_{\downarrow}\underbrace{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}_{\searrow}$

(Achtung x ist der Winkel im Bogenmaß und cos x ist die x-Koordinate des zugehörenden Punktes. Nicht verwechseln!)

$\boxed{\text{2.oder 3. Feld.}}$ $\boxed{\cos \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}}$

$x_1 = \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi$

$x_2 = \pi - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{3}{4}\pi$.

Im Gradmaß wären dies diese Rechnungen:

$\alpha_1 = 180^{\circ} - 45^{\circ} = 135^{\circ}$

$\alpha_2 = 180^{\circ} + 45^{\circ} = 225^{\circ}$

3. Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß bzw. Umgekehrt.

Eine Möglichkeit ist es, mit Verhältnisgleichungen zu arbeiten.
Dabei geht man davon aus, dass das Bogenmaß die Länge des Kreisbogens ist, der den Radius 1 hat und zu dem zugehörigen Winkel passt.

Zu x passt also α genauso wie zum Bogen π der Winkel 180^O passt.

a) $\alpha = 215^O$

$\frac{x}{\alpha} = \frac{\pi}{180^O}$ oder gleich eingesetzt: $\frac{x}{45^O} = \frac{\pi}{180^O}$

Daraus folgt: $x = \frac{\pi \cdot 215^O}{180^O} = \frac{215}{180} \cdot \pi = \frac{43}{36}\pi$

(Es wurde durch 5 gekürzt.)

b) $x = \frac{5}{12}\pi$

Weil jetzt der Winkel im Gradmaß gesucht ist, beginnt man damit:

$\frac{\alpha}{x} = \frac{180^O}{\pi}$ bzw. $\alpha = \frac{180^O}{\pi} \cdot x = \frac{180^O}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{5}{12}\cancel{\pi} = \left(\frac{{}^{15}\cancel{180} \cdot 5}{\cancel{12}_1} \right)^O = 75^O$

4. Umrechnung Sinus in Kosinus bzw. Umgekehrt.

a) $\sin\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \cos\alpha = ?$

Der trigonometrische „Pythagoras“ lautet:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Eingesetzt: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-0{,}36} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$ (Es gibt also 2 Lösungen)

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = ?$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

Eingesetzt: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\sqrt{\frac{4\cdot 2}{9}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$ (2 Lösungen)

Die zugehörigen Tangenswerte lauten:

a) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{\pm 0{,}8} = \pm\frac{6}{8} = \pm\frac{3}{4}$

b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}}{\frac{1}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{1} = \pm 2\sqrt{2}$