Affine Abbildungen

Eigenwerte und Eigenvektoren

von Matrizen

Anwendung auf Abbildungen

Datei Nr. 21205

Stand 6. März 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist eine kompakte Version des sehr ausführlichen Textes 21201.

Durch die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor kann man Veränderungen berechnen, die durch lineare Gleichungen erfolgen. Es gibt geometrische Anwendungen (Abbildungen) wie Spiegelungen, Drehungen, Streckungen, Scherungen und viele andere, aber auch Anwendungen in Form von Zustandsänderungen aus vielen Bereichen.

Eine **Abbildung** erzeugt aus einem Objekt, das man Urbild nennt, ein Bildobjekt. Da wir Vektorrechnung betreiben, sind dies alles Vektoren, die im Falle geometrischer Anwendungen z. B, Ortsvektoren von Punkten sind, in anderen Bereichen beschreiben sie Zustände, die sich dann durch Vorkommnisse verändern.

Bei der Abbildung von Richtungsvektoren sind die Eigenvektoren von Bedeutung, weil sie die Eigenschaft haben, dass der Bildvektor dieselbe Richtung hat. Das ist für Fixgeraden wichtig, also für Geraden, die bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.

Inhalt

1 Definition einer affinen Abbildung

Eine Abbildung, die jedem Punkt der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ einen Bildpunkt zuordnet durch die Vorschrift: $\boxed{\vec{x}' = U \cdot \vec{x} + \vec{c}}$ mit $\det(U) \neq 0$ heißt eine affine **Punktabbildung** von $\mathbb{R}^2$ auf sich.

U ist dabei eine 2x2-Matrix, hat also die Form $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Bildet man Vektoren ab, entfällt der Summand $+\vec{c}$: $\boxed{\vec{u}' = U \cdot \vec{u}}$

Dies kann man einfach so zeigen:

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, dann folgt. $\vec{x}_1' = U \cdot \vec{x}_1 + \vec{c}$ und $\vec{x}_2' = U \cdot \vec{x}_2 + \vec{c}$:

$$\vec{u}' = \overrightarrow{P_1'P_2'} = \vec{x}_2' - \vec{x}_1' = \left(U \cdot \vec{x}_2 + \vec{c}\right) - \left(U \cdot \vec{x}_1 + \vec{c}\right) = U \cdot \vec{x}_2 - U \cdot \vec{x}_1 = U \cdot \left(\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right) = U \cdot \vec{u}$$

Rechenregel:

Es sei U die Matrix $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Vektor,

dann rechnet man

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ y \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

Es gibt die Merkregel: „Berechne zweimal das Skalarprodukt aus Zeile man Spalte“.

U ist die sogenannte Abbildungsmatrix $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und der Urbildvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Einfache Beispiele:

(1) Die Abbildung α sei gegeben durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ bzw. $\begin{Bmatrix} x' = 2x + y \\ y' = \quad x - y \end{Bmatrix}$

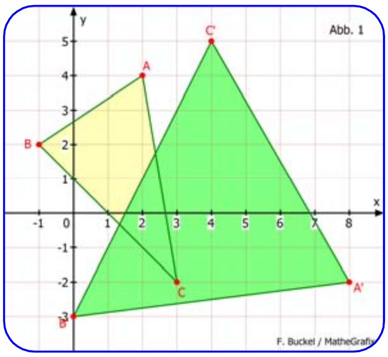
Wir bilden drei Punkte ab. $A(2\,|\,4), B(-1\,|\,2)$ und $C(3\,|\,-2)$. (Siehe Abb. 1)

Und verwenden dazu ihre Ortsvektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

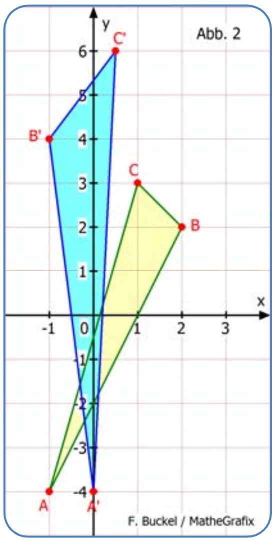
Berechnung der Bildvektoren: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ Bildpunkt: $A'(8\,|\,-2)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ Bildpunkt: $B'(0\,|\,-3)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Bildpunkt: $C'(4\,|\,5)$



(2) Abbildung β: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$



Wir bilden drei Punkte ab. $A(-1|-2)$, $B(2|2)$ und $C(1|3)$

Bildpunkte: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(0|-4)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(-1|4)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2} \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(\tfrac{1}{2}|6)$

(3) Abbildung γ: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

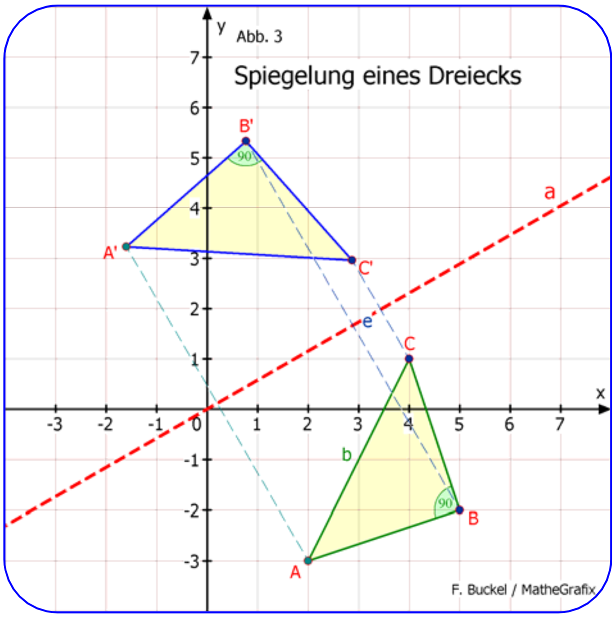
Urbilder: $A(2|-3)$, $B(5|-2)$ und $C(4|1)$

Bildpunkte: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1{,}60 \\ 3{,}23 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-1{,}60\,|\,3{,}23)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}77 \\ 5{,}33 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(0{,}77\,|\,5{,}33)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}87 \\ 2{,}96 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(2{,}87\,|\,2{,}96)$

Diese Abbildung ist eine **Spiegelung** an der Geraden a: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ (Siehe Abb. 3)



(4) Abbildung δ : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Urbilder: $A(2 \mid -3), B(5 \mid -2), C(4 \mid 1)$

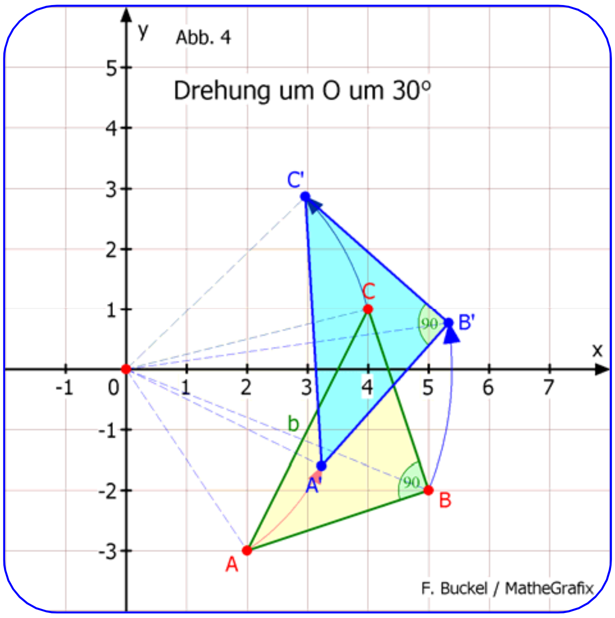
Bildpunkte:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+\frac{3}{2} \\ 1-\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}23 \\ -1{,}60 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(3{,}23 \mid -1{,}60)$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{3}+1 \\ \frac{5}{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}33 \\ 0{,}77 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(5{,}33 \mid 0{,}77)$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}96 \\ 2{,}87 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(2{,}96 \mid 2{,}87)$$

Hier liegt eine **Drehung** um den Ursprung vor. (Siehe Abb. 4)



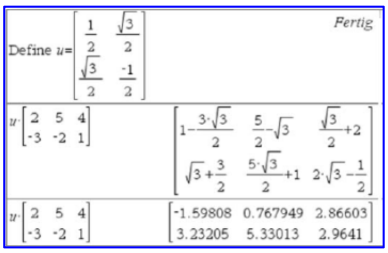
Hinweis: Man kann die Bildpunkte mehrerer Punkte auf einmal berechnen:

Anstelle von $\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \dots\ \vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \dots,\ \vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots$

kann man auch die drei Ortsvektoren in ihre Matrix schreiben und auf einmal verarbeiten:

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}\sqrt{3} & \frac{5}{2}-\sqrt{3} & 2+\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\sqrt{3}+1 & 2\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dies ist auch bei CAS-Rechnern vorteilhaft:



Ergänzende Hinweise zur Rolle des Ursprungs

. **Was ist der Bildpunkt des Ursprungs** $O(0|0)$?

$$\vec{o}\,' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ c \cdot 0 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Ursprung wird also bei Abbildungen der Form $\vec{x}\,' = U \cdot \vec{x}$ auf sich selbst abgebildet.

Er heißt daher **Fixpunkt**.

2. Die allgemeine Abbildungsgleichung lautet $\vec{x}\,' = U \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Wenn $\vec{c}$ nicht der Nullvektor ist, dann ist der Ursprung bei dieser Abbildung kein Fixpunkt.

Das erkennt man, wenn man den Bildvektor zu $\vec{o}$ berechnet:

$$\vec{o}\,' = \underbrace{U \cdot \vec{o}}_{=\vec{o}} + \vec{c} = \vec{c}$$

2 Fixpunkte einer affinen Abbildung $\vec{x}' = U \cdot \vec{x} + \vec{c}$

$\vec{x}$ sei der Ortsvektor eines Punktes P und $\vec{x}'$ der Ortsvektor des Bildpunktes P'.

Beispiel 5: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ ***Abbildung mit genau einem Fixpunkt.***

Bei einem Fixpunkt sind Urbild und Bild identisch. Daher gibt diese

Fixpunktbedingung: $\boxed{\vec{x}' = \vec{x}}$, also $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} -x + 2y = x \\ x + y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x + 2y = 0 \\ x \quad = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Setzt man (2) in (1): $y = 0$

Ergebnis: **Einziger Fixpunkt** ist der Ursprung: $O(0\,|\,0)$

Beispiel 6 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Fixpunktbedingung: $\boxed{\vec{x}' = \vec{x}}$, also $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} 0{,}8x + 0{,}3y = x \\ 0{,}2x + 0{,}7y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -0{,}2 \cdot x + 0{,}3 \cdot y = 0 \\ 0{,}2 \cdot x - 0{,}3 \cdot y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Die 1. Gleichung ist ein Vielfaches der zweiten, und stellt daher keine Bedingung dar. Somit sind alle Punkte Fixpunkte, die Gleichung (1) erfüllen, und diese stellt die Gleichung einer Geraden dar. Nach Umformen erhält man $\boxed{y = \frac{2}{3}x}$.

Für einzelne Fixpunkte kann man x frei wählen und dann y damit berechnen:

Etwa: $x = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot \boxed{3} = 2$. Also ist $F_1(3\,|\,2)$ einer dieser Fixpunkte

Dies ist die Vektorgleichung einer Ursprungsgeraden, die man auch in der Form $y = \frac{2}{3}x$ schreiben kann. **Alle ihre Punkte sind Fixpunkte**. **g heißt eine Fixpunktgerade** oder **Achse**.

Es gibt hier also unendlich viele Fixpunkte, und diese liegen auf einer Geraden.

Zusatz: Die Vektorgleichung dieser Fixpunktgeraden erhält man so:

Ich wähle $x = 3r \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 3r = 2r$ ergibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Merke: Für eine reguläre affine Abbildung gibt es drei Möglichkeiten:

- Es gibt keinen Fixpunkt.
- Es gibt genau einen Fixpunkt.
- Es gibt unendlich viele Fixpunkte auf einer Fixpunktgeraden.

Das folgt einfach aus der Lösbarkeit des Gleichungssystems.

Als Beispiel für eine Abbildung ohne Fixpunkt sei eine Verschiebung genannt.

Eine affine Abbildung, die eine Fixpunktgerade hat, nennt man **Achsenaffinität**.

3 Fixgeraden einer affinen Abbildung (Teil 1)

Eine Gerade g, deren Bildgerade g‘ mit g identisch ist, heißt **Fixgerade**.

Es gibt zwei verschiedene Arten von Fixgeraden.

Das erkennt man ganz leicht, wenn man eine Spiegelung an einer Geraden betrachtet.
Die Spiegelungsachse ist eine **Fixpunktgerade** (die man auch **Achse** nennt), weil jeder ihrer Punkte ein Fixpunkt ist. Sie bleibt also punktweise fest.

Wenn man dagegen einen Punkt spiegelt, der nicht auf der Achse liegt, dann liegt sein Bildpunkt auf der anderen Seite der Achse und zwar auf einer Geraden senkrecht zur Achse. Jede solche Gerade bleibt als Ganzes auch erhalten: Jeder Punkt von ihr hat seinen Bildpunkt auch wieder auf ihr. Es ist aber „nur“ eine Fixgerade, keine Fixpunktgerade, weil nicht alle Punkte Fixpunkte sind.

Also: Eine Fixgerade bleibt als Ganzes erhalten. Sie muss keine Fixpunkte besitzen. Fixgerade heißt also: Liegt ein Punkt auf ihr, dann auch ihr Bildpunkt.

Eine Fixpunktgerade oder Achse **besteht nur aus Fixpunkten**.

Beispiel 7: Berechne die Fixpunkte der Abbildung α : $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 8{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Lösung:

Fixpunktbedingung: $\vec{x}\,' = \vec{x}$

d. h. $\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 8{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{Bmatrix} -0{,}6x + 0{,}8y = x \\ 0{,}8x + 0{,}6y = y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -1{,}6x + 0{,}8y = 0 \\ 0{,}8x - 0{,}4y = 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

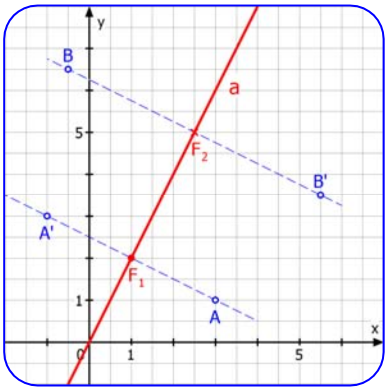
Merkmal: (1) ist das (-2)-fache von (2). Also ist (1) entbehrlich. Zur Bestimmung der Fixpunkte hat man also nur noch eine Gleichung. Das heißt aber: Alle Punkte, welche die Gleichung (2) $0{,}8x - 0{,}4y = 0$ erfüllen, sind Fixpunkte.

Aus (2) folgt: $\boxed{y = 2x}$

Ergebnis. Alle Punkte der Geraden $y = 2x$ sind Fixpunkte.
Die Abbildung α hat also eine Fixpunktgerade, eine **Achse**.
Man nennt sie daher auch eine **Achsenaffinität**.

Information: Es handelt sich um eine Geradenspiegelung an der Achse $y = 2x$.

$A(3\,|\,1) \to A'(-1\,|\,3)$ denn $\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 8{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 + 0{,}8 \\ 2{,}4 + 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Der Mittelpunkt von A und A‘ ist $F_1(1\,|\,2)$. Dieser liegt auf der Achse $y = 2x$ und ist folglich ein Fixpunkt, was man auch so zeigen kann:

$$\vec{f}\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 8{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ferner kann man zeigen, dass die Spiegelungsrichtung orthogonal zur Achsenrichtung ist: $m_{AA'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ und $m_a = 2$.

Wenn man nach Fixgeraden sucht, spielen die Richtungsvektoren die entscheidende Rolle.

Was passiert mit einem Richtungsvektor bei einer affinen Abbildung.

Wir schauen uns drei Fälle an:

(1) Unsere Beispielabbildung hat die **Achse** $y = 2x$. Deren Steigung 2 bedeutet, dass $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bzw. ein Vielfaches davon Richtungsvektoren der Achse ist.

Wir berechnen den Bildvektor zu $\vec{u}_1$ bezüglich der Abbildung α:

$$\vec{u}_1' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

Mit anderen Worten: **Der Richtungsvektor der Achse ist ein Fixvektor!**

Information: Die Richtungsvektoren jeder Fixpunktgeraden ist ein Fixvektor.

(2) Nun betrachte ich Richtungsvektoren, die in Spiegelungsrichtung zeigen.

Die Spiegelungsrichtung ist $m_{AA'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, als ist $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor in Spiegelungsrichtung. Wir bilden diesen nun ab:

$$\vec{u}_2' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 + 0{,}8 \\ -1{,}6 + 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{u}_2$$

Das Bild dieses Richtungsvektors ist also ein **Vielfaches des Urbildes**.

Eine Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{u}_2$ hat also eine Bildgerade, die auf jeden Fall parallel zum Urbild g ist. (Möglichweise ist sie sogar identisch mit g, also eine Fixgerade.)

(3) Als drittes nun ein beliebiger anderer Vektor, etwa $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bildvektor: $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}2 + 2{,}4 \\ 1{,}6 + 1{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Diese Bildvektor hat also eine völlig andere Richtung als sein Urbild.

Eine Gerade h in Richtung $\vec{v}$ hat also eine Bildgerade, die nicht parallel zu h ist.

Wichtig ist diese Überlegung:

Wenn eine Gerade auf sich selbst abgebildet wird, dann haben Gerade und Bildgerade Richtungsvektoren, welche die gleiche Richtung haben müssen, aber nicht identisch sein müssen. Es reicht also auch, wenn der Bild-Richtungsvektor ein Vielfaches ist.

Definition: Vektoren, deren Bildvektor ein Vielfaches des Urbildes ist, also $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, heißen **Eigenvektor der Abbildung,** k nennt man seinen **Eigenwert**

Wenn wir also nach Fixgeraden suchen, dann suchen wir Eigenvektoren, denn nur sie können die Richtung einer Fixgeraden angeben.

4 Eigenvektoren einer affinen Abbildung

Zuerst üben wir Berechnungen ohne geometrische Anwendungen.

Wir müssen jetzt also zuerst lernen, wie man Eigenvektoren berechnet.

Beispiel 1: $\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ ***Ganz ausführliche Rechnung:***

Bedingung für Eigenvektoren: $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, **also** $\boxed{U \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}}$

Daraus entsteht ein Gleichungssystem für die **Eigenwerte** k, das Eigenwertsystem.

Ausführlich:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0{,}8 \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = k \cdot u_1 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + 0{,}7 \cdot u_2 = k \cdot u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (0{,}8 - k) \cdot u_1 + \quad 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + (0{,}7 - k) \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

(EWS)

Mit Matrizenrechnung:

$$U \cdot \vec{u} = k \cdot E \cdot \vec{u} \qquad *)$$

$$U \cdot \vec{u} - k \cdot E \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

$$(U - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 - k & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 - k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unterbrechung…

*) Zur Matrizenrechnung muss man ergänzend erklären, dass E die Einheitsmatrix ist. Sie hat die Eigenschaft $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$ für alle Vektoren. Man kann also die Gleichung $U \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}$ auch so schreiben: $U \cdot \vec{u} = k \cdot E \cdot \vec{u}$. Damit stehen links und rechts Matrizen und man sie so umformen, wie es im rechten Kasten dargestellt worden ist.

Zur Berechnung einer Lösung benötigt man das folgende Hintergrundwissen:

Das sogenannte Eigenwertsystem (EWS) hat als Absolutglieder nur Nullen. Daher heißt es ein homogenes Gleichungssystem. Es hat stets die Lösung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit x = 0 und y = 0.

Man nennt sie die triviale Lösung. Diese ist jedoch für Anwendungen nicht brauchbar (denn der Nullvektor gibt keine Richtung an) und scheidet als Lösung immer aus!

Die Theorie der Gleichungssysteme besagt folgendes:

Hat man nur eine Gleichung mit zwei Variablen x, y, dann kann man eine Variable frei wählen. Daraus folgt dann der Wert für die andere. Dieser Fall liegt auch vor, wenn im Eigenwertsystem eine Gleichung ein Vielfaches der anderen ist, und somit keine neue Bedingung mehr darstellt. Man kann sie dann weggelassen. Und dies ist genau dann der Fall, wenn die Determinante der Matrix $(U - k \cdot E)$ den Wert 0 hat. Daher gilt dieser

Grundsatz zur Berechnung der Eigenwerte / Eigenvektoren:

Das Eigenwertsystem hat genau dann ***auch*** nicht-triviale Lösungen, wenn die zugehörige Determinante den Wert 0 hat: $\det(U - k \cdot E) = 0$

Dies nennt man die **charakteristische Gleichung.**

MUSTERBERECHNUNG 1

Ich beginne von vorne: Bedingung: $\boxed{U \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}}$ d. h. $U \cdot \vec{u} = k \cdot E \cdot \vec{u}$

Folgerung: $U \cdot \vec{u} - k \cdot E \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Oder $\boxed{(U - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$

Ausführlich (Eigenwertsystem): $\begin{pmatrix} 0,8-k & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (EWS)

Bedingung für nicht-triviale Lösungen: $\det(U - k \cdot E) = 0$

d. h. $\begin{vmatrix} 0,8-k & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-k \end{vmatrix} = 0$

$(0,8-k)(0,7-k) - 0,06 \cdot = 0$

Charakteristische Gleichung: $k^2 - 1,5 \cdot k + 0,5 = 0$

Lösungsformel: $k_{1,2} = \dfrac{1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 0,5}}{2} = \dfrac{1,5 \pm 0,5}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0,5 \end{cases}$

Eigenwerte: 1. Lösung: $k_1 = 1$

2. Lösung: $k_2 = 0,5$

Jetzt kennen wir die beiden Eigenwerte, zu denen es Eigenvektoren gibt.

Für den ersten Eigenvektor gilt: $\vec{u}_1{}' = k_1 \cdot \vec{u}_1 = \boxed{1} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1$, für den zweiten $\vec{u}_2{}' = k_2 \cdot \vec{u}_2 = \boxed{0,5} \cdot \vec{u}_2$.

Doch die Berechnung dieser Vektoren fehlt noch.

Berechnung der zugehörenden Eigenvektoren:

EWS für $k_1 = 1$: $\begin{cases} (0,8-1) \cdot u_1 + 0,3 \cdot u_2 = 0 \\ 0,2 \cdot u_1 + (0,7-1) \cdot u_2 = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} -0,2 \cdot u_1 + 0,3 \cdot u_2 = 0 \\ 0,2 \cdot u_1 - 0,3 \cdot u_2 = 0 \end{cases}$ (1) (2)

Die Gleichung (1) ist ein Vielfaches der zweiten, weshalb es unendlich viele Lösungen gibt.

Aus (1) folgt: $0,3u_2 = 0,2u_1 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{3}u_1$. Ich wähle $u_1 = 3r$ und erhalte $u_2 = 2r$.

Damit haben wir „einen" ersten Eigenvektor gefunden: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Es sind alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sie **gehören zum Eigenwert k = 1**, d. h. für sie gilt: $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$

EWS für $k_2 = 0,5$: $\begin{cases} (0,8-0,5) \cdot u_1 + 0,3 \cdot u_2 = 0 \\ 0,2 \cdot u_1 + (0,7-0,5) \cdot u_2 = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} 0,3 \cdot u_1 + 0,3 \cdot u_2 = 0 \\ 0,2 \cdot u_1 + 0,2 \cdot u_2 = 0 \end{cases}$ $|:0,3$ $|:0,2$

Aus beiden Gleichungen folgt $u_1 + u_2 = 0$

Wählt man z. B. $u_1 = r$, folgt $u_2 = -r$ und wir haben als zweiten Eigenvektor: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Auch hier sind alle Lösungen Vielfachen eines Vektors. Für sie gilt: $\vec{u}_2{}' = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_2$.

Nun wollen wir auf der Folgeseite zu dieser Abbildung die Fixgeraden bestimmen

MUSTERBERECHNUNG 2

Beispiel 2: **Gegeben sei** α : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Bedingung: $\boxed{U \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}}$ d. h. $U \cdot \vec{u} = k \cdot E \cdot \vec{u}$

Oder gleich so beginnen: $\boxed{(U - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$

Eigenwertsystem : $\begin{pmatrix} 2-k & -0,5 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

(1) **Charakteristische Gleichung für Eigenwerte**: $\begin{vmatrix} 2-k & -0,5 \\ 2 & 4-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(2-k)(4-k) + 2 \cdot 0,5 = 0$

führt auf $k^2 - 6x + 9 = 0$

mit $k_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$

Diese Abbildung hat nur einen Eigenwert.

(2) **Eigenwertsystem zu k = 3:**

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -0,5 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -0,5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 - 0,5u_2 = 0 \\ 2u_1 + \quad u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Aus beiden Gleichungen folgt $u_2 = -2u_1$.

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R}$, dann folgt u_2 = -2r, dann erhält man $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 3 \cdot \vec{u}$.

<u>Ergebnis:</u> Die Abbildung hat alle Vielfachen des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor mit dem Eigenwert 3, d. h. es gilt für sie $\vec{u}' = \boxed{3} \cdot \vec{u}$.

MUSTERBERECHNUNG 3

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Bedingung: $\boxed{(U - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$

Eigenwertsystem : $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

(1) **Charakteristische Gleichung für Eigenwerte**: $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(1-k)(-1-k) = 0$

mit $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$

(2) **Eigenwertsystem zu k_1 = 1:** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_2 = 0 \\ -2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 0,\ u_1 = r \in \mathbb{R}$

Eigenvektor ist also $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $k_1 = 1$, d.h. $\vec{u}_1' = 1 \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1$

Eigenwertsystem zu k_2 = -1: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0.$

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor ist also $\vec{u}_2$ mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$.

MUSTERBERECHNUNG 4

ε**:** $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d. h. $\begin{Bmatrix} x' = & 2x + 3y + 1 \\ y' = & -3x + 2y \end{Bmatrix}$

1. Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$:

$$\begin{Bmatrix} 2x + 3y + 1 = x \\ -3x + 2y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x + 3y = -1 \\ -3x + y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Aus (2) folgt: $y = 3x$. Eingesetzt in (1): $x + 9x = -1 \Leftrightarrow 10x = -1 \Leftrightarrow x_F = -\frac{1}{10}$

mit $y_F = 3x_F = -\frac{3}{10}$

Die Abbildung ε hat also nur den Fixpunkt $F\left(-\frac{1}{10} \mid -\frac{3}{10}\right)$

2. Eigenvektoren:

Bedingung: $\boxed{(U - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$

Eigenwertsystem : $\begin{pmatrix} 2-k & 3 \\ -3 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

Charakteristische Gleichung für Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ -3 & 2-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(2-k)^2 + 9 = 0$

bzw. $(2-k)^2 = -9$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Also besitzt ε keine Eigenwerte und somit keine Eigenvektoren und daher auch keine Fixgeraden.

Doch welche Abbildung hat einen Fixpunkt und keine Fixgeraden?

Info: Es ist eine Drehstreckung. Es wird um den Fixpunkt gedreht und dann mit dem Faktor $\sqrt{13}$ gestreckt.

Drehstreckungen werden im Text 21215 besprochen.

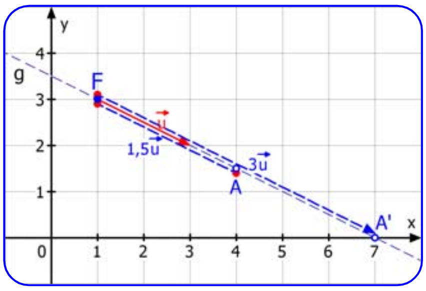
5 Fixgeraden einer affinen Abbildung (Teil 2)

Nun wissen wir also, wie man Eigenvektoren berechnet, dl h. in welchen Richtungen es Fixgeraden geben kann. Wir wollen nun an einigen Beispielen diese Fixgeraden finden.

Beispiel 1:

α hat den Fixpunkt $F(1|3)$ und den Eigenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert 2. D. h. $\boxed{\vec{u}' = 2\vec{u}}$.

Dann ist die Gerade g durch F in Richtung $\vec{u}$ eine Fixgerade.



Beweis: A sei ein Punkt auf g, dann hat der Vektor $\overrightarrow{FA}$ die Richtung von $\vec{u}$, d.h.er ist ein Vielfaches von $\vec{u}$, in der Abbildung ist $\overrightarrow{FA} = 1{,}5 \cdot \vec{u}$.

Nun bilden wir alles ab.

F ist Fixpunkt, wird also auf sich selbst abgebildet.

Für $\vec{u}$ gilt $\vec{u}' = 2 \cdot \vec{u}$. Das gilt auch für alle Vielfachen von $\vec{u}$, also ist auch $\overrightarrow{FA}' = 2 \cdot \overrightarrow{FA}$, also geht A in A' über, und A' liegt auf g und ist doppelt so weit von F entfernt wie A.

Die Abbildung funktioniert für Punkte auf g also so:

Der Bildpunkt liegt wieder auf g, ist aber doppelt so weit von F weg wie das Urbild.

Man könnte also sagen, dass diese Abbildung <u>auf g</u> wie eine zentrische Streckung wirkt.

Was mit den Punkten passiert, die nicht auf g liegen, kann man ohne Kenntnis der Abbildungsgleichungen nicht sagen.

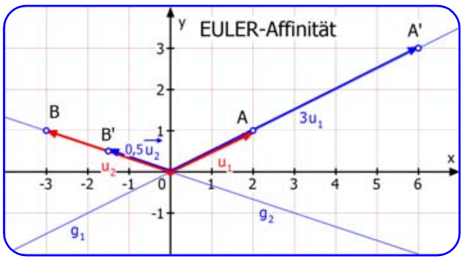
Beispiel 2:

α hat den Fixpunkt $F(0|0)$ und zwei Eigenvektoren

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert 3

und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert $\frac{1}{2}$

Dann sind die Geraden g durch F in Richtung der Eigenvektoren Fixgeraden



Die Begründung geht wie oben: Liegt ein Punkt auf einer dieser Geraden, dann streckt ihn die Abbildung mit dem Faktor 3 bzw. 0,5 (je nachdem, auf welcher Geraden er liegt) von F aus. Der Bildpunkt bleibt aber auf der Geraden.

Eine Abbildung mit genau einem Fixpunkt und zwei Eigenvektoren heißt eine EULER-Affinität.

Aufgabe: Die Gleichung dieser Abbildung lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Berechne Fixpunkte, Eigenvektoren und Fixgeraden

Die Lösung steht auf der nächsten Seite.

Lösung: α : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

1. **Berechnung von Fixpunkten:** Bed.: $\vec{x}' = \vec{x}$ d. h. $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1{,}5x + 3y = x \\ 0{,}5x + 2y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0{,}5x + 3y = 0 \\ 0{,}5x + \ \ y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(1) - (2): $2y = 0 \Rightarrow y_F = 0$. In (2): $0{,}5x = 0 \Rightarrow x_F = 0$

Ergebnis: Einziger Fixpunkt ist $F(0\,|\,0)$.

2. **Berechnung von Eigenvektoren:** $(U - kE) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ d. h. $\begin{pmatrix} 1{,}5-k & 3 \\ 0{,}5 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die charakteristische Gleichung lautet: $\det(U - kE) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1{,}5-k & 3 \\ 0{,}5 & 2-k \end{vmatrix} = 0$

d. h.

$$(1{,}5-k)\cdot(2-k) - 1{,}5 = 0$$
$$k^2 - 3{,}5k + 1{,}5 = 0 \quad | \cdot 2$$
$$2k^2 - 7k + 3 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 2\cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eigenwertsystem für $k_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5-\boxed{3} & 3 \\ 0{,}5 & 2-\boxed{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -1{,}5u_1 + 3u_2 = 0 \\ 0{,}5u_1 - \ \ u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Beide Gleichungen führen zu $\boxed{u_1 = 2u_2}$.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\boxed{\vec{u}_1' = 3 \cdot \vec{u}_1}$

Eigenwertsystem für $k_2 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5-\boxed{\frac{1}{2}} & 3 \\ 0{,}5 & 2-\boxed{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 + 3u_2 = 0 \\ 0{,}5u_1 + 1{,}5u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(2) ist die Hälfte von (1) und daher entbehrlich.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = -3r \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3r \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\boxed{\vec{u}_2' = \frac{1}{2}\vec{u}_2}$

3. **Fixgeraden:**

Es gibt zwei Fixgeraden durch den Fixpunkt in Richtung der Eigenvektoren.

Die erste Fixgerade ist g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ also $\boxed{\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ bzw. $y = \frac{1}{2}x$

Die zweite Fixgerade ist g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ also $\boxed{\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ bzw. $y = -\frac{1}{3}x$

Siehe Abbildung auf der Seite zuvor.

Hinweis: Zu Leonhard Euler (1703 – 1783) findet man viel unter
https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Beispiel 3: $\beta: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

1. Fixpunktbedingung: $\boxed{\vec{x}' = \vec{x}}$, also $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} 0{,}8x + 0{,}3y = x \\ 0{,}2x + 0{,}7y = y \end{Bmatrix}$

Ordnen: $\begin{Bmatrix} -0{,}2x + 0{,}3y = 0 \\ 0{,}2x - 0{,}3y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Gleichung (2) ist ein Vielfaches von (1). Also ist eine der beiden Gleichungen (1), (2) entbehrlich und folglich hat man zur Lösung eine freie Wahl.

Wähle $x = r \in \mathbb{R}$,

dann folgt aus (1): $0{,}3y = 0{,}2x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}r$

Fixpunkte sind also: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{2}{3}r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ oder anders dargestellt: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es gibt also unendlich viele Fixpunkte, die alle auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x$

bzw. $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen. Dies ist die **Achse** (Fixpunktgerade) der Abbildung.

2. **Eigenvektoren:** Die Rechnung steht auf Seite 10.

$\vec{u}_1 = r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert k_1 = **1**, d. h. es gilt: $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$

$\vec{u}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert $k_2 = \frac{1}{2}$, also mit $\vec{u}_2' = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_2$

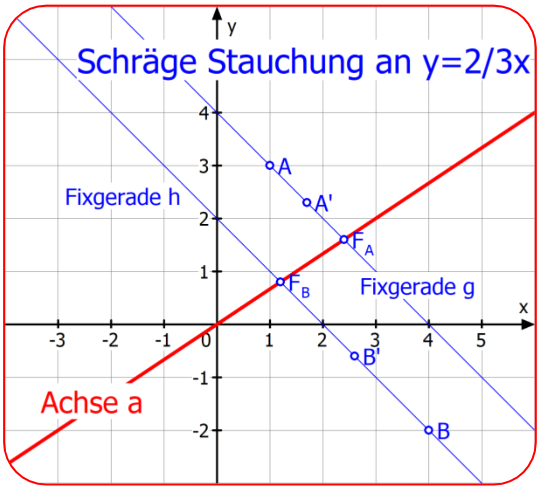
Grundsatz: Jede Gerade, die durch einen Fixpunkt geht und die Richtung eines Eigenvektors hat, ist eine Fixgerade.

Hat der Eigenvektor zudem den Eigenwert 1, dann ist die zugehörige Fixgerade sogar eine Fixpunktgerade.

Also hat die vorliegende Abbildung die bereits erwähnte Fixpunktgerade (Achse) und dann alle Geraden in Richtung $\vec{u}_2$, also mit der Steigung -1.

Information:

Liegt A auf einer solchen Fixgeraden, dann auch der Bildpunkt A‘.
Es sei F_A der Schnittpunkt der Fixgeraden g mit der Achse a, dann ist
$\overrightarrow{F_A A}$ ein Eigenvektor mit $k = \frac{1}{2}$, also gilt
$\overrightarrow{F_A A'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{F_A A}$. Also ist A‘ der Mittelpunkt von F_A und A.
Das gilt für alle Punkte.



Beispiel 4: **Gegeben sei** α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

1. Fixpunktbedingung: $\boxed{\vec{x}' = \vec{x}}$, also

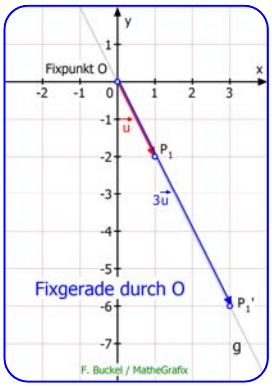
$$\begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x - 0,5y = x \\ 2x - \ \ 4y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - 0,5y = 0 \\ 2x - \ \ 5y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Aus (1) folgt $x = \frac{1}{2}y$. Setzt man das in (2) ein, erhält man
$y - 5y = 0 \Leftrightarrow -4y = 0 \Leftrightarrow y_F = 0$. Aus (1) erhält man dann $x_F = 0$
Einziger Fixpunkt ist also $F(0\,|\,0)$.

2. **Berechnung der Eigenvektoren:** Dies ist auf Seite 11 bereits geschehen.

Eigenvektoren sind also: $\vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 3 \cdot \vec{u}$.

<u>Ergebnis:</u> Die Abbildung hat alle Vielfachen des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor mit dem Eigenwert 3, d. h. es gilt für sie $\vec{u}' = \boxed{3} \cdot \vec{u}$.



3. **Fixgeraden:**

Die Gerade g durch den Fixpunkt in Richtung $\vec{u}$ ist eine Fixgerade:
$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $y = -2x$.

Wie wird abgebildet?

Liegt ein Punkt auf g, dann auch sein Bildpunkt. $P_1(1\,|\,-2) \Rightarrow P_1'(3\,|\,-6)$
denn der Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, also ist $\overrightarrow{OP_1'} = 3 \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

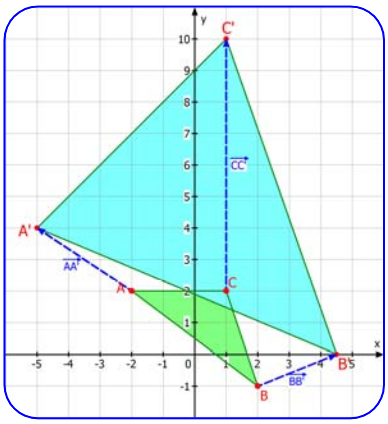
Oder: $Q(2\,|\,-4)$: Der Ortsvektor ist der Eigenvektor $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OQ'} = 3 \cdot \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$,
also ist $\overline{Q}(6\,|\,-12)$.

<u>Die Punkte dieser Fixgeraden werden vom Ursprung aus mit dem Faktor 3 gestreckt</u>.
Wie **andere Punkte** abgebildet werden, kann man *hier* nicht vorhersagen. Um eine kleine Vorstellung zu bekommen bilde ich ein Dreieck ab:

$A(-2\,|\,2) \to A'(-5\,|\,4)$, $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-1 \\ -4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$B(2\,|\,-1) \to B'(4,5\,|\,0)$

$C(1\,|\,2) \to C'(1\,|\,10)$



Eine Streckung ist auch zu erkennen, doch nicht, wie sie zustande kommt.

Beispiel 5: **Gegeben sei** α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

1. Fixpunktbedingung: $\boxed{\vec{x}' = \vec{x}}$, also $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} x + 2y = x \\ -y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow y = 0$$

Da x nicht in der Bedingungsgleichung vorkommt, ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann stellt y = 0 die x-Achse dar, die folglich Fixpunktgerade (Achse) ist.

2. Eigenwertsystem: $(U - kE) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ d. h. $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die charakteristische Gleichung lautet: $\det(U - kE) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(1-k) \cdot (-1-k) = 0$

Dies ist ein Nullprodukt und liefert als Eigenwerte: $k_1 = 1,\ k_2 = -1$.

Eigenwertsystem für $k_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-\boxed{1} & 2 \\ 0 & -1-\boxed{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_2 = 0 \\ -2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 0$$

u_1 unterliegt keiner Bedingung und ist daher beliebig:

Eigenvektoren sind $\boxed{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ mit $k_1 = 1$, also mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$

Hinweis: Wenn es eine Achse gibt, dann ist deren Richtungsvektor stets eine Eigenvektor mit dem Eigenwert 1, denn weil die Achse aus lauter Fxixpunkten besteht, ist auch jeder Vektor in Achsenrichtung Fixvektor.

Eigenwertsystem für $k_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1-\boxed{-1} & 2 \\ 0 & -1-\boxed{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_1 = -u_2$$

Wählt man $u_2 = r \in \mathbb{R}$ beliebig, folgt $u_1 = -r$.

Eigenvektoren sind $\boxed{\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ mit $\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_2$

3. Fixgeraden:

Die x-Achse ist als Fixpunktgerade auch eine Fixgerade.

Jeder Gerade in Richtung $\vec{u}_2$ (also mit der Steigung -1) ist Fixgerade.

Ich erkläre dies auf der nächsten Seite ausführlich, und auch, wie man mit Hilfe des Eigenvektors $\vec{u}_2$ Bildpunkte konstruieren kann.

6 Wie funktionieren Achsenaffinitäten?

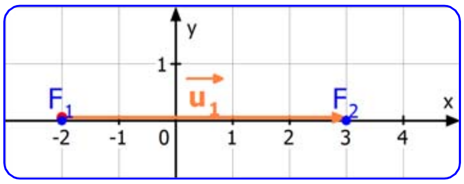
1 Die Abbildung $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ (von Seite 16)

hat die x-Achse als Affinitätsachse und die Eigenvektoren

$\boxed{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ mit $k_1 = 1$, also mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$

$\boxed{\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ mit $k_2 = -1$, also mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$

Auswertung:



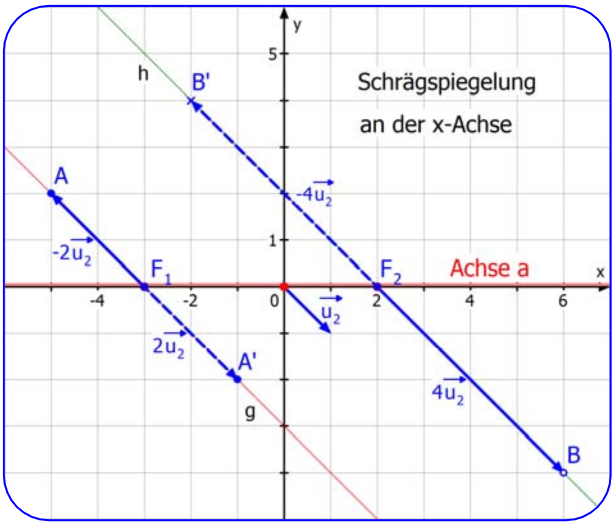
(1) Da die x-Achse aus lauter Fixpunkten besteht, wird ein Vektor wie $\overrightarrow{F_1F_2}$ auf sich selbst abgebildet, denn die Endpunkte der Pfeile ändern sich ja nicht:

$$\overrightarrow{F_1F_2}' = \overrightarrow{F_1F_2} \ .$$

Alle Vektoren in Achsenrichtungen sind also Eigenvektoren mit dem Eigenwert 1.

Dies gilt für alle Achsenaffinitäten.

(2) Nun betrachten wir Geraden in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also mit der Steigung -1.



Auf $g: \ y = -x - 3$ wähle ich einen Punkt, etwa $A(-5\,|\,2)$. Es sei $F_1(-3\,|\,0)$ der Schnittpunkt von g mit der Achse.
Dann ist F_1 ein Fixpunkt.
Nun geht es um den Vektor $\overrightarrow{F_1A} = -2\vec{u}_2$.
Er hat natürlich auch die Richtung von $\vec{u}_2$.
Also gilt für ihn auch der Eigenwert -1:
$\overrightarrow{F_1A}' = -\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{FA'}$
Weil F_1 festbleibt, muss der Bildpunkt A' so auf g liegen, wie es die Abbildung zeigt.
A wird also in Richtung $\vec{u}_2$ an der Achse schräg gespiegelt.

Dasselbe gilt für alle Geraden mit der Steigung -1. B liegt auf h mit $\overrightarrow{F_2B} = 4 \cdot \vec{u}_2$.
Die Abbildung liefert $\overrightarrow{F_2B}' = -4\vec{u}_2 = \overrightarrow{F_2B'}$. Also wird auch B schräg an der Achse gespiegelt.

Da die Abbildung eine Achse hat, sind alle Geraden in Richtung $\vec{u}_2$ Fixgeraden.
Ihre Richtung nennt man auch die Affinitätsrichtung. Dies ist die Richtung, in der alle Punkte, die nicht auf der Achse liegen, abgebildet werden.

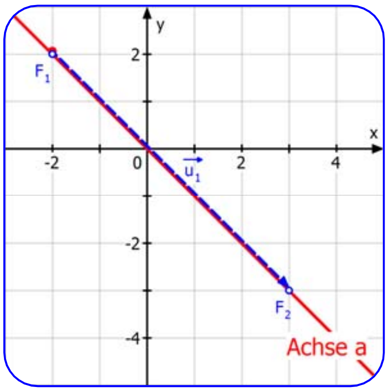
Wie weit Punkte bei der Abbildung dann von der Achse „wegbewegen", das sagt uns der zur $\vec{u}_2$ gehörende Eigenwert. Hier war $k_2 = -1$, d.h. die Bildpunkte liegen auf der anderen Seite der Achse im gleichen Abstand.

2 Die Abbildung $\alpha: \quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

hat die Affinitätsachse $y = x$ und die Eigenvektoren

$\boxed{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ mit $k_1 = 1$, also mit $\vec{u}_1\,' = \vec{u}_1$

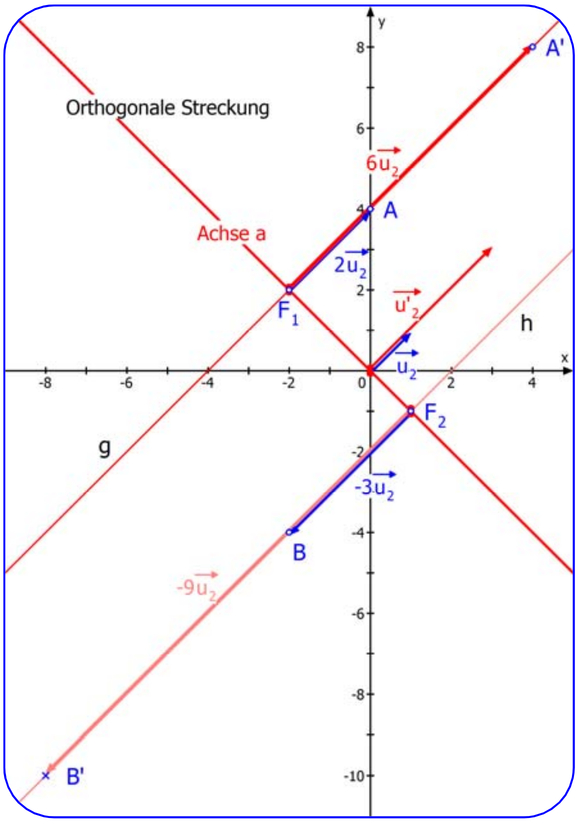
und $\boxed{\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ mit $k_2 = 3$, also mit $\vec{u}_2\,' = 3\vec{u}_2$



Auswertung:

(1) $F_1(-2\,|\,2), F_2(3\,|\,-3)$, allg. $F_a(a\,|\,-a)$ liegen auf der Achse und sind daher Fixpunkte. Ein Vektor wie $\overrightarrow{F_1F_2}$ wird daher auf sich selbst abgebildet, denn die Endpunkte der Pfeile ändern sich ja nicht: $\overrightarrow{F_1F_2}\,' = \overrightarrow{F_1F_2}$.

Alle Vektoren in Achsenrichtungen sind also Eigenvektoren mit dem Eigenwert 1.



(2) Nun betrachten wir Geraden in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also mit der Steigung 1, z. B. $g: \ y = x + 4$

Der Punkt $A(0\,|\,4)$ liegt auf g, und g schneidet die Achse a im Fixpunkt $F_1(-2\,|\,2)$.

Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{F_1A} = 2\vec{u}_2$ ist eine Eigenvektor mit dem Eigenwert 3. Daher gilt für den Bildvektor $\vec{v}\,' = 3\vec{v} = 6\vec{u}_2$. Da F_1 fest bleibt, rückt das Andere Pfeilende auf die dreifache Entfernung von F_1 weg nach A'.

Diese Abbildungsrichtung ist senkrecht zur Achse. Also werden bei dieser Abbildung die nicht auf a liegenden Punkte senkrecht zu a nach außen auf die dreifache Entfernung „weggestreckt".

Das kann man auch am Punkt $B(2\,|\,-4)$ beobachten. Aus $\overrightarrow{F_2B}$ wird $3 \cdot \overrightarrow{F_2B} = \overrightarrow{F_2B'}$.

B wird also auch auf die dreifache Entfernung von a „weggestreckt" nach B'.

Diese Abbildung ist eine **orthogonale Achsenstreckung.**

3 Die Abbildung α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

hat die Affinitätsachse $y = \frac{1}{2}x$ und den einzigen Eigenvektor

$\boxed{\vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ mit $k_1 = 1$, also mit $\vec{u}' = \vec{u}$

Alle Punkte der Achse $y = \frac{1}{2}x$ sind also Fixpunkte. Dazu gehört der Eigenvektor $\vec{u}$.

Doch wenn es Fixgeraden gibt, dann können sie nur Parallelen zur Achse sein.
Würde es nämlich eine Fixgerade in anderer Richtung geben, dann hätten wir einen neuen Eigenvektor in Richtung dieser Fixgeraden gefunden. Den gibt es aber nicht.

Ich beweise nun, dass jede Parallele zur Achse eine Fixgerade ist.

Es sei g: $y = \frac{1}{2}x + n$

Abbildung von g:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4\left(\frac{1}{2}x + n\right) \\ -x + 3\left(\frac{1}{2}x + n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2x + 4n \\ -x + \frac{3}{2}x + 3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4n \\ \frac{1}{2}x + 3n \end{pmatrix}$$

Also ist $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4n \\ \frac{1}{2}x + 3n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 4n & (1) \\ y' = \frac{1}{2}x + 3n & (2) \end{cases}$

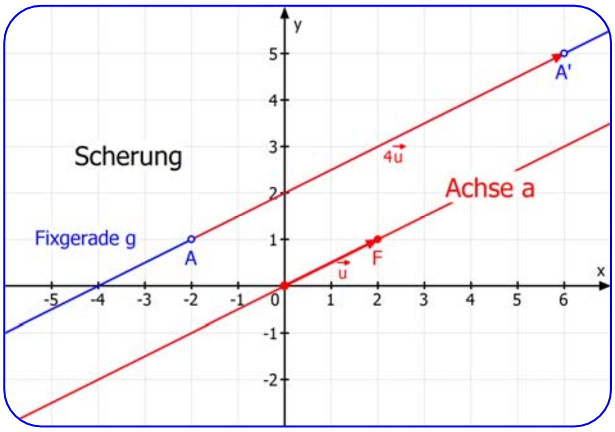
Wir rechnen (1) – 2(2): $x' - 2y' = -2n \Rightarrow 2y' = x' + 2n$

d. h. $y' = \frac{1}{2}x' + n$

Die Bildgerade ist also identisch mit dem Urbild, was zu beweisen war.

Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft (1 Achse und genau 1 Eigenvektor) heißt **Scherung**.
Alle Parallelen zur Achse sind Fixgeraden und die Abbildungsrichtung ist parallel zur Achse.

Die Abbildung zeigt, wie der Punkt $A(-2\,|\,1)$ nach $A'(6\,|\,5)$ abgebildet wird.
Dabei ist $\overrightarrow{AA'} = 4 \cdot \vec{u}$.
Das heißt, die Richtung, in der abgebildet wird, ist die Achsenrichtung, also die von $\vec{u}$.



Dies kann man allgemein so beweisen:

Es sei $P(x\,|\,y)$ und $P'(x'\,|\,y')$. Dann folgt:

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4y - x \\ -x + 3y - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 4y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x + 2y) \cdot 2 \\ (-x + 2y) \cdot 1 \end{pmatrix} = (-x + 2y) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist immer $\overrightarrow{PP'} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \vec{u}$.

Hinweis: Das klappt bei jeder Achsenaffinität. Das heißt man kann so beweisen, dass $\overrightarrow{PP'}$, also die Abbildungsrichtung (= Affinitätsrichtung) immer die Richtung eines Eigenvektors ist.

Diese Typen von Achsenaffinitäten gibt es:

Bevor wir beginnen, machen wir etwas ganz Raffiniertes: Eine Abbildung funktioniert in einer Ebene auch ohne Koordinatensystem. So kann man spiegeln, drehen usw. ohne dass man ein Achsenkreuz benutzt. Wenn wior nun doch eines benötigen, weil wir nachrechnen wollen, dann machen wir es uns doch leicht und legen die x-Achse auf die Fixpunktgerade. Dann wird die Abbildungsgleichung einfach.

Grundaufgabe:

Welche Gleichung hat eine affine Abbildung, wenn die x-Achse Fixpunktgerade ist?

Die allgemeine Form einer affinen Abbildung lautet: $\vec{x}' = U \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Wir legen die x-Achse als Fixpunktgerade fest, wenn wir verlangen, dass der Ursprung und der Punkt $(1|0)$ Fixpunkte sind:

$O(0|0)$ sei Fixpunkt: $\vec{o}' = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad U \cdot \vec{o} + \vec{c} = \vec{o}$

Wegen $U \cdot \vec{o} = U \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$ folgt: $\vec{c} = \vec{o}$

Das gilt immer: Ist der Ursprung Fixpunkt, dann folgt $\vec{c} = \vec{o}$*!*

$P(1|0)$ sei Fixpunkt:

$$U \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 = 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 = 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} a = 1 \\ c = 0 \end{Bmatrix}$$

Ergebnis: Ist die x-Achse Fixpunktgerade, dann lautet die Abbildungsgleichung: $\boxed{\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \vec{x}}$

Berechnung der Eigenvektoren.

Eigenwertsystem: $(U - kE) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ d. h. $\begin{pmatrix} 1-k & b \\ 0 & d-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die charakteristische Gleichung lautet: $\det(U - kE) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-k & b \\ 0 & d-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(1-k) \cdot (d-k) = 0$

Dies ist ein Nullprodukt und liefert als Eigenwerte: $k_1 = 1, \; k_2 = d$.

Hinweis: Weil für eine reguläre Abbildung gelten muss $\det(U) \neq 0$ und hier $\det(U) = d$ ist, kann d nicht Null sein ! zu $k_1 = 1$ lautet der Eigenvektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ s. o.

Nun folgt eine Fallunterscheidung:

1. Fall: Ist d = 1, dann liegt eine Scherung vor (Seite 19).
Die Abbildungsrichtung ist dann parallel zur Achse.
Und alle Parallelen zur Achse sind Fixgeraden.

2. Fall: Ist k_2 = d = -1, dann folgt für das Eigenwertsystem::

$$\begin{pmatrix} 1-\boxed{-1} & b \\ 0 & \boxed{-1}-\boxed{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2u_1 + bu_2 = 0$$

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = -\frac{r}{2} \cdot b$ mit $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}b \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\frac{b}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Ist speziell b = 0, dann ist $\vec{u}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zur Achse.

Dann gilt $\vec{u}_2\,' = -\vec{u}_2$ senkrecht zur Achse.

In diesem Fall ist die Abbildung eine senkrechte Geradenspiegelung an der Achse.

Ist aber $b \neq 0$, dann ist $\vec{u}_2 = r \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ schräg zur Achse mit $\vec{u}_2\,' = -\vec{u}_2$.

In diesem Fall ist die Abbildung eine Schrägspiegelung (Siehe Seite 17).

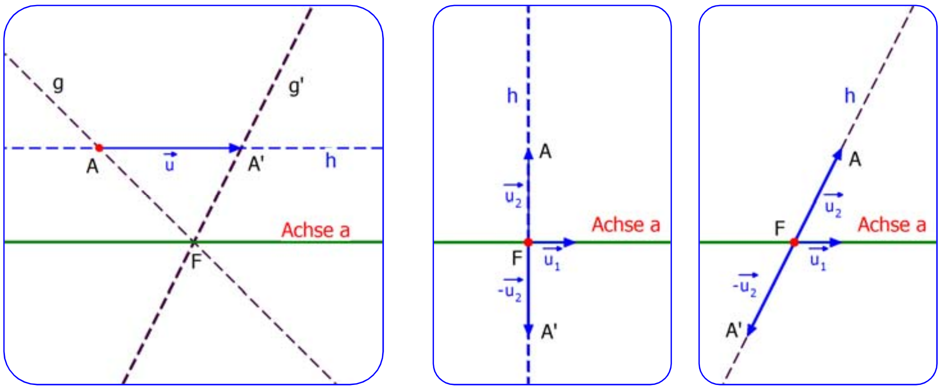
3. Fall: Ist $k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, dann folgt aus $\vec{u}_2\,' = k_2 \cdot \vec{u}$, dass alle nicht auf der Achse liegenden Punkte in Richtung $\vec{u}_2$ …,

… von der Achse weggestreckt werden, wenn $k_2 > 1$ ist,

… auf die Achse zu bewegt werden, wenn $0 < k_2 < 1$ ist

… zusätzlich auf die andere Seite der Achse gespiegelt werden, wenn $k_2 < 0$ ist.

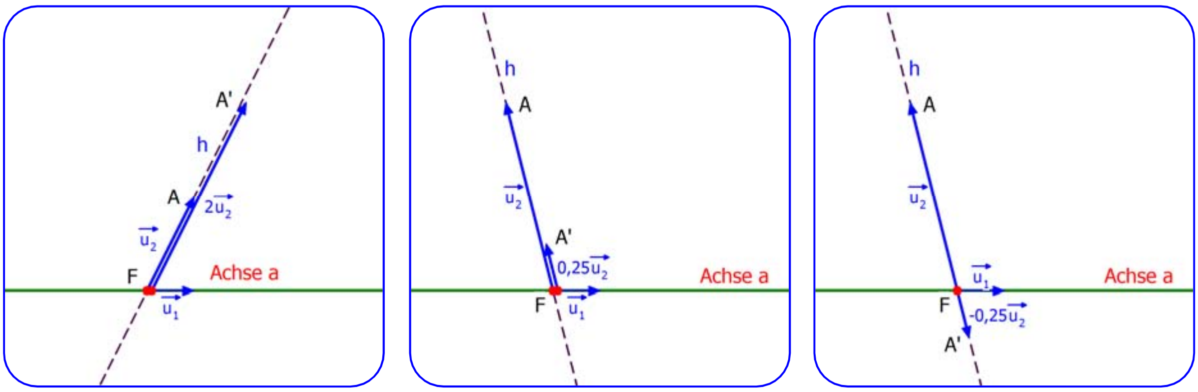
Grafische Darstellung der Achsenaffinitäts-Typen



Alle Abbildung haben eine Achse, also ist der erste Eigenwert 1 und der zugehörige Eigenvektor ist der Richtungsvektor der Achse.

(1) Hat die Abbildung nur einen Eigenwert, dann ist die Abbildungsrichtung parallel zur Achse und jede Gerade (Parallele) in Achsenrichtung ist eine Fixgerade: **Scherung**.

(2) Ist der zweite Eigenwert -1 dann liegt eine Spiegelung an der Achse vor.
Ist $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$, hat man eine **Orthogonalspiegelung**, sonst eine **Schrägspiegelung.**
Die Geraden h in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2$ sind Fixgeraden.



(3) Ist der zweite Eigenwert nicht -1, dann liegt eine affine Streckung vor.
Die Abbildung zeigt den Fall $\vec{u}_2{}' = 2 \cdot \vec{u}_2$ (Eigenwert 2). Dann werden Punkte in Richtung $\vec{u}_2$ von der Achse weggestreckt.

In der mittleren Abbildung ist der Eigenwert $k_2 = \frac{1}{4}$. Die Punkte werden dann in Richtung $\vec{u}_2$ an die Achse herangerückt, so dass der Abstand auf ein Viertel zurückgeht.
Man spricht dann auch von einer Stauchung.

In der rechten Abbildung ist der zweite Eigenwert negativ. Dann liegen Punkt und Bildpunkt zusätzlich noch auf verschiedenen Seiten der Achse. Zusätzlich zu einer Streckung oder Stauchung ist also noch eine Spiegelung beteiligt.