Affine Abbildungen

* Übersicht *

Kompakte Zusammenstellung der Ergebnisse

mit Verweisen auf die Quellen in den ausführlichen einzelnen Thementexte.

Datei Nr. 21 300

Stand 9 August 2015

FRIEDRICH W. BUCKEL

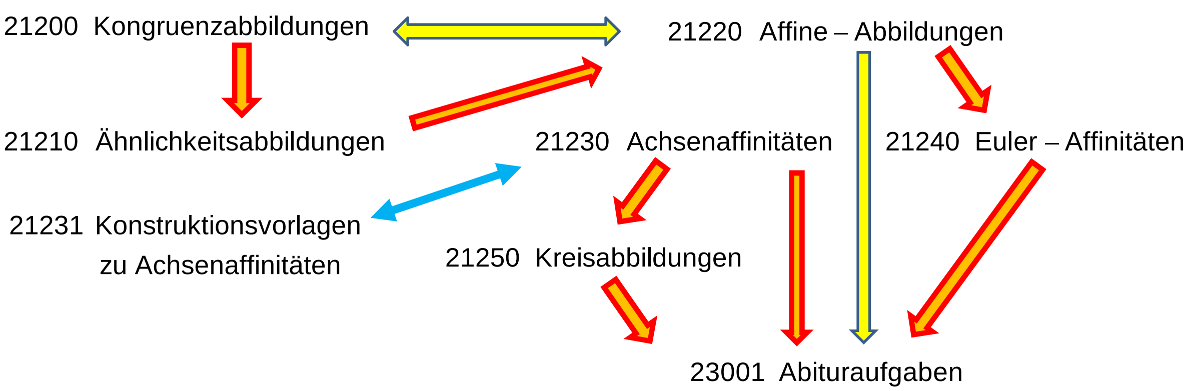
INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text gibt eine Übersicht über das Thema „Affine Abbildungen“. Es ist so umfangreich, dass ich es in mehrere Einzeltexte gegliedert habe. Vorliegender Text gibt eine kompakte Übersicht über die Thematik, also mit nur wenigen Beispielen und ohne Trainingsmaterial. Dazu wird jeweils auf die anderen Texte verwiesen, die alles ganz ausführlich behandeln und mit Beispielen unterlegen.

21300 Übersichtstext: affine Abbildungen



Manche Leser beginnen mit den Kongruenzabbildungen und verallgemeinern dann. Andere beginnen mit der allgemeinen affinen Abbildung und erforschen dann erst die speziellen Abbildungen wie Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeitsabbildungen usw.
Um jedem seinen individuellen „Leseweg“ zu ermöglichen, schreibe ich diese Texte ziemlich unabhängig voneinander. Daher wird sich manches wiederholen, was ja dem Lernprozess auch nicht schaden wird.

Diese Serie von Texten ist der Oberstufe gewidmet – sofern dieses schöne Thema überhaupt noch schulrelevant ist. Viele Bundesländer haben es gestrichen, einige führen es als Wahlthema.

Inhalt

1 Definition: Affine Abbildung

Quelle: Text 21220 „Affine Abbildungen 3“ - Seiten 4 und 5

Eine affine Abbildung ist eine Abbildung des affinen Raums (hier der Zeichenebene) auf sich.

Eine **affine Abbildung** ordnet jedem Punkt $P(x\,|\,y)$ einen Bildpunkt $P'(x'\,|\,y')$ zu durch $\vec{x}\,' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c}$.

Voraussetzung ist, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

Diese lineare Unabhängigkeit ist dann gewährleistet, wenn $\vec{b} \neq k\cdot\vec{a}$ ist,

oder wenn die aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildete Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Die Abbildungsgleichung kann auch

als Gleichungssystem geschrieben werden: $\left\{\begin{matrix} x' = x\cdot a_1 + y\cdot b_1 + c_1 \\ y' = x\cdot a_2 + y\cdot b_2 + c_2 \end{matrix}\right\}$

oder als Matrixgleichung: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Beispiel: α: $\vec{x}\,' = x\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ordnet dem Punkt $P(4\,|\,3)$ den Bildpunkt $P'(17\,|\,-1)$ zu:

1. Möglichkeit: Berechnung wie gezeigt durch die Vektorgleichung

$\vec{x}\,' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c}$

$$P(4\,|\,3) \rightarrow \vec{x}\,' = \boxed{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(17\,|\,-1)$$

2. Möglichkeit: Berechnung durch ein Gleichungssystem:

$\left\{\begin{matrix} x' = x\cdot a_1 + y\cdot b_1 + c_1 \\ y' = x\cdot a_2 + y\cdot b_2 + c_2 \end{matrix}\right\}$

$$P(4\,|\,3) \rightarrow \left\{\begin{matrix} x' = \boxed{4}\cdot 2 + \boxed{3}\cdot 3 = 17 \\ y' = \boxed{4}\cdot(-1) + \boxed{3}\cdot 1 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P'(17\,|\,-1)$$

3. Möglichkeit: Berechnung durch Matrizenrechnung:

$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$P(4\,|\,3) \rightarrow \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boxed{4} \\ \boxed{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\boxed{4} + 3\cdot\boxed{3} \\ -1\cdot\boxed{4} + 1\cdot\boxed{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(17\,|\,-1)$$

Der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ gibt den Bildpunkt des Koordinatenursprungs $O(0\,|\,0)$ an.

Ist $\vec{c} = \vec{o}$, dann ist O ein Fixpunkt.

2 Eigenschaften affiner Abbildungen

Quelle: Text 21220 „Affine Abbildungen 3“ - Seiten 13 bis 21

Jede affine Abbildung

bildet eine Gerade auf eine Gerade ab (ist also geradentreu),

bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab (ist parallelentreu),

ändert Teilverhältnisse nicht (ist verhältnistreu),

ändert den Flächeninhalt eines Vielecks mit der Determinante:

$$A' = |\det(A)| \cdot A$$

Ist also $\det(A) = \pm 1$, dann liegt eine **flächentreue Abbildung** vor.

Beispiele **flächentreuer Abbildungen** sind Kongruenzabbildungen und Scherungen.

Eine affine Abbildung mit der Gleichung $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ bildet Punkte bzw. deren Ortsvektoren ab.
Will man Richtungsvektoren abbilden (die keine Ortsvektoren darstellen sollen), entfällt der Vektor $\vec{c}$.
Man spricht dann von der **affinen Vektorabbildung**: $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$

Die affine Vektorabbildung ist eine **lineare Abbildung**:

Schreibt man die affine Vektorabbildung so: $\alpha(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$.

dann gilt

(1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$ $\quad A \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v}$

(2) $\alpha(r\vec{u}) = r \cdot \alpha(\vec{u})$ $\quad A \cdot (r\vec{u}) = r \cdot (A \cdot \vec{u})$

3 Fixpunkte

Quelle: Text 21220 „Affine Abbildungen 3“ - Seiten 22 bis 24

Affine Abbildungen können
(1) keinen Fixpunkt
(2) genau einen Fixpunkt
(3) unendlich viele Fixpunkte haben, die auf einer Geraden liegen (**Fixpunktgerade oder Achse)**.
(4) Die identischen Abbildung hat NUR Fixpunkte.

Beweis

Gegeben ist α durch $\vec{x}\,' = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{c}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}\,' = \vec{x}$

Dies führt zu $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{c} = \vec{x}$ d. h. $x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

bzw. als Gleichungssystem: $\left\{ \begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 = x \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = y \end{matrix} \right\}$

Umgestellt: $\left\{ \begin{matrix} (a_1 - 1) \cdot x + \quad b_1 \cdot y = -c_1 \\ a_2 \cdot x + (b_2 - 1) \cdot y = -c_2 \end{matrix} \right\}$

Jetzt benötigt man die Grundlagen über lineare Gleichungssysteme (Text 61012 z.B. Seite 15):

Ist die Determinante dieses Gleichungssystems ungleich 0, dann gibt es laut Cramerscher Regel eine eindeutige Lösung, also genau einen Fixpunkt.

Ist aber $D = \begin{vmatrix} a_1 - 1 & b_1 \\ a_2 & b_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$, dann gibt es entweder keine Lösung, oder unendlich viele Lösungen.

Affine Abbildungen mit einer Fixpunktgeraden nennt man **Achsenaffinitäten**.

Sie haben besondere Eigenschaften und lassen sich gut konstruieren.

Quelle: Text 21230 „Achsenaffinitäten“ und Text 21231 „Konstruktionsvorlagen“

Affine Abbildungen mit genau einem Fixpunkt und zwei linear unabhängigen Eigenvektoren (Siehe Abschnitt 4) nennt man **Euler-Affinitäten**.

Sie haben besondere Eigenschaften und lassen sich gut konstruieren.

Quelle: Text 21240 „Euler-Affinitäten“

4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Quelle: Text 21220 „Affine Abbildungen 3“ - Seiten 25 bis 32

Definition:

Vektoren, deren Bildvektor ein Vielfaches ist, nennt man Eigenvektoren.

Den Nullvektor schließt man dabei stets aus.

Gilt $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, dann nennt man k den Eigenwert des Eigenvektors.

Berechnung von Eigenvektoren:

Gegeben ist eine affine Vektorabbildung durch $\vec{u}' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}$.

Die Bedingung $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$ für Eigenvektoren führt auf $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}$ (1)

WISSEN: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ heißt Einheitsmatrix. Für sie gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

Daher kann man Gleichungen (1) so schreiben: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}$

d. h. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ bzw. $\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{u} = \vec{o}$

oder $\begin{pmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$. Als Gleichungssystem: $\left\{ \begin{matrix} (a_1 - k) \cdot u_1 + b_1 \cdot u_2 = 0 \\ a_2 \cdot u_1 + (b_2 - k) \cdot u_2 = 0 \end{matrix} \right\}$ (2)

Bei der Lösung mit Determinanten (Cramersche Regel) muss man Folgendes beachten:

Weil das System homogen ist (Absolutglieder sind 0), wird $D_1 = D_2 = 0$.
Wäre die Nennerdeterminante $D \neq 0$, so würde nach Cramer folgen:

$u_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{D} = 0$ und $u_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{D} = 0$, also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies wird aber ausgeschlossen.

Daher muss man für eine nicht-triviale Lösung (d. h. für eine Lösung $\vec{u} \neq \vec{o}$) verlangen, dass die Determinante D = 0 sein muss:

Diese Gleichung heißt **charakteristische Gleichung**: $\det(A - k \cdot E) = 0$

bzw. $\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0$

Sie ergibt eine quadratische Gleichung für k und besitzt daher 0, 1 oder 2 Lösungen.

Die Lösungen sind die **Eigenwerte k.**

Setzt man sie in (2) ein, dann entsteht ein Gleichungssystem, dessen Lösungsvektoren die gesuchten Eigenvektoren sind.

Merke: **Mit einem Eigenvektor sind auch alle seine Vielfachen Eigenvektoren.**

5 Fixgeraden

Quelle: Text 21220 „Affine Abbildungen 3" - Seiten 33 bis 49

Eine Gerade, die mit ihrem affinen Bild zusammenfällt, heißt Fixgerade der Abbildung.

Es gibt zwei verschiedene Arten von Fixgeraden:

(1) Bleibt die Gerade punktweise fest (d. h. jeder ihrer Punkte ist ein Fixpunkt), dann heißt sie Fixpunktgerade oder Achse.

(2) Liegen die Bildpunkte von Punkten der Fixgeraden wieder auf der Geraden, aber eventuell an anderer Stelle, dann ist dies einfach nur eine Fixgerade.

Achsen (Fixpunktgeraden) sind also spezielle Fixgeraden.

Berechnet man die Gleichung einer Bildgeraden, dann muss diese, wenn es sich um eine Fixgerade handelt, dieselbe Richtung haben wie das Urbild. Dazu reicht es, wenn der Bildvektor des Richtungsvektors ein Vielfaches des alten Richtungsvektors ist.

Mit anderen Worten: **Fixgeraden können nur die Richtung von Eigenvektoren haben. Wenn eine affine Abbildung keine Eigenvektoren besitzt, dann hat sie keine Fixgeraden.**

Man findet also Fixgeraden etwa so, dass man zuerst die Fixpunkte bestimmt.
Eine Gerade durch einen Fixpunkt in Richtung eines Eigenvektors ist dann sicher eine Fixgerade.

Dabei sind vor allem folgende Fälle von Bedeutung:

1. **Zum Eigenwert 1 gehört immer eine Fixpunktgerade (Achse), welche die Richtung des zugehörenden Eigenvektors hat. Dann werden alle Punkte in einer festgelegten Richtung abgebildet. Man nennt sie Affinitätsrichtung.**
   Gibt es keinen zweiten Eigenwert (also ist k = 1 eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung), dann nennt man die Abbildung eine **Scherung.** Die Affinitätsrichtung ist dann parallel zur Affinitätsachse.
   Gibt es einen zweiten Eigenwert $\neq 1$, dann werden alle nicht auf der Achse liegenden Punkte in Richtung des zugehörenden zweiten Eigenvektors abgebildet. Dies ist dann die Affinitätsrichtung, und die Abbildung heißt **Parallelstreckung**.

Quelle: Text 21230 „Achsenaffinitäten"

2. **Gibt es nur einen einzigen Fixpunkt und zwei verschiedene Eigenwerte, also auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren, dann spricht man von einer Euler-Affinität.**

   Sie hat genau zwei Fixgeraden durch den Fixpunkt in Richtung der Eigenvektoren.

Quelle: Text 21240 „Euler-Affinitäten"

6 Spezielle affine Abbildungen

Quellen: Text 21220 „Affine Abbildungen 3" - Seiten 13 bis 21

Text 21200 „Kongruenzabbildungen" (Aufstellen der Gleichungen, Analyse der Gleichungen = Erkennen der Abbildung)

Text 21210 „Ähnlichkeitsabbildungen" (Zentrische Streckungen, Verkettung von Kongruenzabbildungen mit zentr. Streckung, Konstruktionen, Analyse der Gleichungen)

Text 21230 „Achsenaffinitäten" mit speziellen Konstruktionen

Text 21240 „Euler-Affinitäten" mit speziellen Konstruktionen

(1) Eine **Kongruenzabbildung** liegt vor, wenn in $\vec{x}' = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{c}$ gilt:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \quad \text{und} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Spezielle Kongruenzabbildungen sind

Verschiebungen: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \vec{x} + \vec{c}$ also $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ mit $\vec{c} \neq \vec{o}$

Drehungen: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$

allgemein: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) = 1

Der Fixpunkt ist das Drehzentrum.

Geradenspiegelungen: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$

allgemein: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & -a_1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) = -1 und Fixpunktgerade

und Gleitspiegelungen: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & -a_1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) = - 1 ohne Fixpunkte.

(2) Eine **Ähnlichkeitsabbildung** liegt vor, wenn in $\vec{x}' = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{c}$ gilt:

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Spezielle Ähnlichkeitsabbildungen sind

Alle Kongruenzabbildungen, obwohl man die hier eigentlich nicht „sucht" …

Zentrische Streckungen: $\vec{x}' = k \cdot \vec{x} + \vec{c}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

Ist $\vec{c} = \vec{o}$, dann ist $O(0\,|\,0)$ das Streckzentrum, sonst der Fixpunkt.

Ist Z das Streckzentrum, dann geht man so vor:

Ansatz: $\boxed{\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}}$.

Darstellung durch Ortsvektoren: $\vec{x}' - \vec{z} = k \cdot (\vec{x} - \vec{z})$

Daraus folgt: $\vec{x}' = \vec{z} + k \cdot (\vec{x} - \vec{z})$ oder $\vec{x}' = \vec{z} + k\vec{x} - k\vec{z}$

bzw. $\boxed{\vec{x}' = k\vec{x} + (1-k)\vec{z}}$

oder mit Koordinaten: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + (1-k)z_1 \\ ky + (1-k)z_2 \end{pmatrix}$

Drehstreckung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) > 0 aber $\neq 1$

Durch Ausklammern des Streckfaktors k kommt man auf

$\vec{x}' = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) = 1.

Streckspiegelung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) < 0 aber $\neq -1$

Durch Ausklammern des Streckfaktors k kommt man auf

$\vec{x}' = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit det(A) = -1.

(3) Eine **Achsenaffinität** liegt vor, wenn die Abbildung eine Fixpunktgerade (Achse) besitzt.

Dann werden alle nicht auf der Achse liegenden Punkte in derselben Richtung abgebildet.

Diese sogenannte **Affinitätsrichtung** kann man auf zweierlei Arten bestimmen:

a) $\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \ldots$ berechnen

b) Die Eigenvektoren bestimmen. Zur Achse gehört der Eigenvektor mit dem Eigenwert 1, für den also gilt $\vec{u}' = \vec{u}$. Die Affinitätsrichtung wird durch den zweiten Eigenvektor angegeben. Hat die affine Abbildung 1 als doppelten Eigenwert, dann gibt es auch nur einen Eigenvektor, das bedeutet, dass die Affinitätsrichtung die Richtung der Achse ist. Es liegt dann eine Scherung vor.

Beispiel: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ hat die x-Achse als Fixpunktgerade und die Affinitätsrichtung

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = x \cdot \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \left(x \cdot \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Fixgeraden sind alle Geraden in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$: $\vec{x} = \vec{x}_1 + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder $y = -3x + c$

(4) Eine **Euler-Affinität** liegt vor, wenn die Abbildung genau einen Fixpunkt und zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, also zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

Beispiel: $\alpha:$ $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$. Zeige, dass α eine Euler-Affinität ist.

Bestimmung der Fixpunkte $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3{,}2x - 0{,}4y = x \\ 0{,}6x + 1{,}8y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2{,}2x - 0{,}4y = 0 & (1) \\ 0{,}6x + 0{,}8y = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

$2 \cdot (1) + (2)$: $5x = 0 \Rightarrow x_F = 0$. In (1): $y_F = 0$. $F(0 \mid 0)$ ist einziger Fixpunkt.

Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 3{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3{,}2-k & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bedingung für nicht-triviale Lösungen ist die **charakteristische Gleichung**:

$$\begin{vmatrix} 3{,}2-k & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \qquad \text{Eigenwerte: } k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Eigenvektoren zu $k_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 3{,}2-3 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -1{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0{,}2u_1 - 0{,}4u_2 = 0 \\ 0{,}6u_1 - 1{,}2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $u_1 - 2u_2 = 0$.

Wähle $u_2 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 3 \cdot \vec{u}$

Eigenvektoren zu $k_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 3{,}2-2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1{,}2u_1 - 0{,}4u_2 = 0 \\ 0{,}6u_1 - 0{,}2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$ führt zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ 3s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

mit $\vec{v}' = 2 \cdot \vec{v}$

Ergebnis: α hat genau einen Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren, ist also eine **Euler-Affinität**.

α hat die Fixgeraden: s_1: $\vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = \frac{1}{2}x$ und s_2: $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 3x$

7 Normalform affiner Abbildungen

Quellen: Text 21220 „Affine Abbildungen 3“ - Seiten 59 bis 62
Text 21230 „Achsenaffinitäten“ - Seiten 13 bis 14
Text 21240 „Euler-Affinitäten“ - Seiten 15 bis 22

Abbildungen mit zwei verschiedenen Eigenwerten

Gegeben sei die affine Abbildung α durch die Matrixgleichung $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$.

k_1 und k_2 seien die beiden Eigenwerte und $\vec{u}, \vec{v}$ die zugehörigen Eigenvektoren.

Dann gilt $\vec{u}' = k_1 \cdot \vec{u}$ und $\vec{v}' = k_2 \cdot \vec{v}$.

Dann verwendet man als neues Koordinatensystem einen Fixpunkt und die Eigenvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ als Basisvektoren.

In diesem System hat die affine Abbildung die einfache Gleichung

$$\vec{x}' = a \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Die eckigen Gleichungen sollen darauf hinweisen, dass man sich im $\vec{u} - \vec{v} -$System befindet.

Liegt speziell eine Achsenaffinität vor, dann ist $k_1 = 1$. Sind die Eigenwerte verschieden, handelt es sich um eine Euler-Affinität.

Abbildungen mit genau einem Eigenwert

Gegeben sei die affine Abbildung α durch die Matrixgleichung $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$.

k sei der einzige Eigenwert und $\vec{u}$ der zugehörige Eigenvektor.

Dann gilt $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$

Das „geeignete“ Koordinatensystem besteht dann aus dem Ursprung O, dem als Basisvektor verwendeten Eigenvektor $\vec{u}$ und einem zweiten von $\vec{u}$ unabhängigen Vektor.

Hat ein Punkt in diesem neuen System die Koordinaten $P[a \,|\, b]$ (eckige Klammern zur Unterscheidung), dann heißt das, dass für seinen Ortsvektor gilt: $\vec{x} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Die Umrechnung der Abbildungsgleichung führt auf $\vec{x}' = \begin{bmatrix} k & r \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

Das ist dann die vereinfachte, sogenannte **Normalform der affinen Abbildung**.

Liegt speziell eine **Scherung** vor, die ja nur den Eigenwert k = 1 hat, dann lautet deren Normalform: $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

8 Verkettungen und Umkehrabbildungen

Quelle: Text 21220 „Affine Abbildungen 3“ - Seiten 50 bis 55

Führt man zwei affine Abbildungen nacheinander aus, dann spricht man auch von einer Verkettung. Es zeigt sich, dass hierfür die Matrixdarstellung der Abbildungen geeignet ist.

Es sei α die affine Abbildung $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x}+\vec{c}$

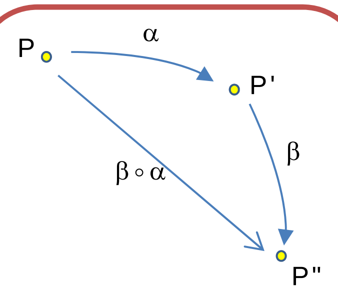
und β die affine Abbildung $\vec{x}\,' = B\cdot\vec{x}+\vec{d}$.

Will man α zuerst ausführen und dann β, dann muss man die Abbildungsgleichung von β anpassen:

$$\beta: \qquad \vec{x}\,'' = B\cdot\vec{x}\,'+\vec{d}$$

Dann kann man einsetzen und so die Verkettung realisieren:

$$\beta\circ\alpha: \qquad \vec{x}\,'' = B\cdot\left(A\cdot\vec{x}+\vec{c}\right)+\vec{d} \qquad (1)$$



Schema einer Verkettung

Die Schreibweise $\beta\circ\alpha$ bedeutet „β nach α“. Viele meinen zuerst , dass hier die Reihenfolge nicht stimmt. Aber wenn man sich die rechte Seite der Abbildungsgleichung ansieht, erkennt man, dass dies genau zur Reihenfolge der zu multiplizierenden Matrizen passt.

Auch diese Schreibweise zeigt dies:

α bildet P in $P' = \alpha(P)$ ab.
β bildet P', also $\alpha(P)$ in $\beta(P')$ ab, also in $\beta(a(P))$.
Die Verkettung ergibt also $P'' = \beta(\alpha(P))$.

(1) kann man gemäß den Gesetzen der Matrizenrechnung umstellen:

$$\vec{x}\,'' = B\cdot\left(A\cdot\vec{x}\right)+B\cdot\vec{c}+\vec{d} \qquad (2)$$

Hier wird die Matrix B mit dem Produkt $A\vec{x}$ (was ja ein Vektor ist) multipliziert.
Dieses Produkt kann man auch so berechnen: $B\cdot\left(A\cdot\vec{x}\right) = \left(B\cdot A\right)\cdot\vec{x}$, dann folgt

$$\vec{x}\,'' = \left(B\cdot A\right)\cdot\vec{x}+B\cdot\vec{c}+\vec{d} \qquad (3)$$

Hier wird die Matrizenmultiplikation benötigt, die man nach diesem Schema ausführt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \square & \square \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & \square \\ f & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot e+b\cdot f & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ \square & \square \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \square & f \\ \square & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & a\cdot f+b\cdot h \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & \square \\ g & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ c\cdot e+d\cdot g & \square \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \square & \square \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \square & f \\ \square & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & c\cdot f+d\cdot h \end{pmatrix}$$

z. B .
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+1 & -4+2 \\ -4+3 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & -3+0 \\ 2+0 & -2-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -22 \end{pmatrix}$$

Beispiel: α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ β: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\beta \circ \alpha$: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3-1+2 \\ 1+3+0 \end{pmatrix}$

$\alpha \circ \beta$: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Man erkennt, dass verkettete Abbildungen in der Regel <u>nicht vertauschbar</u> sind!

Die **identische Abbildung „id“** hat die Gleichung

id: $\vec{x}' = \vec{x}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ bzw. $\vec{x}' = E \cdot \vec{x}$ mit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wenn man eine Abbildung α ausführt und anschließend ihre **Umkehrabbildung** α^{-1}, dann sind alle Punkte wieder an ihrem ursprünglichen Platz. Das heißt aber, dass diese Verkettung $\alpha \circ \alpha^{-1}$ die identische Abbildung darstellt. $\alpha \circ \alpha^{-1} = id$ und $\alpha^{-1} \circ \alpha = id$

Zur Umstellung der Abbildungsgleichung $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ nach $\vec{x}$ benötigt man die inverse Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = E$ bzw. $A^{-1} \cdot A = E$

Gegeben sei α durch $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Multiplikation mit A^{-1} <u>von links</u>. $A^{-1} \cdot \vec{x}' = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{c})$

Rechts ausmultiplizieren: $A^{-1} \cdot \vec{x}' = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot \vec{x} + A^{-1} \cdot \vec{c}$

Wegen $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$: $A^{-1} \cdot \vec{x}' = \vec{x} + A^{-1} \cdot \vec{c}$

Ergebnis: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x}' - A^{-1} \cdot \vec{c}$

Die **inverse Matrix** zu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Beispiel:

Gegeben ist α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

d. h. $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ $\quad | \cdot A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ von links

$A^{-1} \cdot \vec{x}' = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{c})$

$A^{-1} \cdot \vec{x}' = \vec{x} + A^{-1}\vec{c}$

Umkehrabbildung: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x}' - A^{-1} \cdot \vec{c}$

Es folgt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}' - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ergebnis: α^{-1}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}' + \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \end{pmatrix}$