Wahrscheinlichkeitsrechnung

Teil 2

Einführung in die Grundbegriffe

Mehrstufige Ereignisse
Baumdiagramme

Datei Nr. 31102

Stand 8. Januar 2016

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Hinweise zum Inhalt

Die Behandlung mehrstufiger Experimente kann schon in 6 beginnen, denn einfache Aufgaben erfordern nur einfaches Bruchrechnen, und die Baumdiagramme mit ihren Regeln sind leicht zu handhaben.
Im vorliegenden Text gibt es einfache bis schwere Aufgaben.
Das spürt man vor allem in 5.3, wo Solange-Bis-Aufgaben so schwierig werden können, dass man sie nur noch in der Oberstufe lösen sollte, weil man dazu geometrische Reihen benötigt.
Diesen Schwierigkeitssprung habe ich hier nicht gemacht. Vielmehr wird diese Aufgabenform im Sondertext 31211 ausführlich behandelt.

Die kleine Aufgabensammlung am Ende (§7) soll nur einen Vorgeschmack geben.
Weitere Aufgaben entnehme man den Aufgabensammlungen, die im Moment unter den Nummern 32111 und 31212 zu finden sind.

Inhalt

Wichtige Hinweise zur Schreibweise von Ereignissen

Das Ziehen von Karten aus einem Stapel, das mehrfache Würfeln nacheinander, oder das Ermitteln von Buchstaben nacheinander, aus denen man dann ein Wort bildet usw. sind mehrstufige Experimente. Weil es dabei auf die Reihenfolge der einzelnen „Ziehungen“ ankommt, muss man auch durch die Schreibweise ausdrücken, dass die Reihenfolge durch das Ziehen festgelegt und nicht verändert werden darf. Dazu gibt es verschiedene Schreibweisen.

Die gebräuchlichste sind die geordneten Paare, Tripel usw.

a) Man zieht aus einem Kartenstapel der Reine nach Karten mit den Farben rot, schwarz, rot. Dann drückt man dieses Ergebnis durch das Tripel (r,s,r) aus. Günstiger sind meist die Schreibweisen $(r;s;r)$ oder $(r\,|\,s\,|\,r)$, vor allem dann wenn man statt Buchstaben Zahlen hat, um nicht das Dezimalkomma zu verwechseln. Man kann aber auch – wenn keine Verwechselungsgefahr besteht die Buchstaben zu einem Wort aneinanderfügen und dieses Ziehungsergebnis durch rsr ausdrücken.

   Falsch sind jedoch die Schreibweisen $\{r,s,r\}$ oder $\{r;s;r\}$, denn sie stellen eine Menge mit drei Elementen dar, und in ihr darf man die Elemente vertauschen und muss sogar doppelte weglassen. Somit gilt für Mengen: $\{r,s,r\} = \{r,r,s\} = \{s,r,r\} = \{r,s\} = \{s,r\}$.

b) Beispiel 1: Aus einem Stapel mit 6 Karten, auf denen die Buchstaben A,B,E,M,U,S aufgedruckt sind, werden 4 Karten zufällig entnommen und nach jedem Zug wieder zurückgelegt. Man notiert die gezogenen Buchstaben und bildet daraus ein Wort.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dreimaligem Ziehen von 4 Karten dieses Ereignis: $E = \{maus, saum, mumm, baum\}$?
   Hier bewährt sich die abkürzende Schreibweise gegenüber der gebräuchlichsten Form:
   $E = \{(m;a;u;s),(s;a;u;m),(m;u;m;m),(b;a;u;m)\}$
   Man darf nur nicht das Ziehungsergebnis „saum“ in der Form $\{s;a;u;m\}$ als Menge schreiben, dann ist die Reihenfolge der Ziehungen nicht mehr festgelegt, denn es gilt ja:
   $\{s;a;u;m\} = \{m;a;u;s\} = \{a;u;m;s\} = ...$

c) Beispiel 2: Aus drei Würfelergebnissen kann man jeweils eine dreistellige Zahl bilden:
   $A = \{115;666;254;515;246\}$. Dies war ein Ergebnis von fünf Dreierwürfen.
   Hier wird auch klar, dass in $\{2,3;4\}$ nur zwei Ergebnisse stehen, nämlich die Zahl 2,3 und die Zahl 4!

Friedrich Buckel im November 2009

§ 2 Mehrstufige Experimente

2.1 Einführung

Man kann ein Zufallsexperiment mehrfach nacheinander ausführen, Dann erweitert sich die Vielfalt der Ereignisse enorm. Dazu folgen einige Beispiele (zunächst noch ohne Rechnungen), damit man eine Vorstellung davon bekommt.

Beispiel 1: **Man würfelt 3-mal mit einem Würfel.**

Dann kann man die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse berechnen:

A: Man hat dreimal eine 6 gewürfelt

B: Man hat insgesamt die Augensumme 12 erhalten

C: Die 3. Zahl war eine 1

D: Man hat das Ergebnis 1-3-6 gewürfelt.

Beispiel 2: **Man würfelt einmal mit drei Würfeln.**

Haben dann die Ereignisse A bis D ais Beispiel 1 dieselben Wahrscheinlichkeiten?

Beispiel 3: **Kugeln ziehen**

In einem Topf sind 8 Kugeln, welche die Buchstaben A, B, L, A, L, M, Z, H tragen.
Man entnimmt nun der Reihe nach 4 Kugeln und legt sie nebeneinander auf den Tisch.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man das Wort BALL bzw. das Wort ZAHL?
Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn man nach jedem Zug die Kugel wieder in das Gefäß zurücklegt?

Beispiel 4: **Kleiderchaos**

Man kann auch ganz unterschiedliche Stufen hintereinander schalten:
In der Schublade 1 befinden sich 3 paar schwarze Socken, 2 Paar weiße Socken und 1 Paar rote Socken. In Schublade 2 befinden sich Unterhemden: 5 weiße und 3 graue.
Peter greift im Dunkeln in die erste Schublade und entnimmt ein Paar Socken, und dann in die zweite für ein Unterhemd. Jetzt können verschiedene Kombinationen entstehen, deren Wahrscheinlichkeit sich berechnen lassen.

Von großer Bedeutung sind diejenigen Zufallsexperimente, die genau zwei mögliche Ergebnisse haben. Etwa:

Eine Münze werfen:	Wappen oder Zahl
Basketball werfen:	Treffer oder Niete
Gewinnen oder verlieren	
usw.	

Definition:

Ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ausgängen heißt Bernoulli-Experiment.

Führt man ein Bernoulliexperiment mehrfach nacheinander aus, und bleiben dabei die Wahrscheinlichkeiten für die Ausgänge unverändert, dann spricht man von einer Bernoulli-Kette. Beispielsweise kann man eine Münze 10-mal nacheinander werfen. Das ist dann eine 10-stufige Bernoulli-Kette. Oder man erhält 2 Freiwürfe im Basketball: Zweistufige Bernoulli-Kette.

Definition:

Ändert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei der Wiederholung eines Bernoulli-Experiments nicht und wiederholt man das Experiment n-mal, so heißt diese Wiederholung eine n-stufige Bernoulli-Kette und kann wie ein einziges Experiment betrachtet werden

Folgendes Experiment ist <u>keine</u> Bernoullikette:

In einem Kartenstapel sind 10 rote und 8 schwarze Karten.
Man zieht 5-mal nacheinander eine Karte, liegt sie aber nicht mehr zurück.
Es ist keine 5-stufige Bernoulli-Kette, denn die Wahrscheinlichkeit für rot oder schwarz ändert sich mit jedem Zug, weil man durch jeden Zug den Inhalt des Stapels verändert.
Würde man eine gezogene Karte wieder zurücklegen, läge eine Bernoulli-Kette vor.

Die Bernoulliketten werden unter dem Thema Binomialverteilung noch ausführlich behandelt. Sie lassen sich gut berechnen. Mehr dazu in 34010.

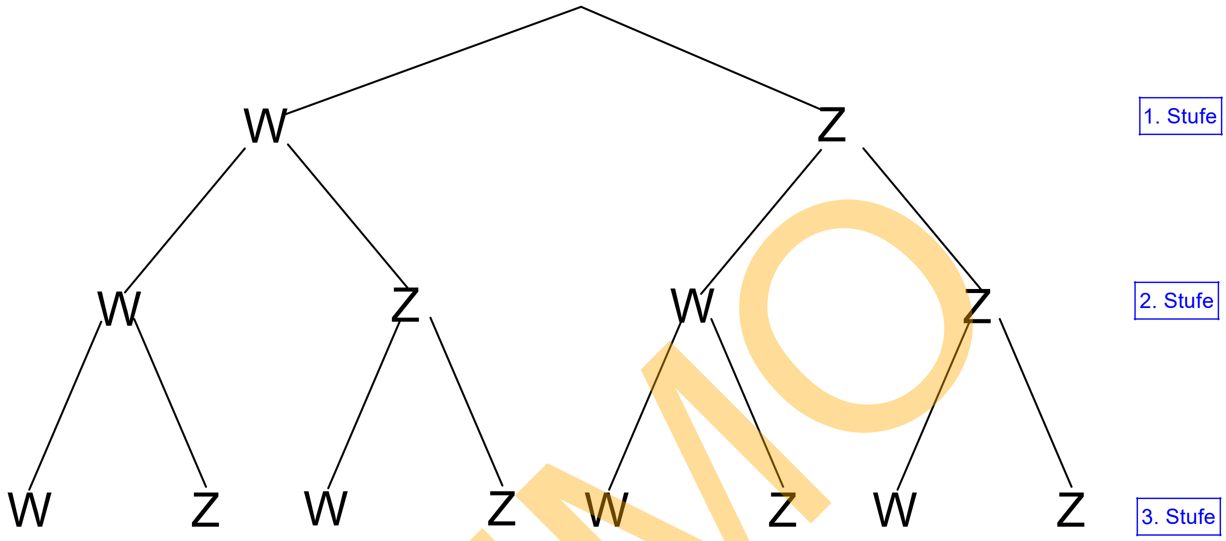
An dieser Stelle gehe ich noch nicht darauf ein, weil die nötigen Grundlagen (Pfadregeln) dazu erst noch folgen.

Grundsatzfrage: Welche Ergebnisse hat ein mehrstufiges Experiment?

Beispiel 5: Münze werfen

Eine Münze zeigt nach jedem Wurf das Ergebnis W und Z (Wappen und Zahl).
Durch ein **Baumdiagramm** kann man Übersicht über die Ergebnisse z. B. dreier Würfe verschaffen.

So sieht ein **hängendes Baumdiagramm** aus:



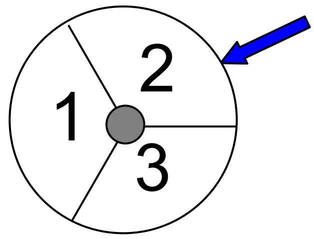
Man erkennt, dass nach der 2. Stufe bereits 4 Ergebnisse vorhanden sind:
Die Ergebnismenge lautet bis dahin $S_2 = \{(W \mid W), (W \mid Z), (Z \mid W), (Z \mid Z)\}$
oder einfacher so: $S_2 = \{WW, WZ, ZW, ZZ\}$

Wichtig ist, dass man beachtet, dass die Reihenfolge von Bedeutung ist.

Das Ergebnis WZ ist etwas anderes als ZW, weil der erste Buchstabe das beim 1. Wurf erzielte Ergebnis ist und der 2. Buchstabe zum 2. Wurf gehört.

Beim Dreifachwurf liegen dann bereits 8 Ergebnisse vor usw.

Beispiel 6: Glücksrad drehen



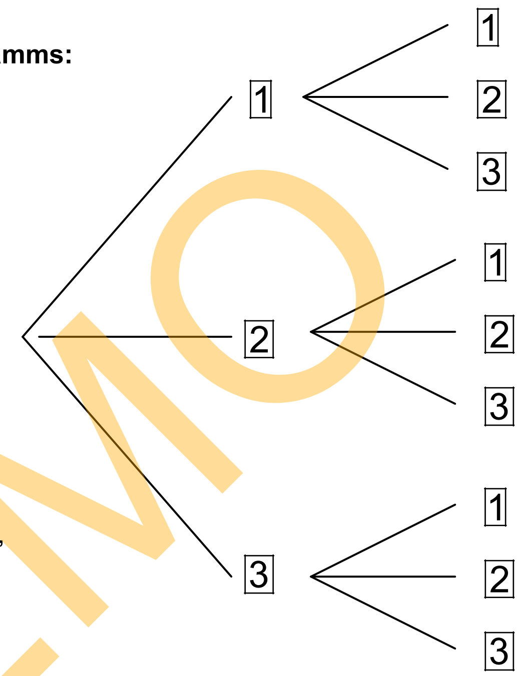
Ein Glücksrad enthält drei Felder mit Zahlen 1, 2 und 3.
Es wird zweimal gedreht. Welche Ereignisse gibt es jetzt?

Dieses zweistufige Bernoulli-Experiment stelle ich durch ein **liegendes Baumdiagramm** dar.

Es hat $3 \cdot 3 = 9$ „Pfade“ und jeder Pfad stellt ein Ergebnis dar.

Tipp zum Zeichnen eines solchen Baumdiagramms:

Beginne stets rechts außen mit den letzten 9 Ergebnissen. Dann zeichne die Linien dazu und füge die drei Ergebnisse ein usw.



Nur so bekommt man ein sauberes und gleichmäßiges Baumdiagramm.

Ich werde meistens liegende Diagramme verwenden, weil man sie besser beschriften kann, und auch besser auf ein Blatt passen.

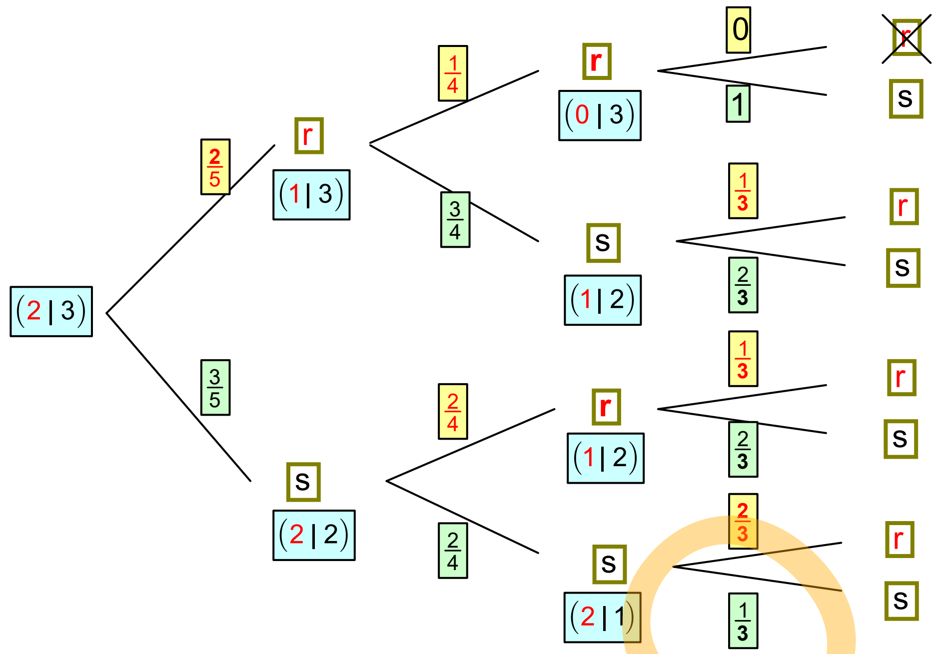
Es gibt auch mehrstufige Experimente, die keine Bernoulli-Experimente sind

Beispiel 7: Rote und schwarze Karten

In einem Kartenstapel befinden sich 2 rote und 3 schwarze Karten. Man entnimmt daraus 3 Karten der Reihe nach und legt sie in der Reihenfolge vor sich auf den Tisch, wie man sie zieht.
Beschreibe alle Möglichkeiten durch ein Baumdiagramm.

Da sich durch das Entnehmen der Karten der Bestand laufend ändert, ist die zweite Ziehung einer Karte ein anderes Experiment als die erste Ziehung. Jetzt sind nur noch 4 Karten vorhanden.

Im nachfolgenden Baumdiagramm habe ich vor jede Ziehung den Inhalt des Stapels angeschrieben.
Ich mache dies mit einem Zahlenpaar. $\boxed{(r \mid s)}$
Damit kann man dann schnell die Wahrscheinlichkeiten für die nächsten Ziehungsergebnisse berechnen.
Jetzt haben wir die Situation, dass nach dem 2. Zug bereits beide rote Karten gezogen sind, so dass man im 3. Zug keine rote Karte mehr ziehen kann.



Erklärung des Baumdiagramms

Ganz links erkennen wir den Inhalt des Stapels: 2 rote und 3 schwarze, also zusammen 5 Karten.

Daher zieht man mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{g}{m} = \frac{2}{5}$ eine rote Karte

und mit $p = \frac{3}{5}$ eine schwarze Karte. *)

Diese Wahrscheinlichkeiten stehen an den ersten beiden Pfaden.

Dann folgen die Ergebnisse der Ziehung: r oder s und darunter der neue Inhalt des Stapels, der sich ja durch die Ziehung geändert hat, weil nicht zurückgelegt worden ist.

Für den zweiten Zug stehen jetzt noch 4 Karten zur Verfügung. In jedem Fall kann man rot oder schwarz ziehen. Die Wahrscheinlichkeiten dazu stehen an den nächsten Pfaden usw.

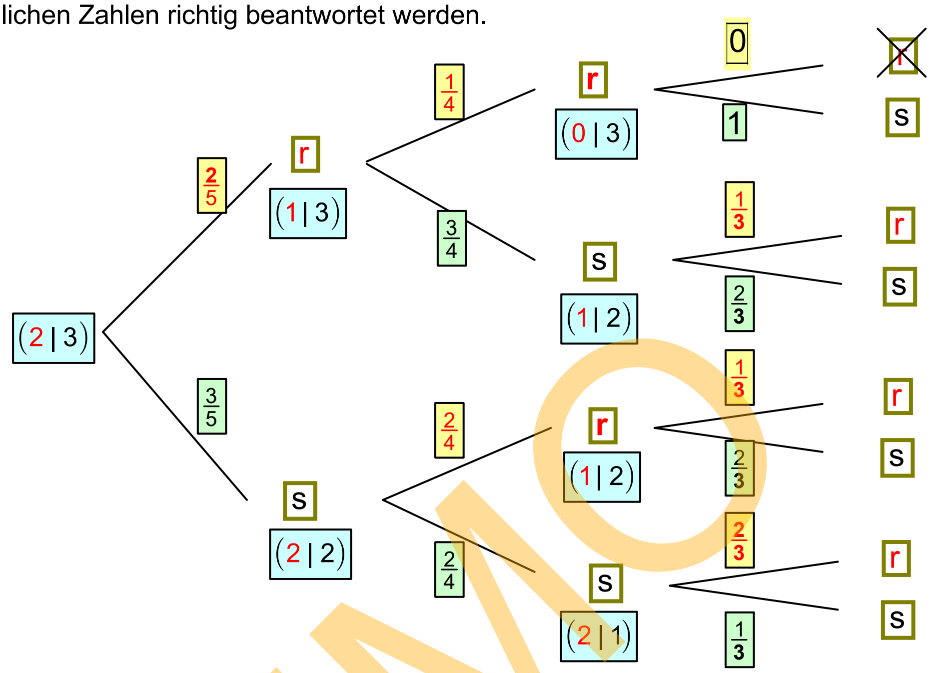
*) Die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{g}{m} = \frac{\text{Anzahl der } \boxed{g}\text{ünstigen Fälle}}{\text{Anzahl der } \boxed{m}\text{öglichenen Fälle}}$

wurde im Text 14021 auf Seite 11 eingeführt.

2.2 Es gibt verschiedene Arten von Wahrscheinlichkeiten!

Beispiel 1: Nochmals 2 rote und 3 schwarze Karten im Stapel

Die Frage „**Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man eine rote Karte**“ kann je nach Sachlage mit ganz unterschiedlichen Zahlen richtig beantwortet werden.



Meint man „rot beim 1. Zug“, erhält man die Antwort: $p_r = \frac{2}{5}$.

Meint man „rot beim 2. Zug“, dann hängt das Ergebnis davon ab, welche Karte zuvor, also beim 1. Zug entnommen worden ist. Hier unterliegt die Wahrscheinlichkeit für rot also einer Bedingung:

Die Wahrscheinlichkeit für „rot im 2. Zug“ unter der Bedingung, dass zuvor rot gezogen worden ist, ist $\frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit für „rot im 2. Zug“ unter der Bedingung, dass zuvor schwarz gezogen worden ist, ist $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Dies sind sogenannte **bedingte Wahrscheinlichkeiten**.

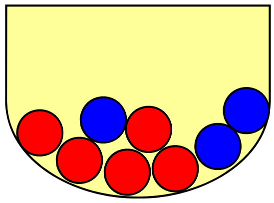
Gehen wir ans Ende des Baumes, dann kann man dort an 3 Stellen rot finden, denn 3 dieser 7 Pfade führen zu rot. Zu jedem dieser Pfade, der ja ein Ereignis darstellt, etwa rot-schwarz-rot, gibt es eine Wahrscheinlichkeit, die man berechnen kann (nächster Abschnitt). Die Wahrscheinlichkeit dafür dass einer dieser Fälle eintritt nennt man die **totale Wahrscheinlichkeit** für rot im 3. Zug.

Wichtig ist jetzt erst einmal, dass man begriffen hat, dass es nicht nur eine Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten (oder schwarzen) Karte gibt.

Beispiel 2 Urnenexperimente

Beliebte Experimente sind „**Urnenexperimente**“. Dabei ist eine Urne irgendein Gefäß, in dem Kugeln verschiedener Art liegen. Sie dürfen sich beim Herausgreifen nicht unterscheiden, damit ein echtes Zufallsexperiment vorliegt.

Diese Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln.
(Jedenfalls in einer farbigen Darstellung!)
Das Merkmal „Farbe“ hat also die zwei Ausprägungen rot und blau.
Beide sind nicht gleichwahrscheinlich.



Für den 1. Zug einer Kugel aus dieser Urne gilt:

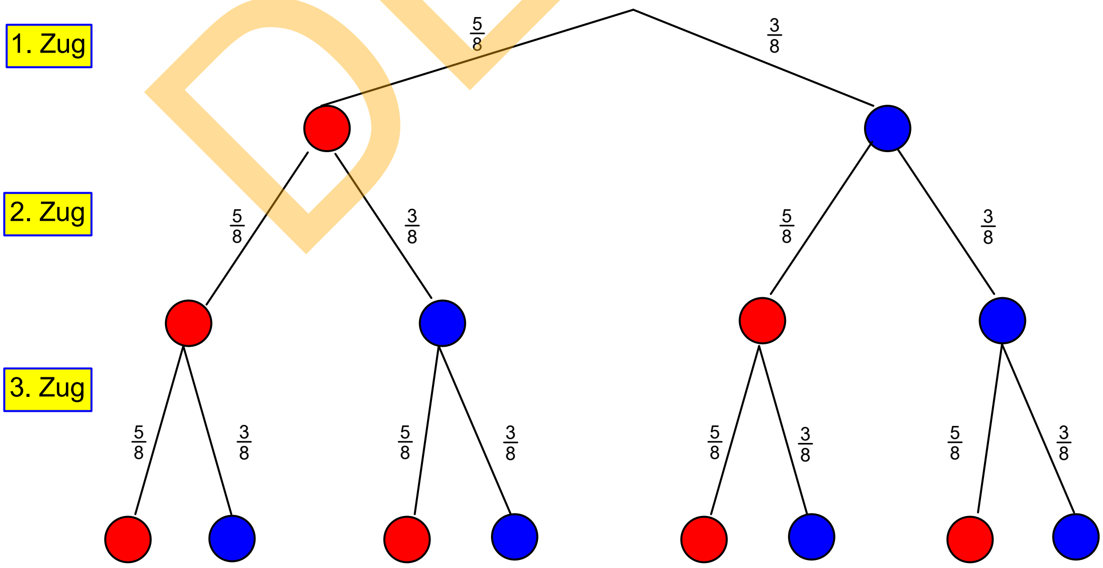
Wir denken die Kugeln zunächst als unterscheidbar, dann greift man jede Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ heraus. Da es 5 rote und 3 blaue gibt, folgt

$$p_{rot} = \frac{g}{m} = \frac{5}{8} \text{ und } p_{blau} = \frac{3}{8}.$$

Für das Ziehen der nächsten Kugeln aus der Urne gibt es verschiedene Modelle:

1. Modell: Ziehen mit Zurücklegen:

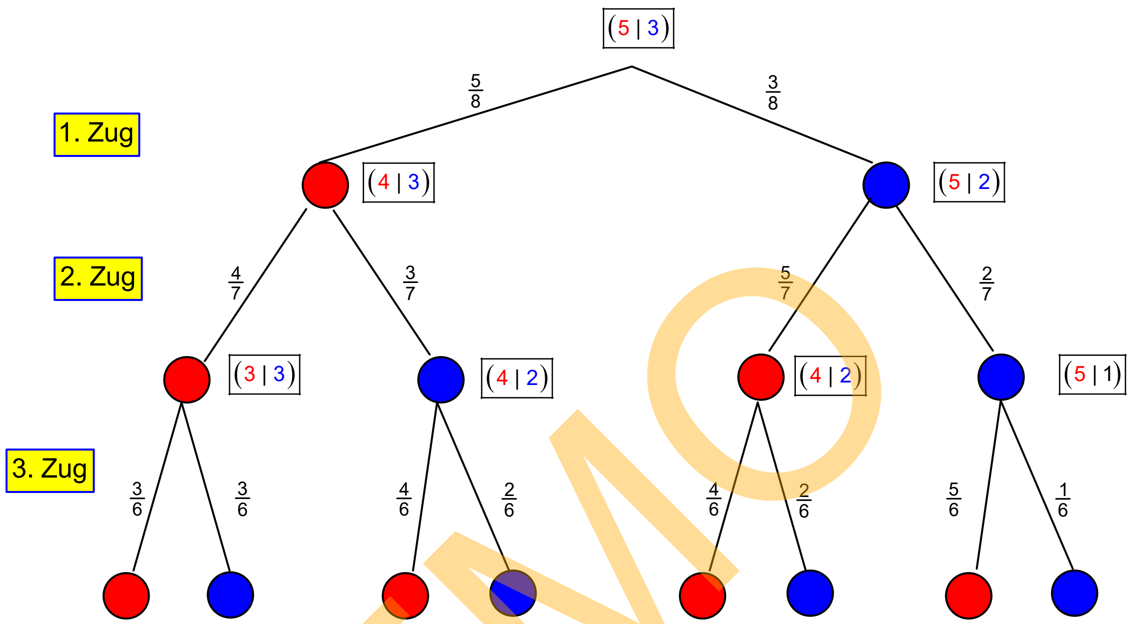
Die Wahrscheinlichkeiten für rot sind bei jedem Zug gleich, wenn man die gezogene Kugel immer wieder zurücklegt. Entsprechendes gilt natürlich auch für Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel. Denn dann ist die Situation für die 2. oder 3. Kugel dieselbe wie zu Beginn für die 1. Kugel. Man kann dann (auch wenn die Urne nur 8 Kugeln enthält) auch 20-mal rot ziehen.



Hier liegt ein 3-stufiges Bernoulli-Experiment vor.
Von der gleichen Art wäre das dreimalige Werfen einer Münze, das dreimalige würfeln, wenn es nur um gerade und ungerade Zahlen geht usw.

2. Modell: Ziehen ohne Zurücklegen:

Für den 1. Zug gilt wie eben $p_{rot} = \frac{5}{8}$ und $p_{blau} = \frac{3}{8}$.
Für die folgenden Ziehungen hat man jedoch eine veränderte Ausgangssituation, weshalb man die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die Folgepfade neu berechnen muss-



Erklärung:

War die erste Kugel rot, dann hat sich der Bestand vor dem 2. Zug so verändert, dass wir noch 4 rote und 3 blaue Kugeln in der Urne haben. Unter dieser Bedingung erhalten wir dann für den 2. Zug diese (bedingten) Wahrscheinlichkeiten: $p_{rot} = \frac{4}{7}$ und $p_{blau} = \frac{3}{7}$.

War jedoch die erste gezogene Kugel blau, dann gilt für den 2. Zug: $p_{rot} = \frac{5}{7}$ und $p_{blau} = \frac{2}{7}$, denn es sind ja nun 2 blaue und 5 rote Kugeln da.

So kann man ein ganzes System von Möglichkeiten durchrechnen. Man kann hier maximal 8 Kugeln ziehen, weil nicht mehr zurückgelegt wird ! Aber wenn 3 blaue gezogen sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit für eine weitere blaue 0!

3. Modell: Ziehen mit geändertem „Zurücklegen“

Beispiel a): Man zieht eine Kugel und legt jeweils eine Kugel der anderen Farbe zurück:

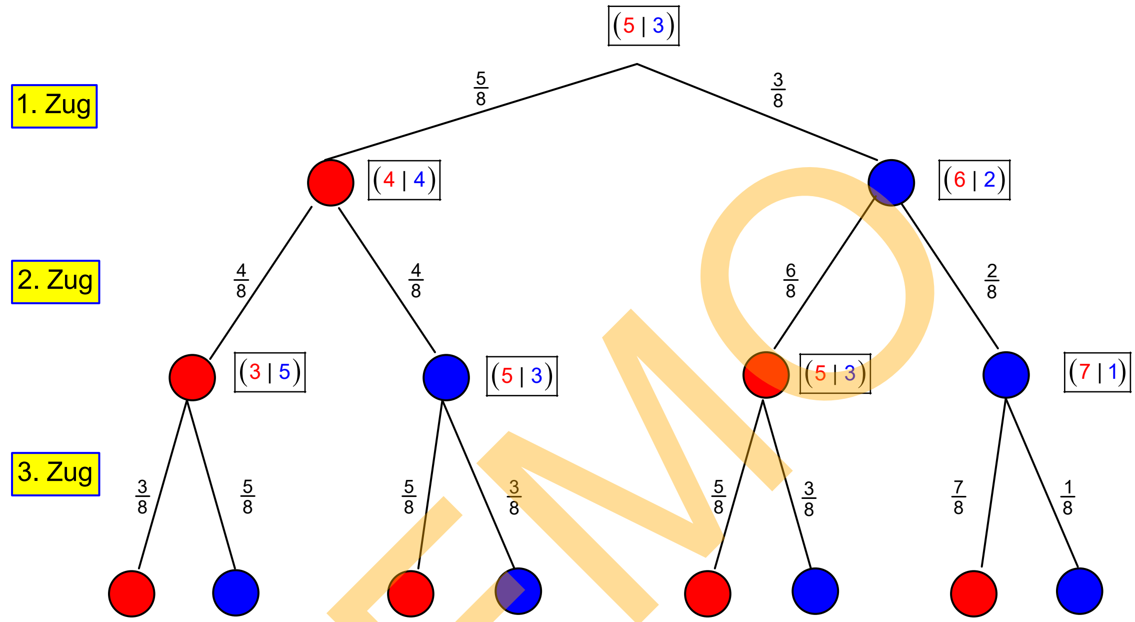
Für den 1. Zug gilt unverändert $p_{rot} = \frac{5}{8}$ und $p_{blau} = \frac{3}{8}$.

Nach einer roten Kugel gilt anschließend für den zweiten Zug:

$p_{rot} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ und $p_{blau} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Nach einer blauen Kugel gilt anschließend für den zweiten Zug:

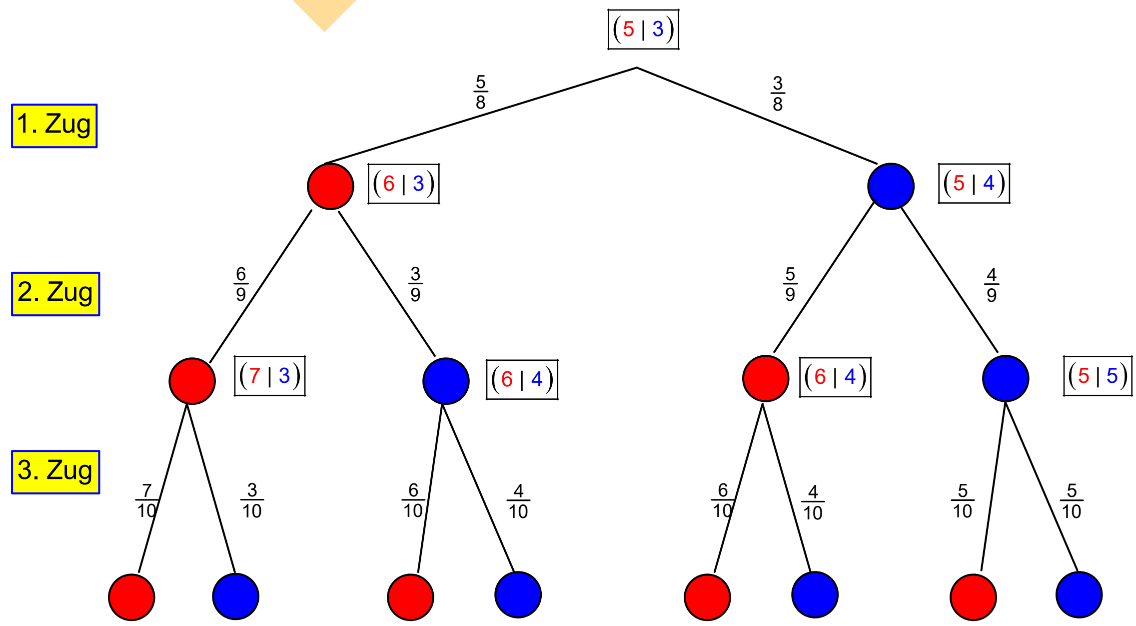
$p_{rot} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ und $p_{blau} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.



Beispiel b) Man legt jeweils zwei Kugeln der gezogenen Farbe zurück:

Dann nach rot gilt für den 2. Zug: $p_{rot} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ und $p_{blau} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Und nach blau: $p_{rot} = \frac{5}{9}$ und $p_{blau} = \frac{4}{9}$.

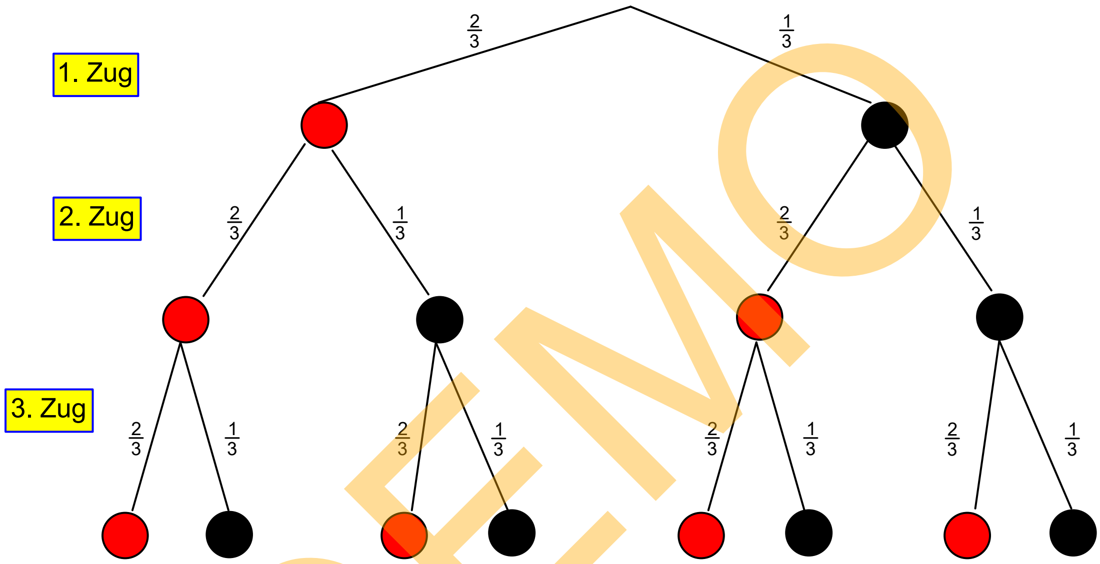


Beispiel 3: Ein Kartenspiel

Wir denken uns einen Kartenstapel mit 12 Karten gegeben, der 8 rote und 4 schwarze Karten enthält. Nun wollen wir mehrfach eine Karte ziehen.

1. Modell: Ziehen mit Zurücklegen

Auf Grund der Vorgaben wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Karte stets $p_r = \frac{g}{m} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Karte stets $p_s = \frac{g}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ist. Da wir nach jedem Zug die Karte zurücklegen und durchmischen, hat der Kartenstapel anschließend wieder denselben Inhalt wie zuvor. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeiten für rot bzw. schwarz auch bei den folgenden Ziehungen gleich groß sind, also $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$.



Man beachte:

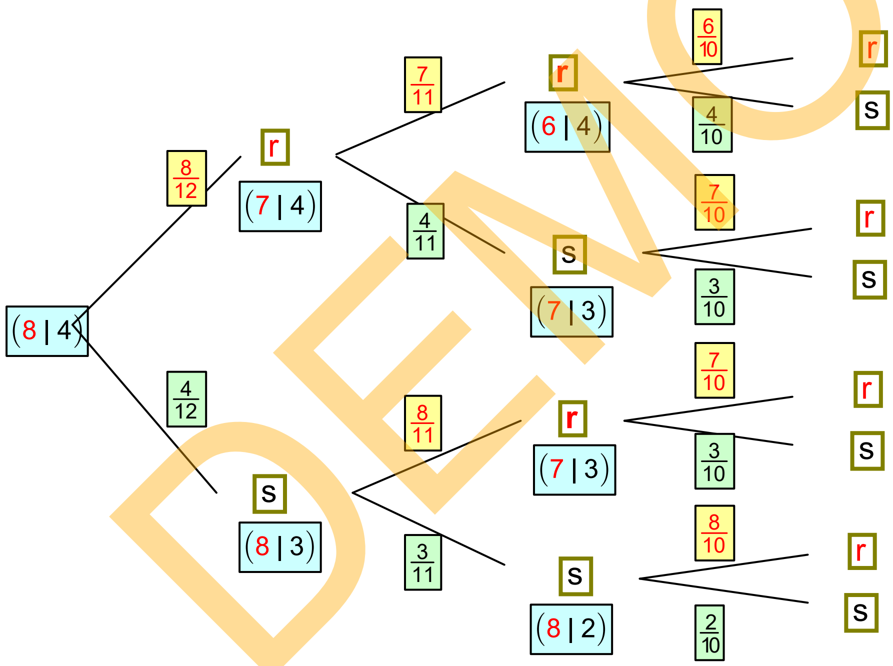
Da es nur die Farben rot und schwarz gibt, ist das Ziehen einer schwarzen Karte das **Gegenereignis** zum Ziehen einer roten Karte. Da die Summe beider Ereigniswahrscheinlichkeiten 1 sein muss, kann man auch so rechnen:

$$p_s = 1 - p_r = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2. Modell: Ziehen ohne Zurücklegen:

Jetzt verändern wir mit jedem Zug den Kartenstapel, da die Anzahl der Karten abnimmt.
Es folgt die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten für den 2. Zug:

1. Zug rot	mit der Wahrscheinlichkeit	$p_r = \frac{g}{m} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
	Neuer Bestand anschließend:	$(7r\|4s)$.
	Für einen 2. Zug rot wird	$p_r = \frac{g}{m} = \frac{7}{11}$
	Für einen 2. Zug schwarz wird	$p_s = \frac{g}{m} = \frac{4}{11}$
1. Zug schwarz	mit der Wahrscheinlichkeit	$p_s = \frac{g}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
	Neuer Bestand anschließend:	$(8r\|3s)$.
	Für einen 2. Zug rot wird	$p_r = \frac{g}{m} = \frac{8}{11}$
	Für einen 2. Zug schwarz wird	$p_s = \frac{g}{m} = \frac{3}{11}$



Fortgeschrittene verwenden diese Schreibweisen für bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$P_s(r) = \frac{8}{11}$ bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit für rot unter der Bedingung, dass zuvor schwarz gezogen worden ist, ist $\frac{8}{11}$

$P_r(r) = \frac{7}{11}$ und das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit für rot unter der Bedingung, dass zuvor schon rot gezogen worden ist, ist $\frac{7}{11}$

$P_r(s) = \frac{4}{11}$ und das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit für schwarz unter der Bedingung, dass zuvor schon rot gezogen worden ist, ist $\frac{4}{11}$

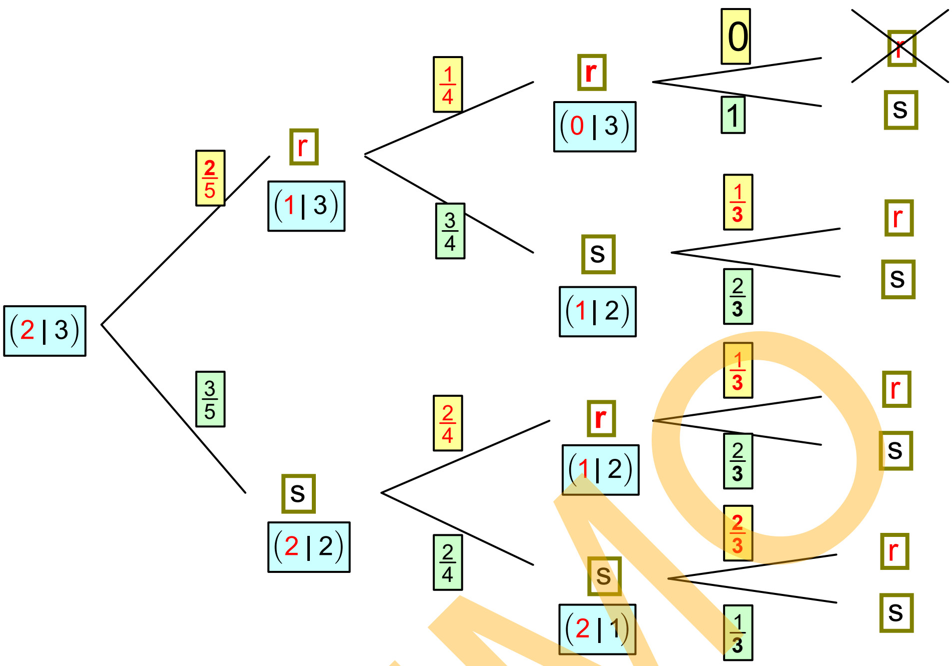
$P_s(s) = \frac{3}{11}$ bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit für schwarz unter der Bedingung, dass zuvor schwarz gezogen worden ist, ist $\frac{3}{11}$

Tipp: Oft ist es günstiger, den hier auftretenden Brüche NICHT zu KÜRZEN!

§ 3 Pfadregeln für Bäume

Diese beiden Pfadregeln muss man wissen:

Beispiel 1: **2 rote und 3 schwarze Karten im Stapel**



Das Experiment „ Man zieht drei Karten der Reihe nach aus dem Stapel (und legt keine mehr zurück), besitzt 7 Ergebnisse, die durch die 7 Pfade des Baumdiagramms dargestellt werden. Das erste Ergebnis besteht aus den drei Karten rot – rot – schwarz, kurz rrs.

Als Ereignis schreibt man es jedoch in geschweifte Klammern, weil Ereignisse ja Mengen sind: $\{rrs\}$.

> **Die 1. Pfadregel (Multiplikationsregel) besagt,**
> dass man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (Pfades) durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades berechnet.

$P(\{rrs\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{2}{20} = 0{,}1$, $\quad P(\{rsr\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = 0{,}1$

$P(\{rss\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = 0{,}2$ $\quad P(\{srr\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = 0{,}1$

$P(\{srs\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = 0{,}2$ $\quad P(\{ssr\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = 0{,}2$

$P(\{sss\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = 0{,}1$

> Die Summe dieser 7 Ergebnisse (andere gibt es nicht) ist 1.
> Das ist eine wichtige Kontrolle gegen schnell gemachte Rechenfehler.

Die 2. Pfadregel (Summenregel) besagt,

dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Addition der Wahrscheinlichkeiten jener Pfade berechnet wird, die zu diesem Ereignis gehören.

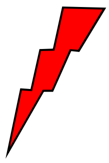
Wir berechnen damit die Wahrscheinlichkeiten zu folgenden Ereignissen:

A: Die letzte gezogene Karte war rot:
$P(A)=P(\{rsr\})+P(\{srr\})+P(\{ssr\})=0,1+0,1+0,2=0,4$

B: Die zweite Karte war rot:
$P(B)=P\{(rrs)\}+P(\{srr\})+P(\{srs\})=0,1+0,1+0,2=0,4$

C: Es wurden zwei schwarze Karten nacheinander gezogen:
$P(C)=P(\{ssr\})+P(\{rss\})+P(\{sss\})=0,2+0,2+0,1=0,5$

ACHTUNG FALLE



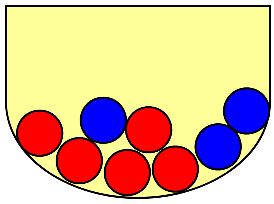
Bei C haben wir ein Problem, das aber weniger mathematischer sondern mehr logischer Natur ist. Viele werden nämlich sagen, dass das Ereignis $\{sss\}$ nicht zu C gehört, denn es handelt sich hier um 3 schwarze Karten, die Rede war aber nur von zwei aufeinander folgenden Karten. Die Frage, ob dann drei schwarze auch dazu gehören hängt an der genauen Sprachregelung:

Meine man mit „2" mindestens zwei Karten, dann ist die Lösung richtig, denn wenn dreimal nacheinander schwarz gezogen wird, dann waren ja auch zwei aufeinander folgende schwarze dabei. Meine man aber mit „2" genau zwei, dann muss $\{sss\}$ weg bleiben.

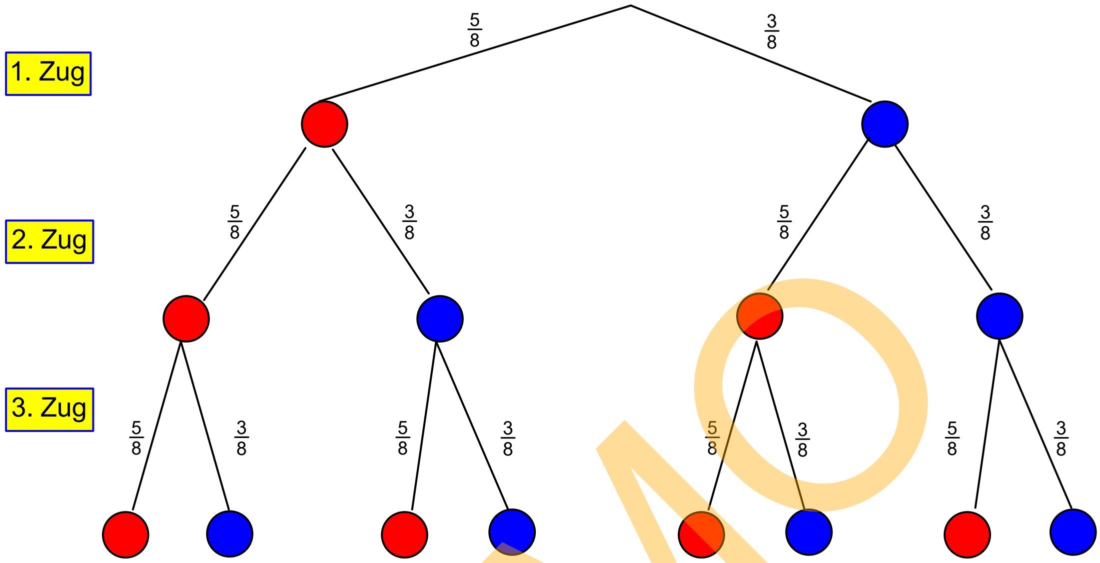
Man sollte also hier genau formulieren. Im Zweifelsfall sind beide Lösungen richtig zu bewerten, also auch diese: $P(C)=P(\{ssr\})+P(\{rss\})=0,2+0,2=0,4$.

Hier kann man streiten ….

Beispiel 2: Ziehen von 3 Kugeln mit Zurücklegen:



Die Wahrscheinlichkeiten für rot bzw. blau ändern sich von Zug zu Zug nicht, wenn man die gezogene Kugel immer wieder zurücklegt. Denn dann ist die Situation für die 2. oder 3. Kugel dieselbe wie zu Beginn für die 1. Kugel.



Dieser Baum weist 8 Pfade auf, also sind 8 Ergebnisse möglich. Nach der 1. Pfadregel folgt:

$$P(\{rrr\}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512} \approx 0{,}244$$
$$P(\{rrb\}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{75}{512}$$
$$P(\{rbr\}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{75}{512}$$
$$P(\{rbb\}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{45}{512}$$
$$P(\{brr\}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{75}{512}$$
$$P(\{brb\}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{45}{512}$$
$$P(\{bbr\}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{45}{512}$$
$$P(\{bbb\}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{27}{512}$$

Und hier die Wahrscheinlichkeiten einiger Ereignisse, berechnet nach der 2. Pfadregel

A: Es wurden genau zwei blaue Kugeln gezogen:
$$P(A) = P(\{rbb\}) + P(\{brb\}) + P(\{bbr\}) = \frac{45}{512} + \frac{45}{512} + \frac{45}{512} = 3\cdot\frac{45}{512} = \frac{135}{512}$$

B: Die zweite Kugel war blau:
$$P(B) = P(\{rbr\}) + P(\{rbb\}) + P(\{bbr\}) + P(\{bbb\}) = \frac{75+45+45+27}{512} = \frac{192}{512}$$

C: Die dritte Kugel war rot:
$$P(C) = P(\{rrr\}) + P(\{rbr\}) + P(\{brr\}) + P(\{bbr\}) = \frac{125+75+75+45}{512} = \frac{320}{512}$$

Die Regel für das Gegenereignis

Erinnerst Du Dich noch:

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1

Diese Regel hat weitreichende Konsequenzen, die uns viel Rechenarbeit abnehmen können-

Beispiel 3: Würfeln.

Das Experiment „Würfeln mit einem idealen Würfeln“ hat als Ergebnisraum die Menge $S = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$. Jede Zahl ist gleich wahrscheinlich. Daher hat jedes der 6 Elementarereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = ... = P(\{6\}) = \tfrac{1}{6}.$$

Das Ereignis A: „Man würfelt eine Zahl größer als 4“ sieht als Menge so aus: $A = \{ 5; 6 \}$

Es besitzt daher die Wahrscheinlichkeit $P(A) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$.

Das Gegenereignis liegt dann vor, wenn eine der Zahlen 1 bis 4 gewürfelt wird.

Für das Gegenereignis verwendet man die Schreibweise mit einem Querstrich: $\overline{A} = \{ 1; 2; 3; 4\}$.

Seine Wahrscheinlichkeit könnte man so berechnen:

$$P(\overline{A}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = 4 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}$$

Der schnellere Weg führt über die Summe 1 aller Wahrscheinlichkeiten.

Wegen

$$\underbrace{P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})}_{P(\overline{A})} + \underbrace{P(\{5\}) + P(\{6\})}_{P(A)} = 1$$

folgt

$$\underbrace{P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})}_{P(\overline{A})} = 1 - \underbrace{\left(P(\{5\}) + P(\{6\})\right)}_{P(A)}$$

Dies kann man verallgemeinern:

Für jedes Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

also ist $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ **oder** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Beispiel 4: Nochmals Würfeln

Wenn es beim Würfeln nur darum geht, ob man eine 6 würfelt oder nicht, dann wird man nicht den vollständigen Baum zeichnen, der pro Wurf 6 Pfade enthält, und sich bei 2 Würfen bereits in 36 und sich bei 3 Würfen gar in $6^3 = 216$ Pfade auffächert. Dann wirf man pro Wurf nur diese beiden Ergebnisse 6 oder $\overline{6}$ anschreiben. Ein solcher Baum ist auf Seite 18 zu sehen.
Die Wahrscheinlichkeiten sind dann $\frac{1}{6}$ für 6 bzw. $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ für $\overline{6}$.

Beispiel 5: Eine Spielmünze werfen

Eine Spielmünze trägt auf der einen Seite eine 1, auf der anderen eine 2. Sie wird 4-mal geworfen. Das folgende Baumdiagramm zeigt die Situation. Am Ende wurde die Summe der Zahlen berechnet und mit X bezeichnet. Man erkennt schnell, dass als Summe die Zahlen 4 bis 8 auftreten können.

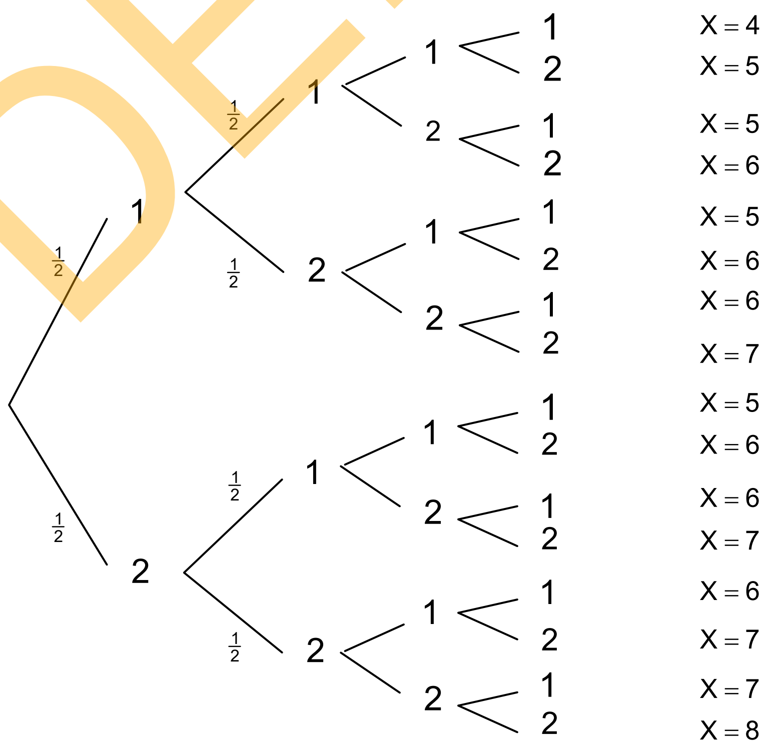
E sei das Ereignis: „Die Summe der geworfenen Zahlen ist 5, 6, 7 oder 8“.
Zu E gehören 15 dieser 16 Pfade. Das würde viel Rechenarbeit bedeuten.

Viel schneller ist das Ergebnis über das Gegenereignis erstellt: $\overline{E}$ lautet: Die Summe ist 4.
Dies ist nur beim 1. Pfad der Fall, seine Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P(\overline{E}) = P(X=4) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}.$$

Also folgt für das Ereignis E:

$$P(E) = P(X>4) = 1-P(\overline{E}) = 1-\tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16}.$$



Dazu folgen später noch viele Beispiele.

§ 4 Musteraufgaben zur Anwendung der Pfadregeln

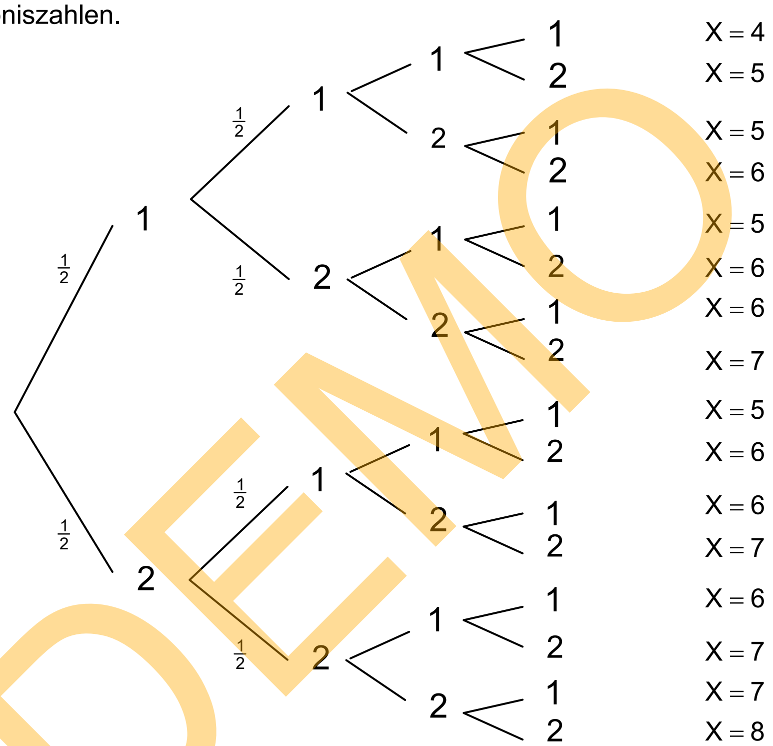
Beispiel 1a Schon wieder eine Münze werfen

Eine ideale Spielmünze (Laplace-Münze oder L-Münze genannt) trägt auf den beiden Seiten die Zahlen 1 und 2 aufgedruckt. Sie wird viermal nacheinander geworfen. Man notiert sich das Ziehungsergebnis.

oder Beispiel 1b (Urnenexperiment: Ziehen mit Zurücklegen).

In einer Urne befinden sich zwei nicht unterscheidbare Kugeln mit den aufgedruckten Nummern 1 und 2. Man zieht viermal eine Kugel und legt sie sofort wieder zurück.

Hier das Baumdiagramm für beide Experimente. Hinter jedem Pfad steht (bezeichnet mit X) die Summe der 4 Ergebniszahlen.



Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse erfolgt durch Anwendung der 2. Pfadregel. Jeder Pfad besteht aus 4 Zahlen, die immer mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auftreten, also gilt für jeden Pfad: $P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Aufgabe: Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse (bezogen auf 1a):

A: Es wird genau dreimal die 1 geworfen.

B: Die Summe der geworfenen Zahlen ist 6.

C: Es wird höchstens 1-mal die 2 geworfen,

D: Die letzte Zahl ist eine 1.

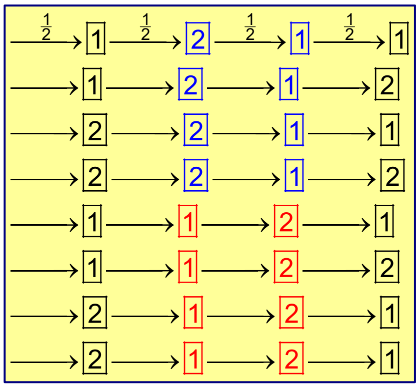
E: Die 2. und die 3. Zahl sind verschieden.

F: Aufeinander folgende gezogene Zahlen sind verschieden.

Hier die Lösung:

$A = \{1112\,;1121\,;1211\,;2111\}$

Also gibt es 4 Pfade. Nach der 2. Pfadregel erhält man daher
$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.



$B = \{1122\,;1221\,;1212\,;2211\,;2121\,;2112\}$

$P(B) = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$C = \{1111\,;1112\,;1121\,;1211\,;2111\}$

$P(C) = \frac{5}{16}$

D: Genau die Hälfte aller Würfe sollte am Ende eine 1 haben: $P(D) = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$.

E: Im 1. Fall lautet die zweite Zahl 1 und die dritte Zahl dann 2, wobei die 1. Zahl und die vierte Zahl völlig beliebig sind. Man schreibt dies etwa so auf: x12y. x und y können also auch wieder 1 oder 2 sein, also haben wir hier 4 mögliche Ergebnisse. Dasselbe gilt im 2. Fall: x21y.
Also sind es zusammen <u>8 Pfade</u>: $P(E) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ (die Hälfte aller Möglichkeiten).

$F = \{1212\,;2121\}$ mit $P(F) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

Verwendung von Zufallsvariablen

In vielen n-stufigen Experimenten geht es darum, dass man bestimmte Ereignisse zählt. Dazu führt man dann eine sogenannte <u>Zählvariable</u> oder <u>Zufallsvariable</u> ein und verwendet zur Abkürzung Großbuchstaben wie X oder Y.

In unserem Beispiel kann etwa Y die Zahl der Einsen bedeuten. Y = 3 beschreibt dann das Ereignis „Bei diesen vier Ziehungen wurde dreimal eine 1 gezogen“. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis bezeichnet man dann mit $P(Y = 3)$.
Oben wurde bereits X als Summe der vier Zahlen definiert. X = 4 bedeutet dann das Ereignis: „Die Summe der vier Zahlen ist 4“. Das ist (war) genau im 1. Pfad der Fall. Also ist $P(X = 4) = \frac{1}{16}$
Es gibt 4 Pfade mit der Summe 5, jeder hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$, also gilt:

$P(X = 5) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.

Ferner gilt:

$P(X = 6) = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16}$

$P(X = 7) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$

$P(X = 8) = \frac{1}{16}$

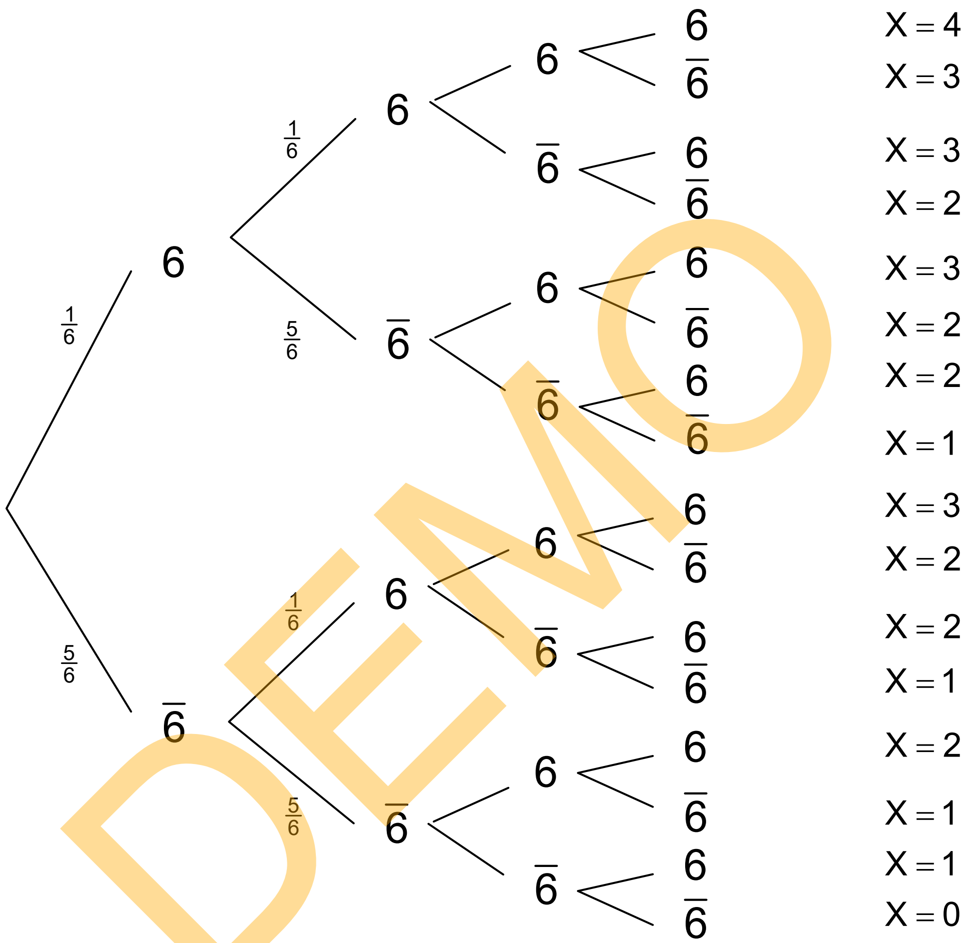
Die Zufallsvariable X hat in dieser Aufgabe den Definitionsbereich $\{4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$, er wird oft mit S bezeichnet: $\mathbf{S} = \{4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$. Die soeben berechnete Liste der zu S gehörigen Wahrscheinlichkeiten heißt die **<u>Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X</u>**. Es ist eine Wertetafel für die Wahrscheinlichkeitsfunktion für alle Zahlen aus dem Definitionsbereich S.
Diese Begriffe sollt man sich merken. Sie gehören zur Fachsprache der Stochastik.

Beispiel 2 Eine 6 oder keine 6 würfeln

Ein Laplace-Würfel wird viermal geworfen. Dies ist ein 4-stufiges Bernoulli-Experiment (man sagt auch Bernoulli-Kette).

Zunächst das Baumdiagramm:

Ich wende den Trick an, dass ich anstelle der uninteressanten Zahlen 1 bis 5 einfach $\overline{6}$ schreibe. Dieser Querstrich bedeutet „Nicht-6“ oder „keine 6“. Es ist das Gegenteil zum Sechserwurf.



Am Ende wurden die Werte der <u>Zufallsvariablen X</u> angefügt. Sie soll die Zahl der geworfenen Sechser in 4 Würfen zählen. Uns sollen diese Ereignisse interessieren:

A: Man erhält höchstens eine 6

B: Man erhält mindestens eine 6

C: Die erste und die letzte Zahl ist eine 6.

D: Die Augensumme ist kleiner als 24.

AUFGABE:

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse und schaue dann erst die Lösung an !

Suche dazu die passenden Pfade heraus und addiere nach der 2. Pfadregel deren Wahrscheinlichkeiten.

Lösung:

A: „Höchstens eine 6“ heißt keine 6 oder genau eine 6.

$$A = \left\{ \overline{6666}\,;\,\overline{666}6\,;\,\overline{66}6\overline{6}\,;\,\overline{6}6\overline{66}\,;\,6\overline{666} \right\}$$

$$P(A) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 + 4\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{1}{6} = \frac{5^4+4\cdot 5^3}{6^4} = \frac{[5+4]\cdot 5^3}{6^4} = \frac{9\cdot 5^3}{6^4} \approx 0{,}868$$

Bei B („mindestens eine 6“) kommen alle Würfe außer $\overline{6666}$ in Frage . Also rechnet man unter Berechnung dieses Gegenereignisses so::

$$P(B) = 1 - P\left(\left\{\overline{6666}\right\}\right) = 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = \frac{6^4-5^4}{6^4} = \frac{1296-625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}52\,,$$

$$C = \left\{6666\,;\,66\overline{6}6\,;\,6\overline{6}66\,;\,6\overline{66}6\right\}$$

$$P(C) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^4 + 2\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\cdot\tfrac{5}{6} + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = \frac{1+10+25}{6^4} = \frac{36}{6^4} = \frac{36}{1296} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \approx 0{,}028$$

D: Ergeben alle 4 Würfe eine 6, dann ist die Summe 24. Somit bezeichnet D das Gegenereignis zu $\{6666\}$: $P(D) = 1 - P(\{6666\}) = 1 - \left(\tfrac{1}{6}\right)^4 = \tfrac{1295}{1296} \approx 0{,}9993$!

Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X

Von den Werten zu $P(X=0)$ bis $P(X=4)$ soll hier nur $P(X=2)$ berechnet werden.

Der Baum zeigt, dass es 6 Pfade gibt in denen 2 Sechser und damit auch 2 Nicht-Sechser stehen. Ich zeichne diese Pfade isoliert voneinander so auf:

$$\left.\begin{array}{l}
\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}} \\
\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}} \\
\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6} \\
\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6} \\
\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6} \\
\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}
\end{array}\right\}$$

Man erkennt, dass alle 6 Pfade dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen, also gilt:
$P(X=2) = 6\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}1157$
Grob gesagt werd also im Durchschnitt bei jeder 10. Serie von 4 Würfen zwei Sechser dabei sein.

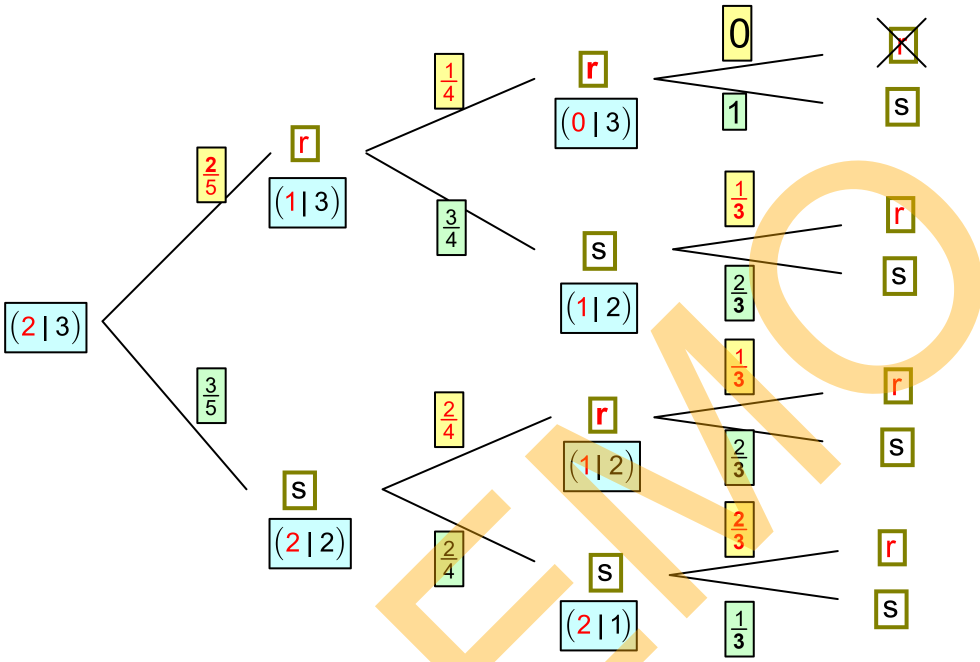
Hinweis:

Es gibt ein relativ einfaches Berechnungsverfahren für diese Aufgabe, genannt die **Binomialverteilung**. Diese wird später besprochen und wird im Unterricht frühestens in 9 oder 10 behandelt.

Beispiel 3 Schon wieder unsere 5 Spielkarten ...

In einem Kartenstapel befinden sich 2 rote und 3 schwarze Karten. Man entnimmt daraus 3 Karten der Reihe nach und legt sie in dieser Reihenfolge vor sich auf den Tisch. (Siehe Seite 5). Beschreibe alle Möglichkeiten durch ein Baumdiagramm.

Da sich durch das Entnehmen der Karten der Bestand laufend ändert, muss man vor jeder Ziehung den Inhalt des Stapels anschreiben. Ich mache dies mittels eines Zahlenpaares: $(r \mid s)$
Daraus wird dann die Wahrscheinlichkeit für das nächste Zug-Ergebnis berechnet.



$p_1 = 0$

$p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{10}$

$p_3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

$p_4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10}$

$p_5 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

$p_6 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10}$

$p_7 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10}$

$p_8 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

Dazu gibt es einiges zu sagen:

(1) Die Wahrscheinlichkeiten errechnen sich stets aus dem Bestand. Wenn etwa $(1 \mid 3)$ angeschrieben steht, dann liegen im Stapel 1 rote und 3 schwarze Karten, also ist die Wahrscheinlichkeit für eine rote Karte beim nächsten Zug: $p_r = \frac{g}{m} = \frac{1}{4}$, denn es sind ja 4 Möglichkeiten vorhanden. Analog dazu folgt $p_s = \frac{g}{m} = \frac{3}{4}$.

(2) Da von Anfang an nur 2 rote Karten vorhanden sind, kann man nicht dreimal eine rote Karte entnehmen, deshalb taucht im 1. Pfad die Wahrscheinlichkeit 0 für rot auf, das heißt man zieht mit Sicherheit schwarz ($p_s = 1$) ! Der Pfad rrr existiert nicht.

(3) Es fällt vielleicht auf, dass ich die Wahrscheinlichkeiten nicht kürze. Statt $\frac{2}{4}$ schreibe ich also nicht $\frac{1}{2}$. Der Grund ist ganz simpel: Dadurch erhalten alle Ergebnisse Wahrscheinlichkeiten mit gleichem Nenner. Und der ist $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Damit werden die Wahrscheinlichkeiten besser vergleichbar und addierbar.

Nun sollen die Wahrscheinlichkeiten einiger Ereignisse bestimmt werden.

AUFGABE

Berechne die Wahrscheinlichkeiten dieser **Ereignisse**:

A: Beim 2. Zug wird eine rote Karte entnommen.

B: Man erhält genau 2 schwarze Karten.

C: Die letzten beiden Karten haben verschiedene Farbe.

D: Man zieht mindestens eine rote Karte

E: Die 2. Karte ist rot oder die 1. ist schwarz.

F: Weder die erste Karte ist schwarz noch die dritte.

LÖSUNG

Wir bilden die Lösungen so, indem wir die passenden Ergebnisse heraussuchen und gemäß der 2. Pfadregel deren Wahrscheinlichkeiten addieren.

$A = \{ rrs ; srr ; srs \}$. Man muss die Pfade im Baumdiagramm entdecken und ihre Wahrscheinlichkeiten addieren: $P(A) = \frac{6}{60} + \frac{6}{60} + \frac{12}{60} = \frac{24}{60} (= 0{,}4)$.

$B = \{rss ; srs ; ssr\}$ mit $P(B) = \frac{12}{60} + \frac{12}{60} + \frac{12}{60} = 3 \cdot \frac{12}{60} = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} (= 0{,}6)$

$C = \{rrs ; rsr ; srs ; ssr \}$ mit $P(C) = \frac{6}{60} + \frac{6}{60} + \frac{12}{60} + \frac{12}{60} = \frac{36}{60} \; (= 0{,}6)$

Nun wollen wir uns gleich einen Trick einprägen: **Mindestens eine rote Karte** bedeutet alle Ziehungen außer derjenigen, in der man **keine rote Karte** erhält ! Und das wäre genau das **Gegenereignis** $\overline{D}$.

„Keine rote Karte" ist das Gegenereignis $\overline{D} = \{sss\}$ mit $P(\{sss\}) = \frac{6}{60} = 0{,}1$

Umrechnung auf das Ereignis D: $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$!

Das Ereignis E ist für Anfänger zu schwer. Für Fortgeschrittene hier die Lösung:

Bei E liegt ein **Oder-Ereignis** vor. Die beiden Bestandteile dieses Ereignisses sind:

E_1 : Die zweite Karte ist rot, das war das Ereignis $A = \{ rrs ; srr ; srs \}$

E_2 : Die erste Karte ist schwarz: $E_2 = \{srr ; srs ; ssr ; sss\}$

Man muss jetzt wissen, dass zum ODER-Ereignis die Vereinigungsmenge gehört :

$E_1 \cup E_2 = \{rrs ; srr ; srs \} \cup \{srr ; srs ; ssr ; sss\} = \{rrs ; srr ; srs ; ssr ; sss\}$ mit

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{60} + \frac{6}{60} + \frac{12}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10} \; (= 0{,}7)$

Das Problem steckt darin, dass zu E_1 drei Elemente (Ergebnisse) gehören, zu E_2 vier. Zu E_1 oder E_2 aber nicht 7 sondern nur 5, weil srr und srs zu beiden gehören und nicht doppelt gezählt werden dürfen!

Daher lernen wir in 31103 den **Additionssatz für das Oder-Ereignis kennen**. Er berücksichtigt diese doppelten Vorkommen vorn Ergebnissen bei Oder-Ereignissen dadurch , dass er sie einmal weglässt, das ist genau die Schnittmenge. So entsteht diese Formel für Oder-Ereignisse:

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

wobei wir als Schnittmenge ablesen: $E_1 \cap E_2 = \{srr\ ;\ srs\}$

Die erneute Berechnung, jetzt mit dieser Formel, sieht so aus:

$$P(E_1) = P(A) = \tfrac{24}{60},$$
$$P(E_2) = \tfrac{6+12+12+6}{60} = \tfrac{36}{60}$$
$$P(E_1 \cap E_2) = \tfrac{6+12}{60} = \tfrac{18}{60}$$

Also folgt: $P(E_1 \cup E_2) = \tfrac{24}{60} + \tfrac{36}{60} - \tfrac{18}{60} = \tfrac{42}{60} = \tfrac{7}{10} \quad (= 0{,}7)$

Noch schwerer ist das Ereignis F. Hier eine Lösung für Fortgeschrittene:

F lautet: Weder die erste Karte ist schwarz noch die dritte.

Gehen wir die Sache wieder mengentheoretisch an: Weder – noch beschreibt die Komplementärmenge zur Vereinigungsmenge, also $\overline{F_1 \cup F_2}$, wobei mit F_1 und F_2 die Teilereignisse beschrieben werden:

F_1 : Die erste Karte ist schwarz mit $F_1 = \{srr\ ;\ srs\ ;\ ssr\ ;\ sss\}$ und

F2 : Die dritte Karte ist schwarz mit $F_2 = \{rrs\ ;\ rss\ ;\ srs\ ;\ sss\}$.

Daraus bildet man die Vereinigungsmenge:

$$F_1 \cup F_2 = \{srr\ ;\ srs\ ;\ ssr\ ;\ sss\} \cup \{rrs\ ;\ rss\ ;\ srs\ ;\ sss\} = \{rrs\ ;\ rss\ ;\ srs\ ;\ srr\ ;\ ssr\ ;\ sss\}$$

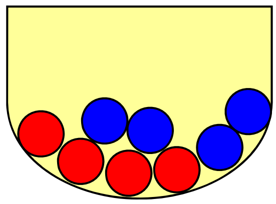
Ich habe die Schnittmenge blau markiert, diese Ergebnisse kommen in beiden Mengen (Ereignissen) vor. Nun bilden wir das Gegenereignis (die Komplementärmenge):

$$\overline{F_1 \cup F_2} = \{rsr\}$$

Insgesamt gibt es 8 Ergebnisse, also gehören zum Gegenereignis die fehlenden zwei. Da aber rrr nicht auftraten kann, darf man es weglassen oder in Klammern setzen. Das Ereignis F hat also nur das eine Ergebnis rsr. Wir beenden die Rechnung: $P\left(\overline{F_1 \cup F_2}\right) = P(\{rsr\}) = \tfrac{6}{60} = \tfrac{1}{10} = 0{,}1$.

Auch dies wird in 14231 ausführlich behandelt.

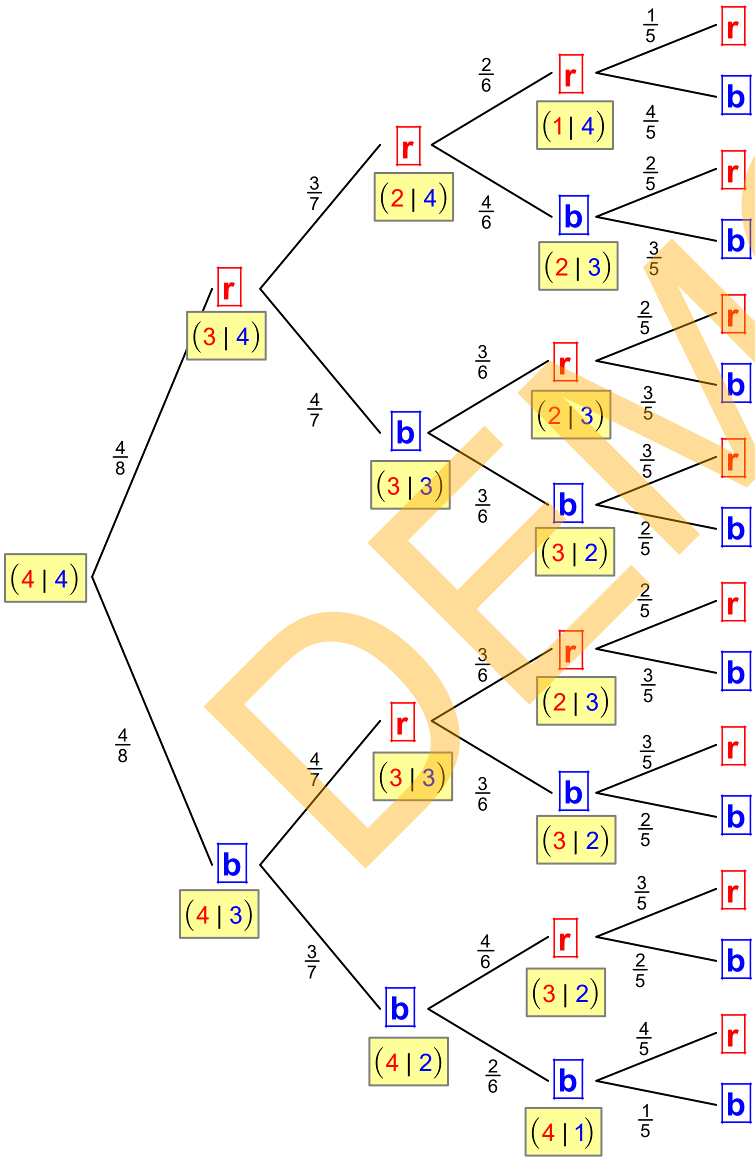
Beispiel 4 (Siehe auch Seite 13)



Diese Urne enthält 4 rote und 4 blaue Kugeln.
(Jedenfalls in einer farbigen Darstellung!)

Wir wollen 4 Ziehungen vornehmen und die Kugeln der Reihe nach vor uns hinlegen, also nicht mehr zurücklegen.

Baumdiagramm für alle möglichen Ergebnisse. (Vorüberlegung zur Zeichnung, die man ja rechts beginnen soll: Pro Zug haben wir 2 Ergebnisse, bei 4 Zügen also $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ Ergebnisse. Diese schreiben wir rechts untereinander, abwechselnd rot und blau !)



$$p_1 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{24}{1680} \approx 0{,}0143$$
$$p_2 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_3 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_4 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{144}{1680} \approx 0{,}0857$$
$$p_5 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_6 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{144}{1680} \approx 0{,}0857$$
$$p_7 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{144}{1680} \approx 0{,}0857$$
$$p_8 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_9 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_{10} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{144}{1680} \approx 0{,}0857$$
$$p_{11} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{144}{1680} \approx 0{,}0857$$
$$p_{12} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_{13} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{144}{1680} \approx 0{,}0857$$
$$p_{14} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_{15} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{96}{1680} \approx 0{,}0571$$
$$p_{16} = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{24}{1680} \approx 0{,}0143$$

Wer kann das auch so schön zeichnen ???

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zu Ereignissen:

A: Es wird genau eine rote Kugel gezogen.
B: Es werden genau 2 rote Kugeln gezogen
C: Es werden genau 3 rote Kugeln gezogen
D: Es werden genau 4 rote Kugeln gezogen
E: Es werden genau 5 rote Kugeln gezogen
F: Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen
G: Es wird höchstens eine rote Kugel gezogen
H: Es werden abwechselnd rote und blaue Kugeln entnommen
K Die ersten drei Kugeln sind rot
L: Die letzten 3 Kugeln sind blau.
M: Die ersten 3 Kugeln sind rot oder die letzten drei Kugeln sind blau

A besteht aus den Ergebnissen, zu denen die Pfade 8, 12 ,14 und 15 führen.

Alle vier haben dieselbe Wahrscheinlichkeit ! $A = \{rbbb\,;\,brbb\,;\,bbrb\,;\,bbbr\}$ Also folgt.

$$P(A) = p_8 + p_{12} + p_{14} + p_{15} = 4 \cdot \tfrac{96}{1680} = \tfrac{384}{1680} \approx 0{,}2286\,.$$

B besteht aus den 6 Ereignissen $B = \{rrbb\,;\,rbrb\,;\,rbbr\,;\,bbrr\,;\,brbr\,;\,brrb\}$, zu denen die Pfade 4 , 6 , 7 , 10 , 11 , 13 führen. Alle haben dieselbe Wahrscheinlichkeit $\tfrac{144}{1680}$.

$$P(B) = 6 \cdot \tfrac{144}{1680} = \tfrac{864}{1680} \approx 0{,}5143$$

C besteht aus den 4 Ereignissen, zu denen die Pfade 2, 3, 5 und 9 führen: $C = \{rrrb\,;\,rrbr\,;\,rbrr\,;\,brrr\}$

Alle haben dieselbe Wahrscheinlichkeit $\tfrac{96}{1680}$: $P(C) = 4 \cdot \tfrac{96}{1680} = \tfrac{384}{1680} \approx 0{,}2286$

<u>Hinweis:</u> Die Rechnung bei C kann man sich eigentlich sparen. Da die Urne gleich viele rote wie blaue Kugeln enthält, entspricht die Ziehung von drei roten Kugeln der Ziehung von einer blauen. Daher sind die Ereignisse A und C bis auf den Namen der Farbe identisch !

D ist genau der 1. Pfad, also gilt: $p_1 = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{24}{1680} \approx 0{,}0143$

E ist nicht möglich, da man nur 4-mal zieht. E ist das unmögliche Ereignis: $E = \{\ \}$ mit $P(E) = 0$.

F: Es wird **<u>mindestens eine</u>** rote Kugel gezogen, das heißt 1, 2, 3 oder 4 Kugeln. Man müsste also die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse von 1 bis 15 addieren - oder man rechnet über das Gegenereignis, und dieses heißt: $\overline{F}$: Es wird keine rote Kugel gezogen.

$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \tfrac{24}{1680} = \tfrac{1656}{1680} \approx 0{,}9857$$

G: Es wird **<u>höchstens eine</u>** rote Kugel gezogen, das heißt 0 oder 1 rote Kugel.

$G = \{bbbb\} \cup A = \{bbbb\,;\,rbbb\,;\,brbb\,;\,bbrb\,;\,bbbr\}$ mit $P(G) = \tfrac{24}{1680} + \tfrac{384}{1680} = \tfrac{408}{1680} \approx 0{,}2429$

H: Es werden abwechselnd rote und blaue Kugeln entnommen. $H = \{rbrb\,;\,brbr\}$ mit
$P(H) = 2 \cdot \tfrac{144}{1680} = \tfrac{288}{1680} \approx 0{,}1714$.

K: Die ersten drei Kugeln sind rot: $K = \{rrrr\ ;\ rrrb\}$ mit $P(K) = \frac{24+96}{1680} = \frac{120}{1680} \approx 0{,}0714$

L: Die letzten 3 Kugeln sind blau: $L = \{bbbb\ ;\ rbbb\}$ mit $P(L) = \frac{24+96}{1680} = \frac{120}{1680} \approx 0{,}0714$

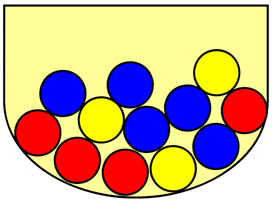
M: Die ersten 3 Kugeln sind rot **oder** die letzten drei Kugeln sind blau. Hier liegt ein **Oder-Ereignis** vor, wir wenden also den **Additionssatz** an (Fortgeschrittene!)

$$P(M) = P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L) = \frac{120}{1680} + \frac{120}{1680} - 0 = \frac{240}{1680} \approx 0{,}1428$$

Da K und L keine gemeinsamen Ergebnisse haben ist die Schnittmenge leer und ihre Wahrscheinlichkeit daher 0.

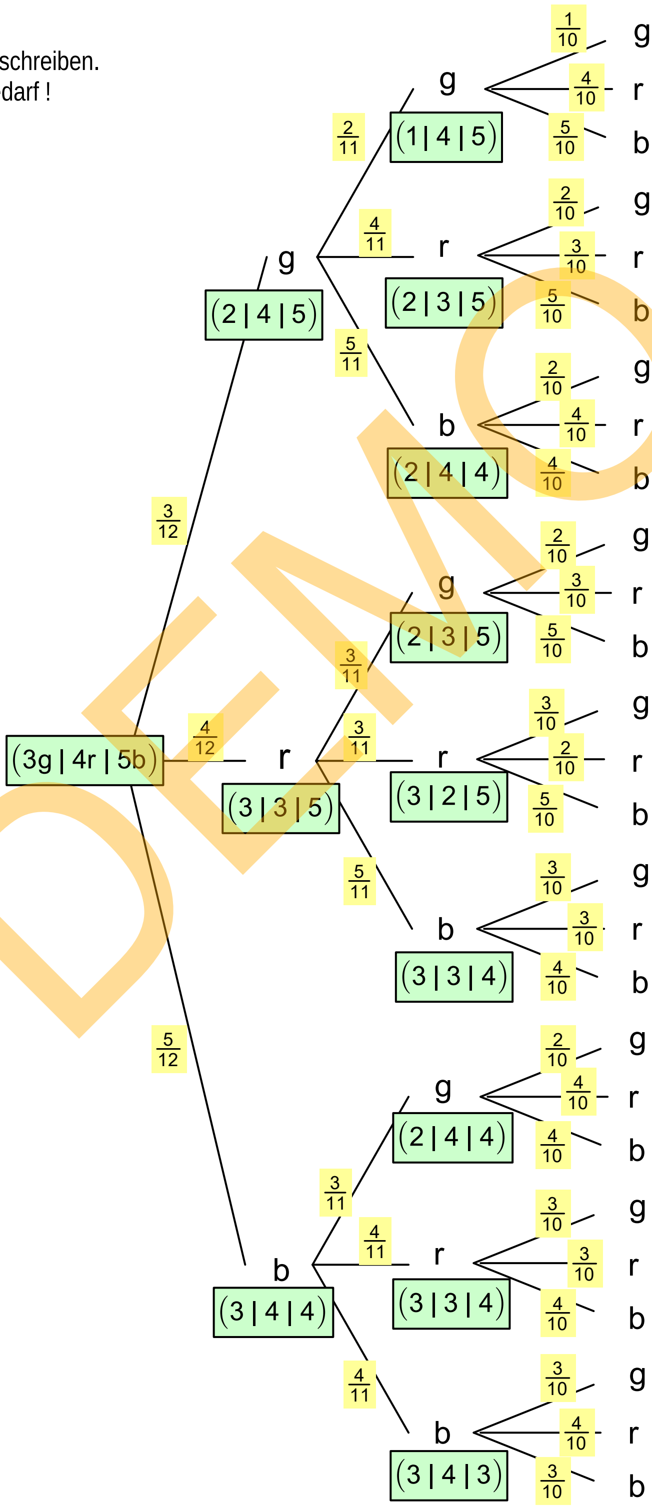
Beispiel 5 Viele bunte Smarties …

Wir ziehen drei Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne, die 3 gelbe, 4 rote und 5 blaue Kugeln enthält.



Berechnung des „Baumumfangs“: Bei jedem Zug gibt es 3 mögliche Ergebnisse, also bei 3 Zügen $m = 3^3 = 27$!

Es ist unnötig, hier alle Wahrscheinlichkeiten anzuschreiben. Wir berechnen sie nach Bedarf !



AUFGABE dazu

Berechne die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

A: Man zieht der Reihe nach blau, gelb und rot

B: Man erhält unabhängig von der Reihenfolge blau, gelb und rot.

C: Die 2. Kugel ist rot

Lösung

Beim **Ereignis A** wird zuerst blau gezogen, dazu gibt es in der Urne 5 blaue unter 12 Kugeln, also ist die Wahrscheinlichkeit für den ersten Zug $\frac{5}{12}$. Dann folgt eine gelbe Kugel. Davon sind unter den 11 restliche noch 3 vorhanden: $\frac{3}{11}$. Die dritte Kugel ist rot. Davon haben wir 4: $\frac{4}{10}$.

$$P(A)=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{22}.$$

Ich habe nun doch einmal gekürzt ! (Wenn ich alle Pfade eines Baumes berechnen soll, kürze ich nicht, weil man besser addieren kann, wenn alle Brüche denselben Nenner haben!)

Zu B gibt es 6 mögliche Ergebnisse $B=\{rgb\,;\,rbg\,;\,gbr\,;\,grb\,;\,bgr\,;\,brg\}$. Ich beginne mit rot und ziehe dann gb oder umgekehrt bg, dann ziehe ich zuerst g und dann br oder rb, und schließlich b mit anschließenden gr oder rg. (Lerne dieses System!)

Alle drei besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{22}$, wie es bei A berechnet worden ist.

Daher folgt: $P(B)=6\cdot\frac{1}{22}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}$.

Für C notieren wir uns alle möglichen Pfade, die es gibt:

$C=\{\ grg\,;\,grr\,;\,grb\,;\,rrg\,;\,rrr\,;\,rrb\,;\,brg\,;\,brr\,;\,brb\ \}$. Auch dazu gibt es ein System:

Zuerst sei die erste Kugel gelb, die zweite ist festgelegt als rot, dann hat man für die dritte alle 3 Möglichkeiten, g , r oder b. Dasselbe macht man, wenn die erste Kugel rot oder blau ist. Man kommt so auf 9 Pfade. Die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten (wir wenden die 2. Pfadregel an) ist $\frac{4}{12}$ bzw. $\frac{1}{3}$. Dazu diese lange Rechnung. Wir berechnen zuerst Teile davon:

grg ; grr ; grb ergeben zusammen

$$\boxed{\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\underbrace{\frac{2}{10}}_{g}+\boxed{\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\underbrace{\frac{3}{10}}_{r}+\boxed{\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\underbrace{\frac{5}{10}}_{b}=\boxed{\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\right)}_{=1}=\frac{12}{132}.$$

(Man kann das Produkt $\boxed{\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot$ ausklammern, die Summe in der Klammer ist dann 1 und fällt weg.)

rrg ; rrr ; rrb ergeben zusammen

$$\boxed{\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}}\cdot\underbrace{\frac{3}{10}}_{g}+\boxed{\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}}\cdot\underbrace{\frac{2}{10}}_{r}+\boxed{\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}}\cdot\underbrace{\frac{5}{10}}_{b}=\boxed{\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{5}{10}\right)}_{=1}=\frac{12}{132}.$$

brg ; brr ; brb ergeben zusammen

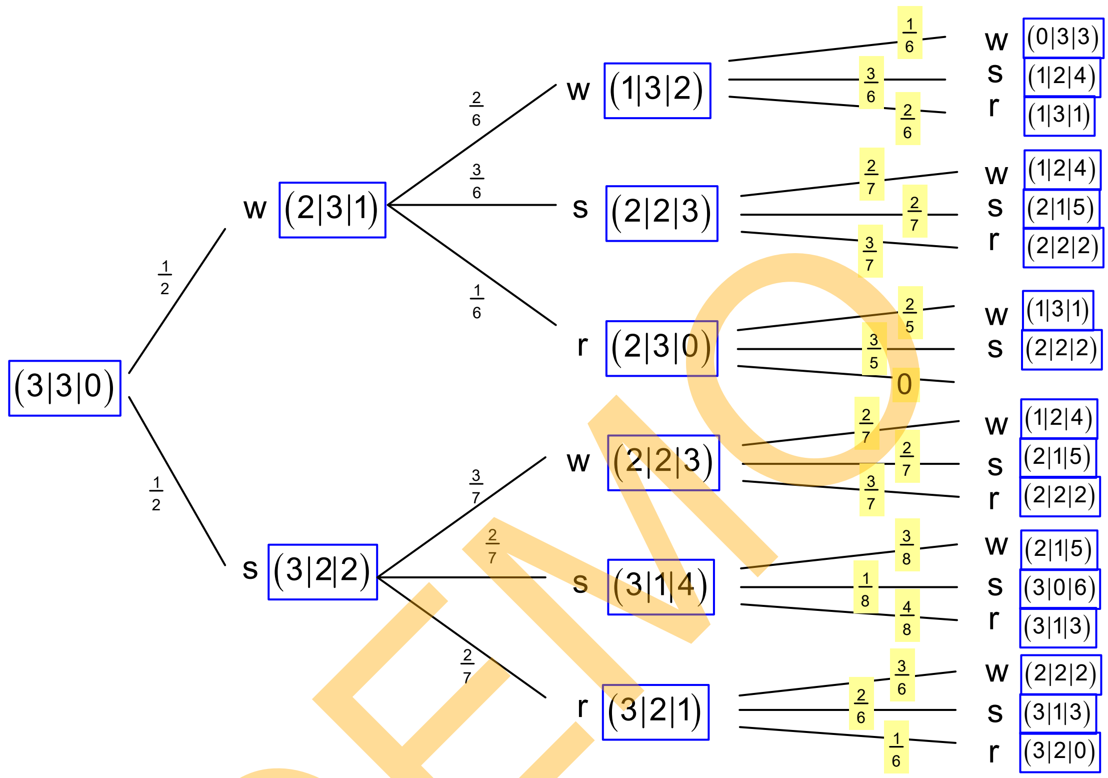
$$\boxed{\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\frac{3}{10}+\boxed{\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\frac{2}{10}+\boxed{\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\frac{5}{10}=\boxed{\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}}\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\right)}_{=1}=\frac{20}{132}.$$

Die Endsumme ist daher $P(C)=\frac{12}{132}+\frac{12}{132}+\frac{20}{132}=\frac{44}{11\cdot 12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Beispiel 6: Ein Urnenexperiment mit einer seltsamen Regel

In einer Urne befinden sich 3 weiße und 3 schwarze Kugeln. Man zieht dreimal eine Kugel, notiert die Farbe und legt im Falle einer weißen Kugel <u>eine</u> rote statt der weißen in die Urne zurück, und im Falle einer schwarzen <u>zwei</u> rote. Zieht man eine rote Kugel, wird <u>nichts</u> zurückgelegt.

Wir notieren den Urneninhalt als Tripel: $(\text{weiß}|\text{schwarz}|\text{rot})$.



Uns soll nun die Frage beschäftigen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man nach drei Aktionen (Ziehungen mit entsprechendem Zurücklegen) „so und so viele" rote Kugeln in der Urne hat.
Mathematiker formulieren dies so:

> Bestimme die **<u>Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X</u>** = Anzahl der roten Kugeln nach 3 Ziehungen in der Urne.

Durch einfaches Überdenken der oben genannten Spielregel finden wir heraus, dass es 0 bis 6 rote Kugeln geben kann, je nachdem, wie die Ziehung verläuft.
X besitzt damit den Definitionsbereich $S = \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

AUFGABE:

Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X.

Das heißt ausführlich: Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse X = 0, X = 1 bis X = 6 !

Zuerst ein Zwischenruf für Mitdenker

Zunächst halten wir fest, dass X diesen Definitionsbereich hat: $S = \{0;1;2;3;4;5;6\}$

Zur Erinnerung: Der **Definitionsbereich** ist die Menge der Zahlen, die man zur Berechnung von Werten in eine Funktion einsetzen darf. Unsere Funktion ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion P. Also wäre es exakter zu sagen: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion P (genannt auch Wahrscheinlichkeitsverteilung) hat den Definitionsbereich $S = \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Manche nennen die Menge $S = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ auch **Wertebereich**. Damit meint man die Menge der Funktionswerte einer Funktion. Nur – welcher Funktion?
Wenn man jedem Pfad einen X-Wert zuordnet liegt auch eine Funktion vor, die Anzahl-Funktion. Sie ordnet etwa dem Pfad wrr den Wert X = 2 (rote Kugeln) zu. So gesehen gilt also:

$S = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ ist einerseits eine Wertmenge (die Werte der Anzahlfunktion) und andererseits die Definitionsmenge der Wahrscheinlichkeitsverteilung P.

Nun zur Lösung der Aufgabe:

X = 0 heißt „Nach drei Ziehungen befindet sich keine rote Kugel in der Urne“,
X = 1 heißt „Nach drei Ziehungen befindet sich eine rote Kugel in der Urne“, usw.
Wir rechnen der Reihe nach die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.
$P(X=0)$ lesen wir „P für X gleich 0“ (oder „Wahrscheinlichkeit für X = 0“).
Dazu berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade. Die Zahl der roten Kugeln lesen wir für jeden Pfad aus der 3. Stelle des Tripels ab: $\boxed{(1|3|2)}$ besagt etwa X = 2 rote Kugeln.

$$P(X=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{42} \approx 0{,}0238$$

$$P(X=1) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{30} \approx 0{,}0889$$

$$P(X=2) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{3}{7} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{3}{7} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{3}{6} = \tfrac{3}{28} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{9}{98} + \tfrac{1}{14} \approx 0{,}3204$$

$$P(X=3) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{21} \approx 0{,}1468$$

$$P(X=4) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{2}{7} = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{3}{49} \approx 0{,}2159$$

$$P(X=5) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{14} + \tfrac{3}{49} + \tfrac{3}{56} \approx 0{,}1862$$

$$P(X=6) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{56} \approx 0{,}0179$$

Diese Tabelle ist also die Wertetafel der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X !

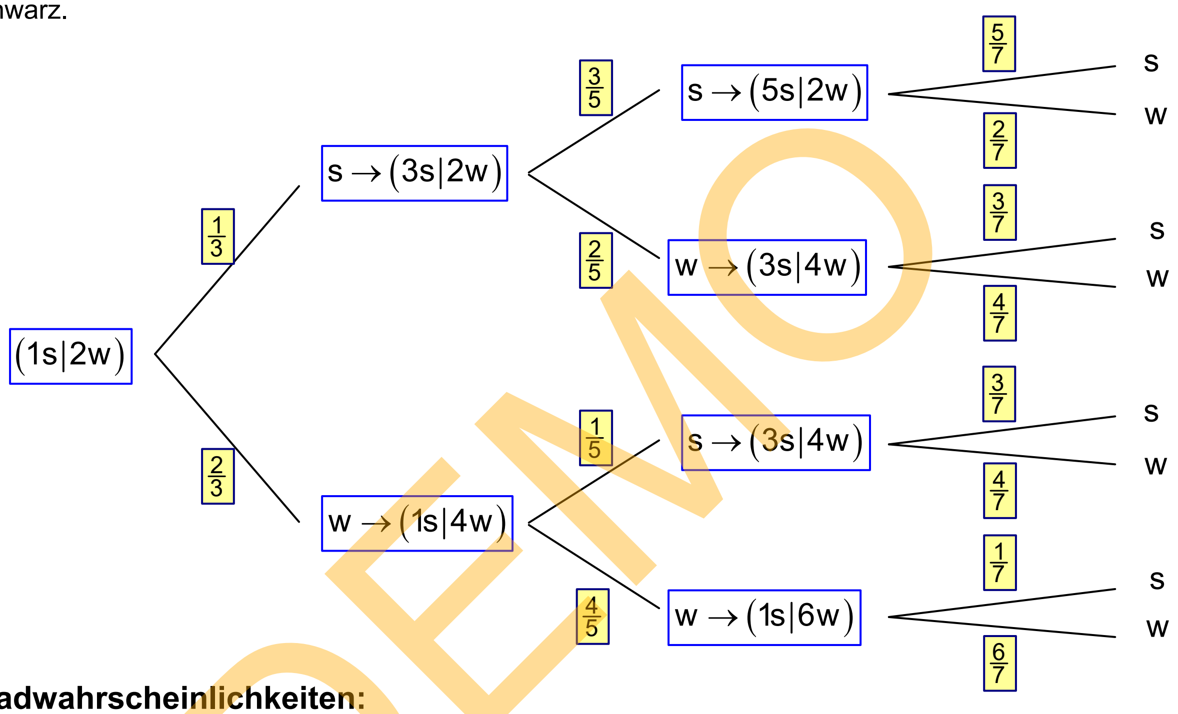
Beispiel 7 Noch etwas Seltsames …

In einer Urne befinden sich eine schwarze und zwei weiße Kugeln. Man entnimmt dreimal eine Kugel und legt jedes Mal drei Kugeln der gleichen Farbe zurück.

Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X = Anzahl der schwarzen Kugeln.

Lösung

Damit kein Missverständnis entsteht: Zieht man eine weiße Kugel, dann muss man insgesamt drei weiße zurücklegen, also erhöht sich dabei die Zahl der weißen Kugeln um zwei, entsprechend bei schwarz.



Pfadwahrscheinlichkeiten:

$P(\{sss\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7} = \frac{1}{7}\left(=\frac{15}{105}\right)$

$P(\{ssw\}) = P(\{sws\}) = P(\{wss\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{2}{35}\left(=\frac{6}{105}\right)$

$P(\{sww\}) = P(\{wsw\}) = P(\{wws\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7} = \frac{8}{105}$

$P(\{www\}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} = \frac{16}{35}\left(=\frac{48}{105}\right)$

Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X = Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

Aus den Pfadwahrscheinlichkeiten folgt dann die Wertetafel für die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X=0) = \frac{48}{105} \approx 0{,}457$$
$$P(X=1) = \frac{24}{105} \approx 0{,}229$$
$$P(X=2) = \frac{18}{105} \approx 0{,}171$$
$$P(X=3) = \frac{15}{105} \approx 0{,}143$$

§ 5 Rechentricks: Teilbäume, Abbruchbäume und Sammelpfade

Es ist in der Regel nicht nötig, einen kompletten Baum zu zeichnen, der aller Ereignisse enthält. Sehr oft kann man viele Pfade weglassen. Dabei sind gewisse Regeln zu beachten.

5.1 Teilbäume

In vielen Aufgaben ist es gar nicht notwendig, ein komplettes Baumdiagramm zu zeichnen. Dieses enthält ja bekanntlich sämtliche Pfade und gestattet somit die Berechnung aller möglichen Ereignis-Wahrscheinlichkeiten. Meist sind nur einige davon zu berechnen, und dazu genügt es, nur die Pfade zu zeichnen, die man wirklich benötigt.

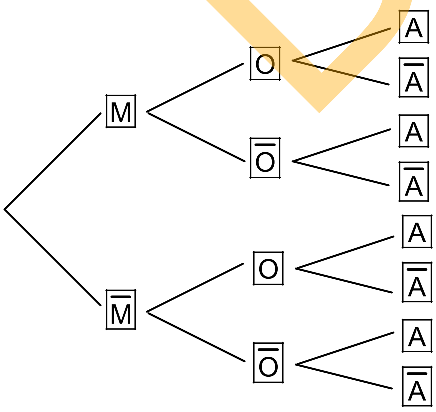
Musterbeispiel 1

Bei der Produktion von Tongefäßen sind 25 % wegen schlechter Form, 15 % wegen unsauberer Farbe und 20 % wegen ungleichmäßiger Oberfläche nicht erste Wahl. Treten mindestens zwei dieser Fehler auf, wird das Gefäß als Ausschuss deklariert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dies ein?

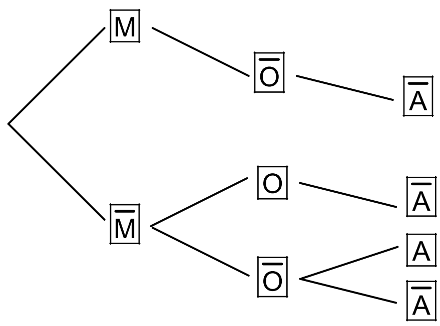
Zu Beginn muss man Ereignisse definieren.
Es sei M das Ereignis: Ein Topf hat eine gute Form. Es ist $P(M) = 0{,}75$
Es sei O das Ereignis: Ein Topf hat eine gute Oberfläche: $P(O) = 0{,}80$.
Es sei A das Ereignis: Ein Topf hat eine saubere Farbe: $P(A) = 0{,}85$

Ich stelle jetzt nur die Pfade dar, die zu einem Gefäß führen, das Ausschuss ist. Dazu lasse ich die Pfade weg, auf denen nur ein Fehler oder gar keiner vorkommt. Für das Diagramm verwende ich diesen Aufbau: 1. Stufe: Form, 2. Stufe: Oberfläche, 3. Stufe Farbe.

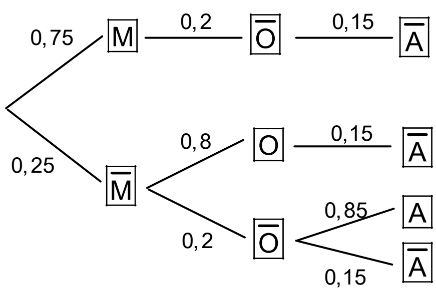
Hier der komplette Baum,



hier der benötigte Teilbaum



Experten zeichnen ihn gleich so:



Berechne jetzt die Wahrscheinlichkeit dazu!

Nach der 1. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten für die Pfade durch Multiplikation berechnet. Dies geschieht im 1. Schritt:

$P\left(\left\{M\overline{O}\,\overline{A}\right\}\right) = 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,15 = 0,0225$ (1. Pfad)

$P\left(\left\{\overline{M}O\overline{A}\right\}\right) = 0,25 \cdot 0,8 \cdot 0,15 = 0,03$ (2. Pfad)

$P\left(\left\{\overline{M}\,\overline{O}A\right\}\right) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,85 = 0,0425$ (3. Pfad)

$P\left(\left\{\overline{M}\,\overline{O}\,\overline{A}\right\}\right) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,15 = 0,0075$ (3. Pfad)

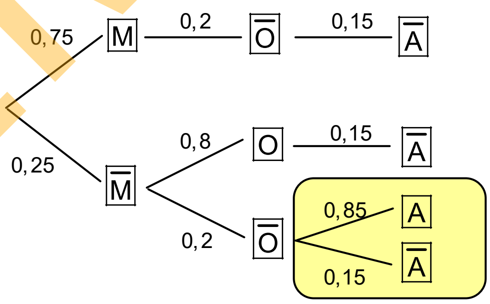
$P(\text{Ausschuss}) = 0,0225 + 0,03 + 0,0425 + 0,0075 = 0,1025$

Nach der 2. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten der Pfade addiert, die zu dem gefragten Ereignis gehören. Das Ergebnis besagt, dass in etwa 10% aller Fälle Ausschuss produziert wird. Also sind im Schnitt unter 100 Gefäßen 10 Ausschussware.

EXTREM WICHTIG

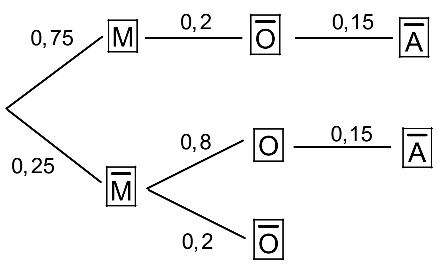
ACHTUNG: Jetzt kommt eine entscheidende Vereinfachung

Wenn an einem Gefäß bereits zwei Fehler nacheinander entdeckt werden, dann ist es bereits Ausschuss. Man muss also nach den Teilergebnissen $\boxed{\overline{M}}$ und $\boxed{\overline{O}}$ nicht mehr weiter prüfen, ob die Farbe gut oder schlecht ist.



Mit anderen Worten:
Man kann den Baum nach $\boxed{\overline{O}}$ abbrechen:

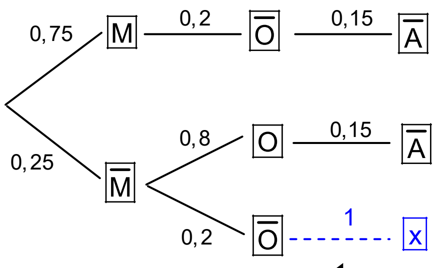
Damit sieht die Berechnung in einem Schritt so aus:



$P(\text{Ausschuss}) = 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,8 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,2 = 0,1025$
Man erhält dasselbe Ergebnis wie in der ausführlichen Rechnung.

Sind in einem Pfad ab einer bestimmten Stufe alle Ergebnisse für ein Ereignis zulässig, dann kann man diesen Pfad an dieser Stelle abbrechen.

Dazu steht im Abschnitt 5.3 (Abbruchbäume) mehr!



Wir wollen uns weitere Gedanken um diese Möglichkeit machen:
Nachdem man bereits $\boxed{\overline{M}}$ und $\boxed{\overline{O}}$ als Ergebnisse hat, darf jedes beliebige Ergebnis kommen, also $\boxed{A}$ oder $\boxed{\overline{A}}$. Für ein beliebiges Ergebnis kann man auch die Variable x verwenden.
Und ein beliebiges Ereignis kommt ganz sicher, also mit der Wahrscheinlichkeit 1.
Also kann man die beiden Pfade zu $\boxed{A}$ oder $\boxed{\overline{A}}$ zu einem Pfad zusammenfassen.
So etwas nennt man einen **Sammelpfad**. Darüber wird im nächsten Abschnitt mehr berichtet!

Für neugierige Experten noch eine Ergänzung

So beweist man rechnerisch die Richtigkeit dieser Möglichkeit, den Baum vor $\boxed{A}$ oder $\boxed{\overline{A}}$ abzubrechen. Ich berechne dazu die Summe der vier Pfade:

$$P\left(\left\{M\overline{O}\overline{A}\right\}\right) = 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225 \qquad \text{(1. Pfad)}$$

$$P\left(\left\{\overline{M}O\overline{A}\right\}\right) = 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}03 \qquad \text{(2. Pfad)}$$

$$P\left(\left\{\overline{M}\overline{O}A\right\}\right) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}0425 \qquad \text{(3. Pfad)}$$

$$P\left(\left\{\overline{M}\overline{O}\overline{A}\right\}\right) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}0075 \qquad \text{(3. Pfad)}$$

Hier die Summe

$$P(\text{Ausschuss}) = \underbrace{0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15}_{1.\text{Pfad}} + \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15}_{2.\text{Pfad}} + \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85}_{3.\text{Pfad}} + \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15}_{4.\text{Pfad}}$$

Aus den Produkten des 3. und 4. Pfades kann man **$0{,}25 \cdot 0{,}2$** ausklammern:

$$P(\text{Ausschuss}) = \underbrace{0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15}_{1.\text{Pfad}} + \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15}_{2.\text{Pfad}} + \underbrace{\mathbf{0{,}25 \cdot 0{,}2} \cdot \underbrace{(0{,}85 + 0{,}15)}_{=1}}_{\text{Sammelpfad}}$$

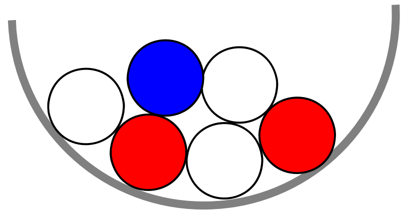
Die nach dem Ausklammern übrig bleibende Klammer hat den Wert 1. Und das ist genau die Wahrscheinlichkeit des beliebigen Ergebnisses x des oberen Baumes.

Somit bleibt übrig:

$$P(\text{Ausschuss}) = \underbrace{0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15}_{1.\text{Pfad}} + \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15}_{2.\text{Pfad}} + \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 1}_{\text{Sammelpfad}}$$

Den Faktor 1 kann man natürlich weglassen!

Musterbeispiel 2 (ganz schön anspruchsvoll aber super!)



In einer Urne befinden sich 2 rote, 1 blaue und 3 weiße Kugeln (Wer keine Urnen mag, kann einen Geldbeutel mit 6 Euromünzen verwenden, 2 sind aus Franreich (R), 1 aus Belgien (B) und drei aus Deutschland (W).)

a) **DAS 1. EXPERIMENT**

besteht darin, dass man 6 Kugeln mit Zurücklegen zieht.
Dann gilt für jeden Zug: $p_{rot} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p_b = \frac{1}{6}$ und $p_w = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Der komplette Baum würde pro Stufe in 3 Ergebnispfade auffächern, und das 5 mal nacheinander, also würde man $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ Pfade bekommen.

Damit wird klar, dass man nur die Teilbäume für die zu berechnenden Ereignisse zeichnet.

Ereignis A: Man zieht genau eine blaue Kugel. Die anderen vier Kugeln sind also nicht blau, wofür wir $\bar{b}$ schreiben. Die blaue Kugel kann an 1. Stelle gezogen werden , oder an 2. Stelle usw. Also gibt es 5 solche Sammelpfade:

Immer wenn $\boxed{\bar{b}}$ da steht, wird $\boxed{r}$ oder $\boxed{w}$ gezogen.

Dies kann man wie im Beispiel zuvor gezeigt zusammenfassen. (Mehr dazu in 5.2 !)

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}]{\text{1. Zug}} \boxed{b} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{\text{2. Zug}} \boxed{b} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{\text{3. Zug}} \boxed{b} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{\text{4. Zug}} \boxed{b} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\bar{b}} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{\text{5. Zug}} \boxed{b}$$

Weil nach jedem Zug zurückgelegt wird, ändern die Wahrscheinlichkeiten für blau oder nicht blau in jedem Zug nicht. Daher erhält man für jeden der 5 Pfade dieselbe Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

Somit lautet unser Ergebnis: $P(A) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0{,}4019$

Ereignis B: Die 1., 3. und 5. Kugel sind rot, die anderen sind nicht rot aber verschiedenfarbig.

Dies ist ein herrliches Beispiel für Vereinfachung.

Hier zeichnen wir nur zwei Pfade:

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{r} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \boxed{w} \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{r} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{b} \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{r}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{r} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{b} \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{r} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \boxed{w} \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{r}$$

Beide Pfade haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, wie man leicht erkennt. Daher folgt

$$P(B) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{162} \approx 0{,}006\,!$$

Ereignis C: Man zieht **<u>höchstes eine</u>** blaue Kugel,

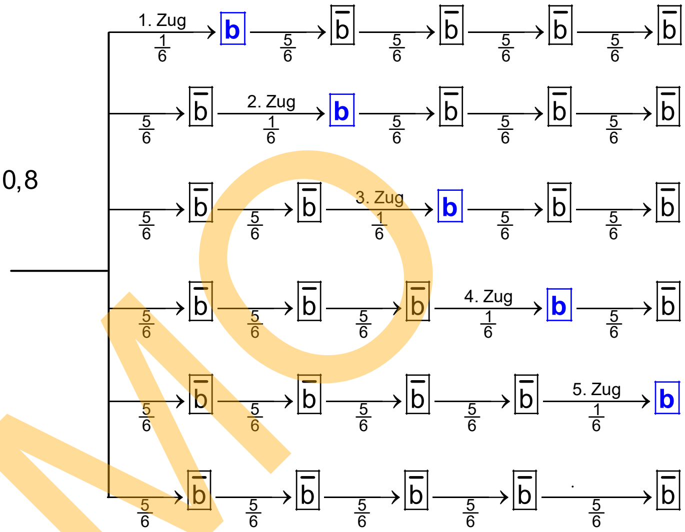
(Mehr Aufgaben zu höchstens und mindestens werden in § 6 besprochen)

„Höchstes eine“ blaue Kugel heißt doch „eine oder keine“. Bei 5 Ziehungen ergibt das genau 6 Pfade: Wenn genau eine blaue Kugel gezogen wird, dann kann dies beim 1. Zug geschehen, oder beim 2. Zug usw. Das wurde im Ereignis A schon besprochen.

Hier der Teilbaum mit allen 6 Pfaden, er entsteht aus dem von A durch hinzufügen des letzten Pfades.

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich daher so:

$$P(C)=P(A)+\left(\tfrac{5}{6}\right)^5=\left(\tfrac{5}{6}\right)^5+\left(\tfrac{5}{6}\right)^5=2\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^5\approx 0{,}8$$



Ereignis D: Man zieht **<u>mindestens eine</u>** blaue Kugel,

Den unerfahrenen Leser wird es vielleicht verblüffen, wenn er erfährt, dass dazu 242 Pfade gehören! Die Begründung ist ganz einfach. Man benötigt alle Pfade bis auf einen: Nur das Ereignis, dass keine blaue Kugel gezogen wird, kommt nicht in Frage:

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\bar{b}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\bar{b}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\bar{b}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\bar{b}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\bar{b}}$$

Dies ist das Paradebeispiel dafür, dass es in vielen Fällen günstiger ist, mit dem Gegenereignis zu arbeiten. Niemand wird die Wahrscheinlichkeiten der 242 Pfade berechnen, in denen mindestens einmal $\boxed{w}$ steht. Man rechnet dann so (Siehe Seite 14):

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^5\approx 0{,}6$$

Ereignis E: **Die ersten beiden Kugeln sind weiß, die nächsten drei verschiedenfarbig.**

Dazu diese **Aufgabe**

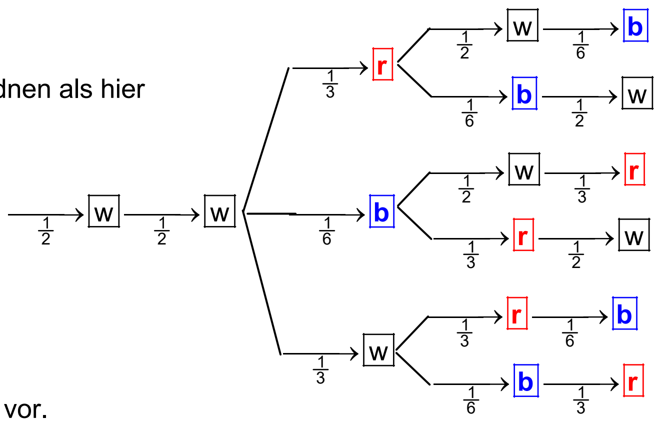
Zeichne den zu E passenden Teilbaum selbständig auf und berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Lösung steht auf der Folgeseite (bitte nicht spicken!).

Lösung:

(Man kann die Pfade auch anders anordnen als hier gezeigt wird.)

Man muss erkennen, dass jeder Pfad 3 weiße, eine rote und eine blaue Kugel enthält.
Und wegen des Zurücklegens liegt in jeder Stufe dieselbe Wahrscheinlichkeit vor.



Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $P(E)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$

Ergebnis: $P(E)=\cancel{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\cancel{1}}{\cancel{6}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}\approx 0{,}0417$

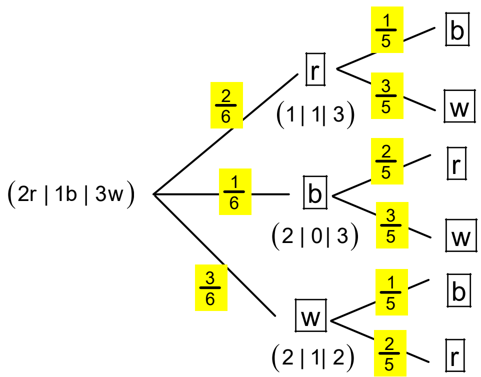
Anmerkung für Fortgeschrittene:

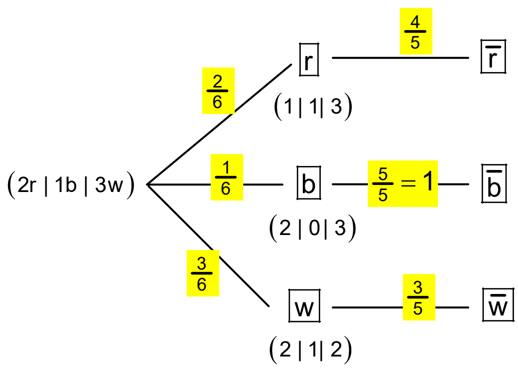
Hinter den letzten drei Kugeln steckt ein Prinzip. Soll man drei verschiedene Objekte in einer Reihe anordnen (umordnen; permutieren); dann hat man für den ersten Platz drei Möglichkeiten (das waren hier r, b oder w). In jedem dieser Fälle hat man dann für den 2. Platz noch zwei Möglichkeiten (das sind zusammen jetzt schon dreimal 2 = 6 Möglichkeiten). Für den letzten Platz bleibt dann nur noch das letzte Objekt übrig. Man kann also 3 Objekte auf $3\cdot2\cdot1=6$ *Arten anordnen. Für dieses Produkt schreibt man* $3!$. *Das Ausrufezeichen liest man "Fakultät".*
Es ist die Abkürzung für das Produkt herunter bis 1: $3!=3\cdot2\cdot1$
5 verschiedene Objekte lassen sich daher auf $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ *Arten anordnen usw. Dies wird im Teilgebiet „Kombinatorik" besprochen: Datei 14311.*

b) **<u>DAS 2. EXPERIMENT</u>**
besteht darin, dass man 2 Kugeln mit einem Griff entnimmt.
Dies entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen.

Ereignis F: Die beiden Kugeln sind verschiedenfarbig.

Den F betreffenden Teilbaum kann man ausführlich und abgekürzt zeichnen:





Aufgabe: Berechne zu beiden Teilbäumen die Wahrscheinlichkeit.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des 1. Teilbaumes:

$$P(F) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2+6+2+3+3+6}{30} = \frac{22}{30}$$

Gute Rechner kürzen dies ab und fassen gleich immer die zwei Pfade zusammen, die sich bei der zweiten Stufe trennen. Das sieht dann so aus:

$$P(F) = \frac{2}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right) = \frac{2\cdot 4+5+3\cdot 3}{30} = \frac{22}{30}$$

Verwendet man den rechten Teilbaum, sieht die Berechnung so aus:

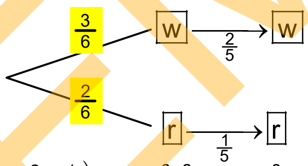
$$P(F) = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{8+5+9}{30} = \frac{22}{30} \approx 0{,}7333$$

Man erkennt übrigens, dass dies auch durch Zusammenfassen der letzten Rechnung entsteht.

Wichtiger Hinweis

Es geht noch schneller, wenn man statt F das Gegenereignis $\overline{F}$ untersucht. Es heißt: „Beide Kugeln sind gleichfarbig“.

Weil es zur Farbe blau aber nur eine Kugel gibt (es wird ja nicht mehr zurückgelegt!), kann man nicht zweimal blau nacheinander ziehen, also kommen nur diese beiden Pfade in Frage:



Daraus folgt:

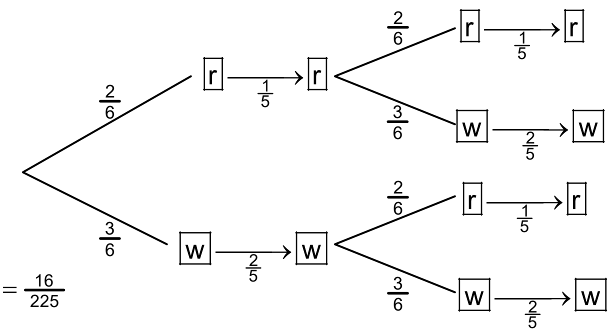
$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \left(\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{6+2}{30} = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30}$$

Beachte:
Wer hier die Brüche kürzt, tut sich keinen Gefallen. Ungekürzt hat man sofort überall denselben Nenner und kann sofort addieren!!!

c) **DAS 3. EXPERIMENT**

ist ein Spiel, bei dem zwei Kugeln mit einem Griff entnommen und dann wieder zurückgelegt werden. Waren beide Kugeln gleichfarbig, darf man nochmals zwei Kugeln mit einem Griff entnehmen. Sind sie wieder gleichfarbig, hat man gewonnen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man?

Ich will dies zuerst ganz ausführlich darlegen. Dazu zeichne ich den „**Gewinnbaum**“, der also nur die Pfade enthält, die zu einem Gewinn führen:



Geschicktes Berechnen der Wahrscheinlichkeit :

$$P(G) = \underbrace{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)}_{\text{1. und 2. Pfad}} + \underbrace{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)}_{\text{3. und 4. Pfad}}$$

Ausklammern der Klammer:

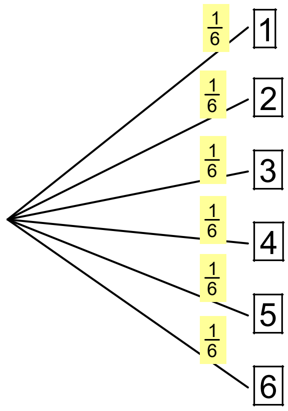
$$P(G) = \left[\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\right]\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{30}\cdot\frac{8}{30} = \left(\frac{4}{15}\right)^2 = \frac{16}{225}$$

Das war supertrickreich und muss nicht sein. Der Taschenrechner findet es auch anders …

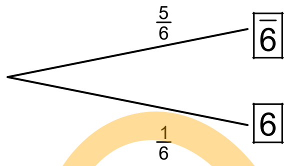
5.2 Mehr über Sammelpfade

Beispiel 1: Und immer wieder wird gewürfelt

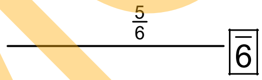
a) Bei manchen Spielen hat die 6 eine große Bedeutung. Es geht dann nicht darum, ob man eine 1, eine 5 oder eine 6 würfelt, sondern nur darum, ob man eine 6 würfelt oder nicht. Für den ersten Wurf sieht ein ausführliches Baumdiagramm so aus:



Durch Zusammenfassen der ersten 5 Pfade führt zu diesem komprimierten Baumdiagramm:



Wenn man nicht zwischen den Wurfergebnissen 1 bis 5 unterscheiden muss, dann reicht dieser „Sammelpfad" völlig aus:



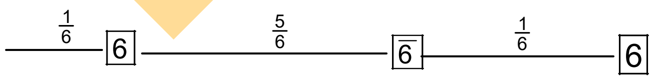
Nun zur Rechenaufgabe:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei dreimaligem Würfeln keine 6 erhält (Ereignis A):

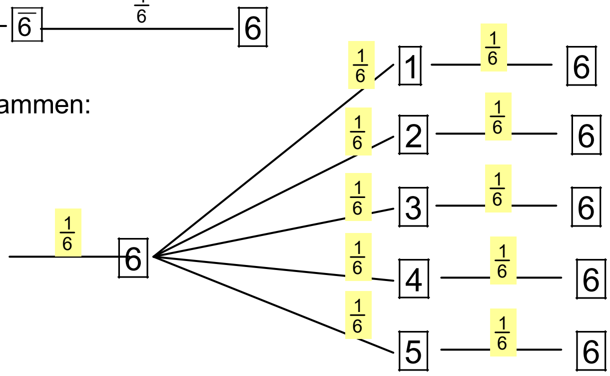
Man zeichnet den auf einen Sammelpfad reduzierten „Baum":

Und erhält $P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man der Reihe nach 6, keine 6 und noch eine 6?



Dieser Sammelpfad fasst 5 Pfade zu einem zusammen:



Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses B berechnet sich aus dem Sammelpfad zu

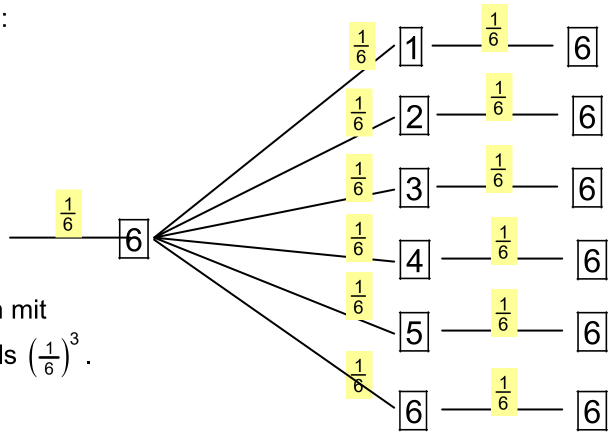
$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

und aus dem ausführlichen Teilbaum:

$P(B) = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5}{216}$ (denn es liegen ja 5 Pfade mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ vor.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man bei 3 Würfen als erste und letzte Zahl eine 6?

Zuerst der ausführliche Teilbaum:



Er besteht aus 6 gleichen Pfaden mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

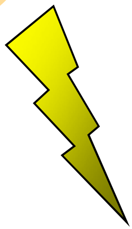
Also folgt

$$P(C) = \cancel{6} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Nun ersetzen wir die 2. Stufe, in der jedes beliebige Ergebnis erlaubt ist durch x ,
Ein beliebiges Ergebnis kommt sicher vor, also mit der Wahrscheinlichkeit 1:

Dies führt auf diesen Sammelpfad:

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{6} \xrightarrow[1]{} \boxed{x} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{6}$$



mit $P(C) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Welche Vereinfachung!

d) Wir stellen uns vor, dass wir 10-mal würfeln und wollen das Ereignis E berechnen:
„Der 3. , 4. und 9. Wurf sind 6, beim 2. und 10. tritt keine 6 auf."
Dann zeichnen wir diesen Sammelpfad:

$$\xrightarrow[1]{} \boxed{x} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{6} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{6} \xrightarrow[1]{} \boxed{x} \xrightarrow[1]{} \boxed{x} \xrightarrow[1]{} \boxed{x} \xrightarrow[1]{} \boxed{x} \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{6} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}}$$

Dieser ersetzt $6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5 = 194.400$ Pfade!

Man erhält $P(E) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{6^5} \approx 0{,}003$

Beispiel 2: Karten legen - die Ansprüche steigen.

Einem Kartenstapel mit 8 roten, 5 blauen und 10 schwarzen Karten werden der Reihe nach 6 Karten <u>ohne Zurücklegen</u> entnommen.

Ein komplettes Baumdiagramm dazu würde $3^6 = 729$ Pfade umfassen und auf kein Papier passen, Daher zeichnet man immer nur einen Teilbaum, der die zum Ereignis passenden Pfade betrifft, möglichst mit Sammelpfaden.

Folgende Ereignisse sollen untersucht werden:

A: Wir ziehen der Reihe nach 2 rote, 2 blaue und 2 schwarze Karten.
Dazu gibt es einen einzigen Pfad:

$$(8r\,|\,5b\,|\,10s)\xrightarrow{\frac{8}{23}}\boxed{r}\xrightarrow{\frac{7}{22}}\boxed{r}\xrightarrow{\frac{5}{21}}\boxed{b}\xrightarrow{\frac{4}{20}}\boxed{b}\xrightarrow{\frac{10}{19}}\boxed{s}\xrightarrow{\frac{9}{18}}\boxed{s}$$

$$(7r\,|\,5b\,|\,10s)\quad(6r\,|\,5b\,|\,10s)\quad(6r\,|\,4b\,|\,10s)\quad(6r\,|\,3b\,|\,10s)\quad(6r\,|\,3b\,|\,9s)$$

Anhand der als Tripel geschriebenen Bestände wurden die Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Es folgt $P(A) = \frac{8\cdot7\cdot5\cdot4\cdot10\cdot9}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18} \approx 0{,}001387$

B: Die ersten zwei sind rot, dann folgen nur noch nicht rote Karten:

Jetzt benötigen wir einen Sammelpfad, denn nicht rot heißt entweder blau oder schwarz.
Diese Verzweigungen fassen wir zusammen:

$$(8r\,|\,15\bar{r})\xrightarrow{\frac{8}{23}}\boxed{r}\xrightarrow{\frac{7}{22}}\boxed{r}\xrightarrow{\frac{15}{21}}\boxed{\bar{r}}\xrightarrow{\frac{14}{20}}\boxed{\bar{r}}\xrightarrow{\frac{13}{19}}\boxed{\bar{r}}\xrightarrow{\frac{12}{18}}\boxed{\bar{r}}$$

$$(7r\,|\,15\bar{r})\quad(6r\,|\,15\bar{r})\quad(6r\,|\,14\bar{r})\quad(6r\,|\,13\bar{r})\quad(6r\,|\,12\bar{r})$$

Es folgt $P(B) = \frac{8\cdot7\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18} \approx 0{,}02524$

C: Die letzten vier Karten sind schwarz.

(Dann sind die ersten zwei beliebig!)

$$(13\bar{s}\,|\,10s)\xrightarrow{1}\boxed{x}\xrightarrow{1}\boxed{x}\xrightarrow{\frac{10}{23}}\boxed{s}\xrightarrow{\frac{9}{22}}\boxed{s}\xrightarrow{\frac{8}{21}}\boxed{s}\xrightarrow{\frac{7}{20}}\boxed{s}$$

$$(13\bar{s}\,|\,10s)\quad(13\bar{s}\,|\,10s)\quad(13\bar{s}\,|\,9s)\quad(13\bar{s}\,|\,8s)\quad(13\bar{s}\,|\,7s)$$

Wenn eine beliebige (x) Karte gezogen wird verändert man am Inhalt nichts.
Dass diese fragwürdig erscheinende Überlegung zum richtigen Ergebnis führt, steht auf der nächsten Seite! Zuerst noch Wahrscheinlichkeit des Sammelpfades:

$$P(C) = 1\cdot1\cdot\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20} = 0{,}02371$$

Diese Kurzberechnung wollen wir durch eine ausführliche Berechnung bestätigen! (Nicht leicht!)
Die ersten beiden Karten können rot, blau oder schwarz sein:

1. Karte rot

$$\frac{8}{23}\boxed{r}\frac{7}{22}\boxed{r}\frac{10}{21}\boxed{s}\frac{9}{20}\boxed{s}\frac{8}{19}\boxed{s}\frac{7}{18}\boxed{s}$$
$$\frac{8}{23}\boxed{r}\frac{5}{22}\boxed{b}\frac{10}{21}\boxed{s}\frac{9}{20}\boxed{s}\frac{8}{19}\boxed{s}\frac{7}{18}\boxed{s}$$
$$\frac{8}{23}\boxed{r}\frac{10}{22}\boxed{s}\frac{9}{21}\boxed{s}\frac{8}{20}\boxed{s}\frac{7}{19}\boxed{s}\frac{6}{18}\boxed{s}$$

1. Karte blau

$$\frac{5}{23}\boxed{b}\frac{8}{22}\boxed{r}\frac{10}{21}\boxed{s}\frac{9}{20}\boxed{s}\frac{8}{19}\boxed{s}\frac{7}{18}\boxed{s}$$
$$\frac{5}{23}\boxed{b}\frac{4}{22}\boxed{b}\frac{10}{21}\boxed{s}\frac{9}{20}\boxed{s}\frac{8}{19}\boxed{s}\frac{7}{18}\boxed{s}$$
$$\frac{5}{23}\boxed{b}\frac{10}{22}\boxed{s}\frac{9}{21}\boxed{s}\frac{8}{20}\boxed{s}\frac{7}{19}\boxed{s}\frac{6}{18}\boxed{s}$$

1. Karte schwarz

$$\frac{10}{23}\boxed{s}\frac{8}{22}\boxed{r}\frac{9}{21}\boxed{s}\frac{8}{20}\boxed{s}\frac{7}{19}\boxed{s}\frac{6}{18}\boxed{s}$$
$$\frac{10}{23}\boxed{s}\frac{5}{22}\boxed{b}\frac{9}{21}\boxed{s}\frac{8}{20}\boxed{s}\frac{7}{19}\boxed{s}\frac{6}{18}\boxed{s}$$
$$\frac{10}{23}\boxed{s}\frac{9}{22}\boxed{s}\frac{8}{21}\boxed{s}\frac{7}{20}\boxed{s}\frac{6}{19}\boxed{s}\frac{5}{18}\boxed{s}$$

Man studiere genau, wie ich diese 9 Pfade angeordnet habe: Die erste Karte ist dreimal rot, so dass die zweite alle drei Farben durchwechseln kann, usw.

Berechnung der 9 Pfadwahrscheinlichkeiten: Da alle Produkte denselben Nenner haben, klammere ich ihn sofort aus.

$$P(C)=\frac{1}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18}\cdot[8\cdot7\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7+8\cdot5\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7+8\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6+...]$$
$$[...+5\cdot8\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7+5\cdot4\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7+5\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6+...]$$
$$[...+10\cdot8\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6+10\cdot5\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6+10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5]$$

$$P(C)=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18}\cdot[(8\cdot7+8\cdot5+8\cdot6)+(5\cdot8+5\cdot4+5\cdot6)+(8\cdot6+5\cdot6+6\cdot5)]$$

$$P(C)=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18}\cdot[8\cdot(7+5+6)+5(8+4+6)+6\cdot(8+5+5)]$$

$$P(C)=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18}\cdot[8\cdot18+5\cdot18+6\cdot18]$$

$$P(C)=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18}\cdot18[8+5+6]=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot\cancel{19\cdot18}}\cdot\cancel{18\cdot19}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{23\cdot22\cdot21\cdot20}$$

ERGEBNIS:

$$1\boxed{x}\;1\boxed{x}\;\frac{10}{23}\boxed{s}\frac{9}{22}\boxed{s}\frac{8}{21}\boxed{s}\frac{7}{20}\boxed{s}$$

Beliebige Karten treten mit der Wahrscheinlichkeit 1 auf und sind praktisch „wie nicht vorhanden“. Anschließend gezogene Karten werden rechnerisch so behandelt wie bei einer vollen Urne.
(Ein Trick, den nicht viele kennen!)

Daher beginnt man in der 3. Stufe im Nenner mit 23 (Anzahl der Karten bei vollem Stapel) und nicht mit 21 (weil davor schon gezogen worden ist).

Das nächste Ereignis dazu:

D: Die 2. Karte ist schwarz, die 4. und 6. sei rot, die 5. nicht rot.
Der Sammelpfad dazu sieht so aus:

$$(8r\,|\,5b\,|\,10s)\xrightarrow{1}\boxed{x}\xrightarrow{\frac{10}{23}}\boxed{s}\xrightarrow{1}\boxed{x}\xrightarrow{\frac{8}{22}}\boxed{r}\xrightarrow{\frac{14}{21}}\boxed{\overline{r}}\xrightarrow{\frac{7}{20}}\boxed{r}$$

$$(8r\,|\,5b\,|\,10s)\qquad(8r\,|\,5b\,|\,9s)\qquad(7r\,|\,13\overline{r})$$

$$(8r\,|\,5b\,|\,9s)\qquad(7r\,|\,5b\,|\,9s)$$

Die Wahrscheinlichkeit dazu:

$$P(D)=1\cdot\tfrac{10}{23}\cdot1\cdot\tfrac{8}{22}\cdot\tfrac{14}{21}\cdot\tfrac{7}{20}=\tfrac{10}{23}\cdot\tfrac{8}{22}\cdot\tfrac{14}{21}\cdot\tfrac{7}{20}=\tfrac{4}{23\cdot22}\cdot\tfrac{14}{3}=\tfrac{4\cdot7}{23\cdot11\cdot3}=\tfrac{28}{759}\approx0{,}03689$$

Erklärung: Die 1. und 3. Karte sind beliebig, daher dort die Wahrscheinlichkeit 1.
Die 2. Karte ist schwarz, davon haben wir 10 in 23. Die vierte ist rot, wir haben 8 rote in (noch) 22 Karten, denn eine schwarze ist raus. Dann kommt eine nicht rote, davon gibt es 5 blaue und noch 9 schwarze in 21 Karten, schließlich noch eine rote aus 7 unter 20 Karten. Die beliebigen kann man völlig ignorieren !

Beispiel 3: Gewinnlose ziehen

Diese Rechnung hat eine unglaubliche Konsequenz:

In einem Lostopf befinden sich 200 Lose, darunter 5 Hauptgewinne. Man steht nun vor einem ziemlich geleerten Lostopf und zögert:

Wenn da nur noch 50 Lose drin sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit doch sehr groß, dass die Hauptgewinne schon draußen sind, wird man vielleicht denken.

Weit gefehlt: Da man nicht weiß, was z. B. mit den 150 Losen zuvor gezogen worden ist, müssen wir sie als **<u>beliebige Lose</u>** ansehen und ihnen die Wahrscheinlichkeit 1 zuweisen.

$$\xrightarrow{1}\underset{1.}{\boxed{x}}\xrightarrow{1}\underset{2.}{\boxed{x}}\xrightarrow{1}\boxed{\text{usw}}\xrightarrow{1}\underset{150.}{\boxed{x}}\xrightarrow{\frac{1}{40}}\underset{151.}{\boxed{H}}$$

$$P=1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot\tfrac{1}{40}=\tfrac{1}{40}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Pfad Haupttreffer beim 151. Los ist daher genau so groß wie beim 1. Los im vollen Topf, also $\frac{1}{40}$!!

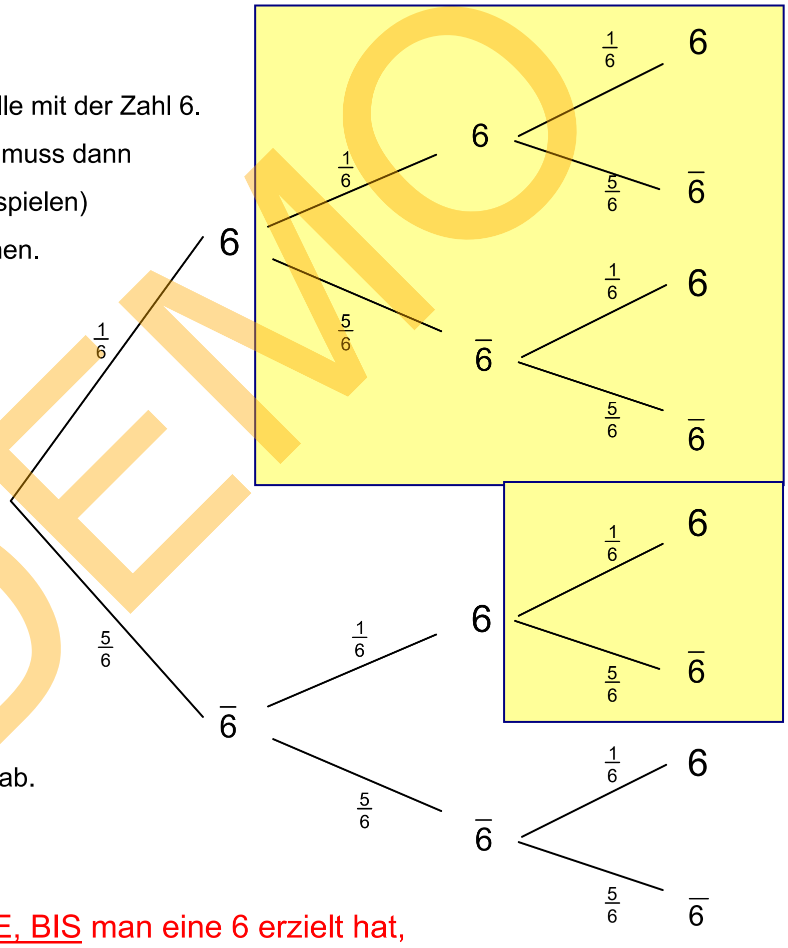
5.3 Abbruchbäume / „So lange bis – Aufgaben“

Beispiel 1: Wir spielen „Mensch ärgere Dich nicht“

Beim Spiel „Mensch-Ärgere-Dich-Nicht“ benötigt man eine 6, damit man eine neue Spielfigur aufs Feld bringen darf. Steht keine eigene Figur auf dem Feld, darf man so lange würfeln, bis man eine 6 erhält, höchstens aber dreimal.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei eine Sechs ?

Dreimal würfeln entspricht dreimaligem Ziehen mit Zurücklegen, denn die Wahrscheinlichkeit für 6 oder nicht Sechs bleibt bei jedem Wurf dieselbe. Für unseren Baum benötigen wir nicht alle möglichen Ergebnisse. Uns interessiert nur das Ereignis 6 und dessen Gegenereignis $\overline{6}$ (nicht 6) . Hier das vollständige Baumdiagramm für dreimal würfeln mit Sammelpfaden.



Die obersten 4 Pfade beginnen alle mit der Zahl 6. **Was dann kommt ist egal**. Man muss dann nicht mehr weiterrechnen (weiterspielen) und kann den Baum dort abbrechen.

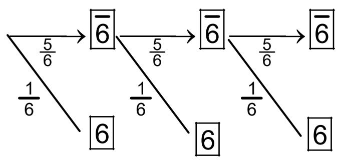
Ich zeige weiter unten den Interessierten, dass

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser 4 Pfade genau $\frac{1}{6}$ ist, also wie wenn man nach der 1. 6 abbricht.

Das gilt natürlich auch dann, wenn die 6 erst mit dem 2. Wurf kommt. Dann bricht man ab.

Man würfelt also SO LANGE, BIS man eine 6 erzielt hat, höchstens aber dreimal.

Das nun folgende superkurze Baumdiagramm hat den untersten Pfad ganz oben, und die anderen wurden nach der gewürfelten 6 abgebrochen!



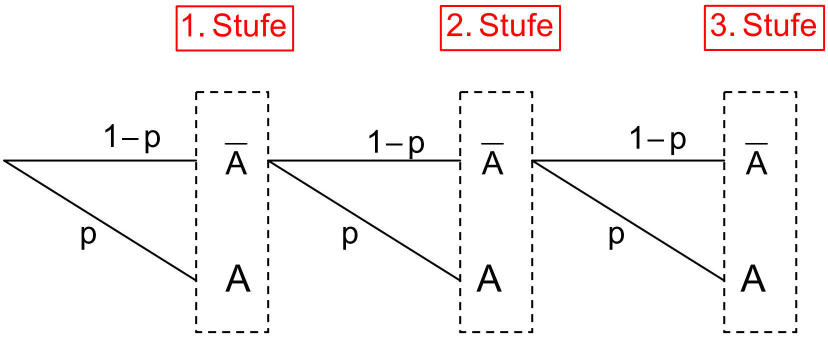
Optimaler geht es nicht mehr.

Es folgt:

$$P(G) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} == \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{36+30+25}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$$

Etwas Theorie dazu

Die Aufgabe Spiele „**<u>so lange bis</u>**..." kommt nicht selten vor. Dazu zeichnet man dann aber meist keinen kompletten Baum, sondern nur diesen sogenannten **Abbruchbaum**:



In diesem Baumdiagramm wird folgende Situation dargestellt:

Ein Experiment wird dreimal nacheinander durchgeführt, es liegt also ein dreistufiges Bernoulli-Experiment vor, das allerdings immer dann abgebrochen wird, wenn das Ereignis A eintritt.

Berechnung der „Gewinn-Wahrscheinlichkeit" P(G), also der Wahrscheinlichkeit , bei diesem Spiel das Ereignis A zu erzielen und dann abzubrechen:

Hier führen drei Pfade zu A. Deren Wahrscheinlichkeiten werden addiert:

$$P(G) = p + (1-p)\cdot p + (1-p)^2 \cdot p$$

Beim Würfelspiel war das $P(G) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$

Zusatzfrage

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dies nicht zu erreichen?

Das passiert im oberen Pfad:

$$P(\overline{G}) = (1-p)^3 \quad \text{oder kürzer} \quad P(\overline{G}) = 1 - P(G).$$

Beim Würfelspiel; $P(\overline{G}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787$, bzw.

$$P(\overline{G}) = 1 - P(G) \approx 1 - 0{,}4213 = 0{,}5787 \quad !!!$$

Viel häufiger werden solche Solange-Bis-Aufgaben bei Spielen untersucht, bei denen zwei Personen gegeneinander antreten. Einer beginnt, der andere zieht nach. Wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit ? Dazu die folgenden Beispiele:

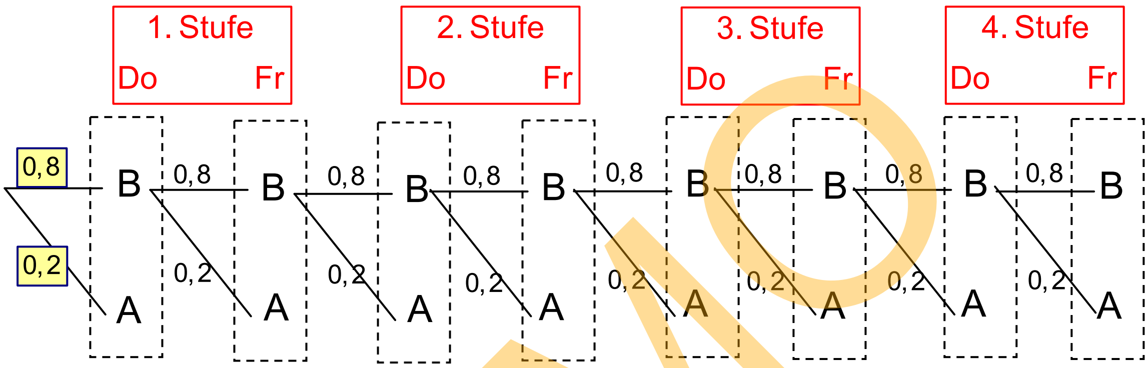
Beispiel 2 Zwei Spieler und ein Glücksrad

Franz und Domy stehen vor einem Glückrad, das auf gleich großen Sektoren die Zahlen 1 bis 5 aufgedruckt hat. Durch Drehen bleibt das Rad an einer dieser Zahlen stehen. Es wird vereinbart, dass derjenige gewonnen hat, der eine 1 als Ergebnis hat. Das Rad wird maximal 4-mal gedreht. Domy darf beginnen.

Berechne die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für beide Spieler und die Wahrscheinlichkeit für einen unentschiedenen Ausgang.

Lösung:

Es sei $A = \{1\}$ und $B = \overline{A} = \{2,3,4,5\}$, Do = Domy dreht und Fr = Franz dreht.



Damit Domy gewinnt, muss sie das 1., 3., 5. oder 7. A erreichen. Die Wahrscheinlichkeiten dazu:

$\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$: $\quad p_1 = 0,2$

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$ $\quad p_3 = 0,8^2 \cdot 0,2$

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$ $\quad p_5 = 0,8^4 \cdot 0,2$

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$ $\quad p_7 = 0,8^6 \cdot 0,2$

Die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass Domy gewinnt, ist nach der 2. Pfadregel die Summe davon:

$$P(Do) = 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^6 \cdot 0,2 \approx 0,4624 \qquad (1)$$

Damit Franz gewinnt, muss er das 2., 4., 6. oder 8. A erreichen:

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$: $\quad p_2 = 0,8 \cdot 0,2$

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$ $\quad p_4 = 0,8^3 \cdot 0,2$

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$ $\quad p_6 = 0,8^5 \cdot 0,2$

$\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,8]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[0,2]{}\boxed{A}$ $\quad p_8 = 0,8^7 \cdot 0,2$

Die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass Franz gewinnt, ist nach der 2. Pfadregel die Summe davon:

$$P(Fr) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^5 \cdot 0,2 + 0,8^7 \cdot 0,2 = 0,3699 \qquad (2)$$

Man erkennt, dass Domy als **Erstbeginnender** eine größere Gewinnchance hat als Franz!

Nun gibt es noch einen dritten Fall, nämlich dass bei 4 Spielrunden weder Domy noch Franz gewinnt.

Dies passiert längs des obersten Pfades. Er führt zum Untenschieden.

$P(\text{Unentschieden}) = 0,8^8 = 0,1678$

Eine Kontrolle, ob man richtig gerechnet hat, ist dieser Weg:

Die Chance, dass einer von beiden die „1“ erdreht, ist

$$P(\text{Do}) + P(\text{Fr}) = 0,4624 + 0,3699 = 0,8328$$

Folglich bleibt für das Restereignis „Unentschiedener Ausgang“:

$$P(\text{Unentschieden}) = 1 - 0,8323 = 0,1677\,.$$

Die kleine Abweichung entsteht durch Rundung.

Beispiel 3

In einer Urne liegen 4 rote, 6 schwarze und 10 weiße Kugeln.
Klaus und Inge ziehen abwechselnd zwei Kugeln mit einem Griff und legen sie wieder zurück. Inge beginnt und hat gewonnen, wenn sie zwei gleichfarbige Kugeln zieht. Klaus gewinnt mit zwei verschiedenfarbigen.
Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit bei maximal zwei Spielrunden bzw. bei 8 Spielrunden.

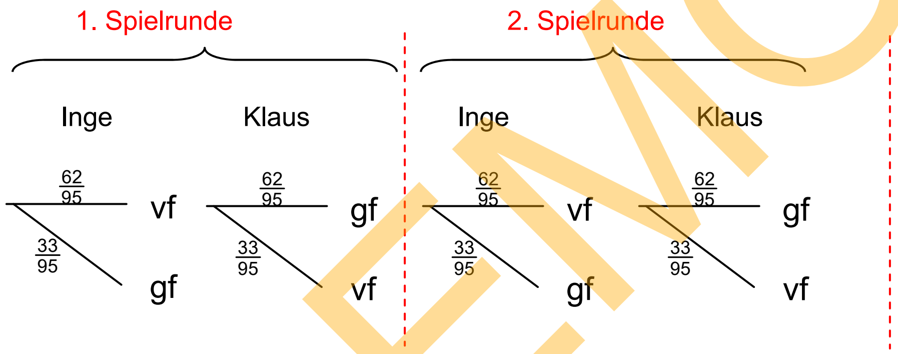
Zuerst müssen wir die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis „zwei gleichfarbige (gf) Kugeln" berechnen, die mit einem Griff entnommen werden. Ziehen mit einem Griff behandeln wir als Ziehen ohne Zurücklegen.

Man erhält $P(2\text{ gf}) = \frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}+\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}+\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19} = \frac{12+30+90}{380} = \frac{132}{380} = \frac{33}{95} \approx 0,3474$

Und dann die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige:

$$P(2\text{ vf}) = 1-\frac{33}{95} = \frac{62}{95} \approx 0,6526\,.$$

Und nun der „Spielbaum" oder besser Abbruchbaum für Klaus und Inge:



Die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei 2 Spielrunden sind:

Für Inge: $P(\text{Inge}) = \frac{33}{95}+\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\cdot\frac{33}{95} = \frac{33}{95}\cdot\left(1+\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right) \approx 0,4261$

Für Klaus $P(\text{Klaus}) = \frac{62}{95}\cdot\frac{62}{95}+\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\cdot\frac{62}{95}\cdot\frac{62}{95} = \left(\frac{62}{95}\right)^2\cdot\left(1+\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right) = 0,5225$

Bei 8 Spielrunden:

$$P(I) = \frac{33}{95}+\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\cdot\frac{33}{95}+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)^2\cdot\frac{33}{95}+\ldots+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)^7\cdot\frac{33}{95} = \frac{33}{95}\cdot\left[1+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)^2+\ldots+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)^7\right]$$

$$\approx 0,4492$$

$$P(K) = \left(\frac{62}{95}\right)^2\left[1+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)^2+\ldots+\left(\frac{62}{95}\cdot\frac{33}{95}\right)^7\right] \approx 0,5508$$

Hier hat man jetzt eine gute Möglichkeit, die Ergebnisse durch eine Probe zu kontrollieren. Nach 8 Runden ist die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden schon sehr klein, also muss die Summe dieser beiden Gewinnwahrscheinlichkeiten schon nahe bei 1 liegen:

$$P(I)+P(K) \approx 0,4492+0,5508 = 1$$

Die Abweichung von 1 liegt also hinter der 4. Dezimalen !

Für Interessierte und Oberstufenschüler wird dieses Thema im Themenheft 14222 „Solange-Bis-Experimente" vertieft.
Dort kommen dann auch geometrische Reihen zum Einsatz

§ 6 Aufgaben zu höchstens und mindestens

Fragestellungen, die mit höchstens und mindestens formuliert werden, gehören zu den beliebten Aufgabenstellungen. Es gibt dazu unterschiedliche Lösungsverfahren, die an einigen Beispielen gezeigt werden sollen.

6.1 Automatenspiel

Ein amtlicher Kontrolleur des Amtes für Automatenkontrolle muss einen Spielautomaten testen. Dazu spielt er 50-mal und notiert die Anzahl der Gewinnspiele. Mit der Zufallsvariablen „X = Anzahl der gewonnenen Spiele" kann man die möglichen Ereignisse gut beschreiben.

Der Hersteller des Gerätes versichert, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei 40% liegt. Bei 50 Spielen sind 40% $g = 0{,}4 \cdot 50 = 20$ Gewinnspiele. Weil es sich hier der Zufallsexperimente handelt, kann man nun aber nicht damit rechnen, genau 20-mal zu gewinnen. Erst auf lange Sicht wird sich die Zahl der Gewinnspiele unter 50 Spielen bei 40 % einpegeln.

Auf Grund der zufälligen Schwankungen setzt sich der Kontrolleur eine Akzeptanzspanne, die von X = 14 bis X = 30 reicht. Mit anderen Worten:

Der Apparat wird nicht zum Spiel zugelassen, wenn sich beim Test weniger als 14 Gewinnspiele ergeben. Andererseits wird er dem Hersteller empfehlen, das Gerät nicht zu verkaufen, wenn er mehr als 30-mal einen Gewinn erzielt, denn dann wird der Automat zum Verlustgeschäft.

Hier einige Formulierungsübungen:

a) Zur Genehmigung müssen also <u>mindestens</u> 14 Gewinnspiele erzielt werden, man kann auch sagen: <u>Mehr als</u> 13. Bei einer Grundmenge $S = \{0;1;....;49;50\}$ haben die Ungleichungen $X \geq 14$ und $X > 13$ die Lösungsmenge $\{14;15;...;50\}$.

b) Das Gegenteil von mindestens 14 oder von mehr als 13 wird formuliert durch höchstens 13 oder durch weniger als 14.

c) Zwischen 14 und 30 bedeutet $14 < X < 30$ und bezieht sich auf $\{15;16;...;28;29\}$

d) Von 14 bis 30 bedeutet aber $14 \leq X \leq 30$ und bezieht sich auf $\{14;15;16;...;28;29;30\}$.

Die Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ist an dieser Stelle noch zu schwierig. Man verwendet dazu auch meist Tabellen oder Taschenrechner. Das Problem liegt später aber weniger in diesen Berechnungen, sondern im Umgang mit den Begriffen mindestens, mehr als, höchstens und weniger als.

Hier weitere Beispiele:

Ereignis	Gegenereignis
„**Höchstens** 20" d.h. $X \leq 20$ bedeuten $\{0,1,...,20\}$	„Mehr als 20": $X > 20$ oder „mindestens 21" $X \geq 21$ bedeuten $\{21;...;50\}$
„**Mindestens** 10" d.h. $X \geq 10$ d.h. $\{10,11,...,50\}$	„Weniger als 10" d.h. $X < 10$ oder „höchstens 9" d.h. $X \leq 9$ d.h. $\{0;1;...;9\}$
„**Mehr als** 10" d.h. $X > 10$ d.h. $\{11,12,...,50\}$	„Höchstens 10" d.h. $X \leq 10$ oder “weniger als 11" d.h. d.h. $\{0;1;...;10\}$
„**Weniger als** 20" d.h. $X < 20$ d.h. $\{0;1;...;19\}$	„Mindestens 20" d.h. $X \geq 20$ oder „mehr als 19" d.h. $X > 19$ d.h. $\{20,21,...,50\}$
Mehr als 15 **und** weniger als 20 bedeutet $15 < x < 20$, was man auch als „**zwischen** 15 und 20" bezeichnet mit $\{16;17;18;19\}$	Das Gegenteil davon ist höchstens 15 **oder** mindestens 20: $X \leq 15$ oder $X \geq 20$ mit $\{0;1;...;14;15;20;21;...;50\}$
Von 15 **bis** 20: $15 \leq x \leq 20$, d.h. $\{15;16;17;18;19;20\}$	Weniger als 15 (höchstens 14) oder mehr als 20 (mindestens 21) mit $\{0;1;...;14;21;22;...;50\}$

Übungsaufgaben dazu:

Aufgabe 1

X sei die Zufallsvariable „Anzahl der gewürfelten Sechser" mit einem Würfel unter n = 100 Würfen. Schreibe die folgenden Aussagen als Ungleichung mit X auf, bilde die zugehörige Ereignismenge, formuliere das Gegenereignis mit Worten und als Ungleichung und gib dazu die Menge an:

A: Man würfelt mehr als 20-mal eine 6
B: Es werden mindestens 10 Sechser erzielt
C: Man erhält höchstens 15 Sechser
D: Man erzielt weniger als 30 Sechser
E: Man erhält zwischen 8 und 12 Sechser
F: Die Anzahl der Sechser ist mindestens 5, aber höchstens 13.

Aufgabe 2

X sei die Zufallsvariable „Anzahl der roten Kugeln" beim Ziehen von 20 Kugeln aus einem Topf mit Zurücklegen. Formuliere zu den folgenden Ereignismengen Ereignisse mit den Begriffen mindestens, höchstens, mehr als, usw. und gib auch Ungleichungen dazu an.

$A = \{0;....;11\}$ $\qquad B = \{15;16;...;20\}$

$C = \{4;5;6;7\}$ $\qquad D = \{0;1;2;16;17;18;19;20\}$

Lösung zu Aufgabe 1: $S = \{0;1;...;100\}$

A: „Man würfelt mehr als 20 mal eine 6“: $X > 20$ oder $X \geq 21$,
$A = \{21;22;...;100\}$.
Gegenereignis: $\overline{A}$: „Man würfelt höchstens 20 Sechser“ oder „Man würfelt weniger als 21 Sechser“: $X \leq 20$ $\overline{A} = \{0;...;20\}$.

B: „Es werden mindestens 10 Sechser erzielt“: $X \geq 10$, $B = \{10;...;100\}$
Gegenereignis: $\overline{B}$: „Es werden weniger als 10 bzw. höchstens 9 Sechser erzielt“. X<10 oder $X \leq 9$: $\overline{B} = \{0;:..;9\}$

C: „Man erhält höchstens 15 Sechser“: $X \leq 15$ mit $C = \{0;...;15\}$
$\overline{C}$: Man erhält mehr als 15 (oder: mindestens 16) Sechser: $X > 15$ bzw. $X \geq 16$: $\overline{C} = \{16;...;100\}$

D: „Man erzielt weniger als 30 Sechser“: $X < 30$ bzw. $X \leq 29$:
$D = \{0;...;29\}$. Gegenereignis: $\overline{D}$: „Man erhält mindestens 30 Sechser“ bzw. „Man erhält mehr als 29 Sechser“: $X \geq 30$ bzw. $X > 29$.
$\overline{D} = \{30;...;100\}$.

E: „Man erhält zwischen 8 und 12 Sechser“: $8 < X < 12$: $E = \{9;10;11\}$.
Gegenereignis $\overline{E}$: „Man erhält höchstens 8 <u>oder</u> mindestens 12 Sechser“
$\overline{E} = \{0;1;...;8;12;13;...;100\}$

F: „Die Anzahl der Sechser ist mindestens 5, aber höchstens 13“: $5 \leq X \leq 13$
$F = \{5;6;...;13\}$. Gegenereignis $\overline{F}$: „Weniger als 5 oder mehr als 13“:
$\overline{F} = \{0;...;4;14;15;...;100\}$

Lösung zu Aufgabe 2: $S = \{0;1;...;20\}$

$A = \{0;....;11\}$: $X \leq 11$ (Man zieht höchstens 11 rote Kugeln) oder $X < 12$ (Man erhält weniger als 12 rote Kugeln).

$B = \{15;16;...;20\}$: $X \geq 15$ bzw. $X > 14$ (Man erhält mindestens 15 bzw. mehr als 14 rote Kugeln).

$C = \{4;5;6;7\}$: $4 \leq X \leq 7$ bzw. $3 < X < 8$ (Man erhält mindestens 4 aber höchstens 7 rote Kugeln bzw. mehr als 3 aber weniger als 8)

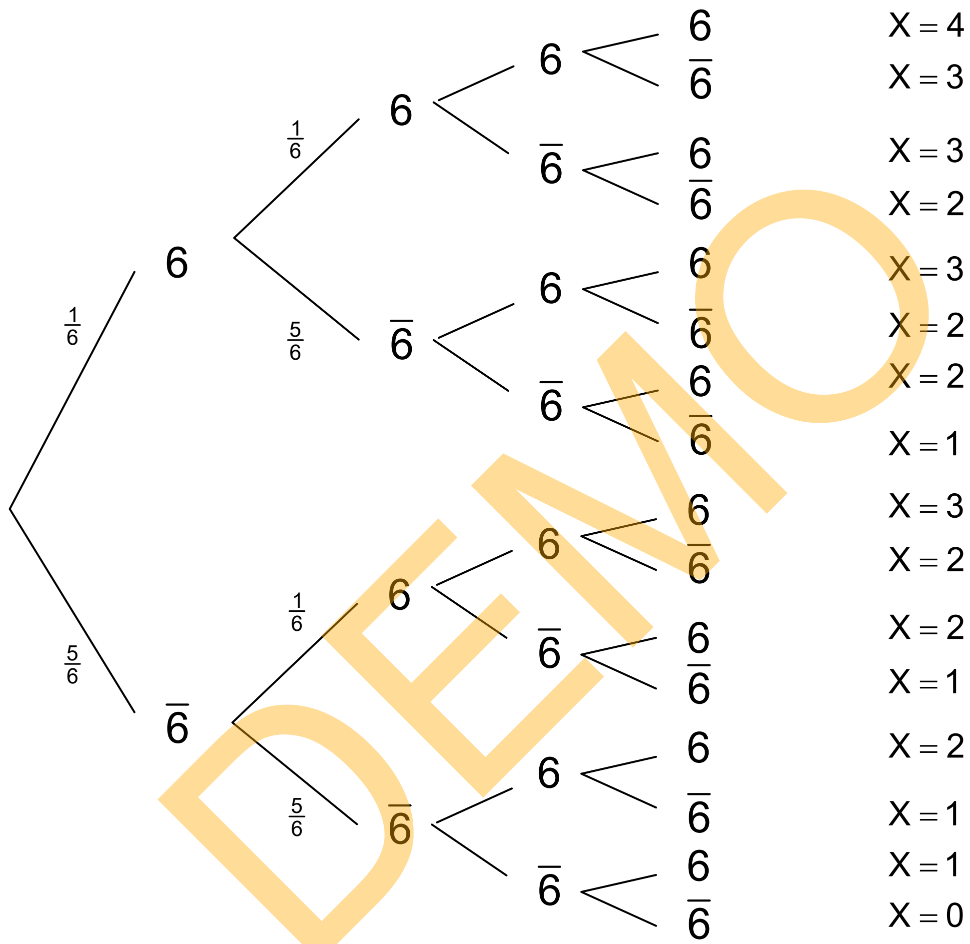
$D = \{0;1;2;16;17;18;19;20\}$: $X \leq 2$ oder $X \geq 16$ bzw. $X < 3$ oder $X > 15$ (Höchstens 2 oder mindestens 16 bzw. weniger als 3 oder mehr als 15).

6.2 Würfeln für die „6“. Wir werfen einen idealen Würfel 4 Mal.

X sei die Anzahl der dabei erzielten Sechser. Diese Zufallsvariable X hat diesen Ergebnisraum: $S = \{0,1,2,3,4\}$. Dieser wird zum Definitionsbereich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung (darunter versteht man einfach die Auflistung sämtlicher Wahrscheinlichkeiten also

$$P(X=0),\ P(X=1);\ P(X=2);\ P(X=3);\ P(X=4).$$

Derzeit benötigen wir zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten ein Baumdiagramm. Hier gehen wir nach diesem Prinzip vor: Wir tragen nicht für jedes Würfelergebnis 1 bis 6 einen Pfad ein sondern verwenden Sammelpfade für 1 bis 5 als $\overline{6}$ = Nicht-Sechs.



<u>Ereignis A</u>: „Man würfelt <u>mindestens eine</u> 6“ d.h. $X \geq 1$, $A = \{1,2,3,4\}$

Wenn wir in unserem Baumdiagramm nachschauen, finden wir dazu 15 der 16 Pfade, nämlich alle außer dem untersten Pfad. Und dieser repräsentiert sozusagen das Gegenereignis:

Das Gegenteil zu <u>mindestens eine 6</u> lautet „<u>weniger als eine 6</u>“, also <u>keine 6</u>.

Und dieses Ereignis wird durch genau den untersten Pfad dargestellt, nämlich man würfelt viermal nacheinander $\overline{6}$: $\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$.

Dies ist das Gegenereignis zu A, Dieser Pfad hat somit diese Wahrscheinlichkeit:

$$P(\overline{A}) = P(X=0) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = \tfrac{625}{1296} = 0,4823\ .$$

Wegen

$$\boxed{P(X=0)+P(X\geq 1)=1}$$

folgt

$$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177$$

Eine Frage zum Nachdenken:

Warum haben wir zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von A das Gegenereignis verwendet?

Antwort: Weil die Rechnung damit viel kürzer geworden ist.
Das Gegenereignis umfasste nur einen Pfad, zu A gehörten aber15 Pfade.

Ereignis B: „Man würfelt mindestens dreimal 6“ d.h. $X \geq 3$, $B = \{3,4\}$

FRAGE: Sollte man diese Aufgabe über das Gegenereignis von B lösen?

Wir werden die Antwort geben, nachdem wir beide Möglichkeiten versucht haben.

1. Möglichkeit: Direkte Berechnung von P(B).

Wenn man das Baumdiagramm anschaut, erkennt man:
Zu B gehören 5 Pfade, vier davon haben dreimal eine 6 im Pfad und einer besteht nur aus Sechsen.

Hier ein Pfad mit 3 Sechsen: $\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$

Seine Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$.

Bei den anderen drei Pfaden mit je einer Sechs (auf den Plätzen 3 oder 2 oder 1) ändert sich diese Wahrscheinlichkeit nicht.

Der Pfad mit 4 Sechsen hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$.

Insgesamt erhält man also: $P(B) = P(X \geq 3) = P(\{3;4\}) = 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^4$.

Mit etwas Bruchrechengeschick wird daraus $= \frac{4\cdot 5}{6^4} + \frac{1}{6^4} = \frac{21}{6^4} \approx 0{,}0162$

2. Möglichkeit: Berechnung von P(B) über das Gegenereignis $\overline{B}$.

Das Gegenereignis zu mindestens 3 heißt entweder „weniger als 3“ oder „höchstens 2“.
$X \leq 2$ führt zur Lösungsmenge $\{0;1;2\}$. Man erkennt jetzt schon, dass das mehr Aufwand macht als die direkte Berechnung über $B = \{3,4\}$.

Zu $X = 0$ gehört nur der Pfad $\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$ mit $p = \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

Zu X = 1 gehören 4 Pfade: $\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$ ist einer davon.

Die 6 kann auch auf dem 2., 3. oder 4. Platz stehen, also gibt es vier solche Pfade, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Zu X = 2 gehören 6 Pfade dieser Art: $\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$.

Es gibt 6 Möglichkeiten, 2 Sechser auf 4 Plätze anzuordnen. Die weiteren sind

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}$$

$$\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{5}{6}]{}\boxed{\overline{6}}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}$$

Alle 6 Pfade haben dieselbe Wahrscheinlichkeit: $\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$

Fassen wir alle 11 Pfade von $\overline{B}$ zusammen, erhalten wir:

$$P\left(\overline{B}\right)=\left(\tfrac{5}{6}\right)^4+4\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{1}{6}+6\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2$$

Ausführliche Berechnung:

$$P\left(\overline{B}\right)=\left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\left(\tfrac{5}{6}\right)^2+4\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)\cdot\tfrac{1}{6}+6\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\right)=\tfrac{25}{36}\cdot\left(\tfrac{25+20+6}{36}\right)=\tfrac{25\cdot 51}{36\cdot 36}=\tfrac{425}{432}\approx 0{,}9838$$

Damit berechnet man dann $P(B)=1-P(\overline{B})\approx 0{,}0162$

Erkenntnis:

Man wird eine Mindestens-Aufgabe nur dann über das Gegenereignis berechnen, wenn dadurch der Aufwand kleiner wird.

Ereignis C:: „Man würfelt höchstens 3 mal die 1“ d.h. $X\le 3$.

Nach den Erfahrungen der letzten Berechnungen müssen wir klären, welcher Weg mit dem geringsten Aufwand zu bewältigen ist: Die direkte Methode oder der Umweg über das Gegenereignis.

Direkter Weg	Umweg übers Gegenereignis:
Das Ereignis $X\le 3$ lässt sich als Menge so beschreiben: $C=\{0;1;2;3\}$ $X = 0$ umfasst einen Pfad, X=1 umfasst 4 Pfade, X=2 umfasst 6 Pfade. $X = 3$ umfasst 4 Pfade.	Das Gegenereignis zu $X\le 3$ lautet $X>3$ oder $X\ge 4$ und bedeutet $\overline{C}=\{4\}$ ´X = 4 benötigt nur 1 Pfad

Daher ist die Berechnung über das Gegenereignis am kürzesten:

Zu X = 4 gehört nur der Pfad $\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}\xrightarrow[\frac{1}{6}]{}\boxed{6}$ mit $p=\left(\tfrac{1}{6}\right)^4$.

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses: $P(\overline{C})=4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{4\cdot 5}{6^4}+\frac{1}{6^4}=\frac{21}{6^4}\approx 0{,}0162$

Wahrscheinlichkeit von C: $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}0162=0{,}9838$.

<u>Ereignis D</u>: „Man würfelt höchstens 1 mal die 6“ d.h. $X \le 1$.

Direkter Weg	Umweg übers Gegenereignis:
Das Ereignis $X \le 1$ lässt sich als Menge so beschreiben: $D = \{0;1\}$ $X = 0$ umfasst einen Pfad, $X=1$ umfasst 4 Pfade.	Das Gegenereignis zu $X \le 1$ lautet $X > 1$ oder $X \ge 2$ und ist in der Mengenschreibweise $\{2;3;4\}$. $X = 2$ umfasst 6 Pfade $X = 3$ umfasst 4 Pfade und $X = 4$ benötigt nur 1 Pfad.

Daher ist die direkte Berechnung am kürzersten:

Zu $X = 1$ gehört etwa dieser Pfad: $\xrightarrow[\frac{1}{6}]{} \boxed{6} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}}$.

Die anderen drei Pfade, bei denen die $\boxed{6}$ auf einem der Plätze 2, 3 oder 4 sitzt, haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$.

Zu $X = 0$ gehört nur der Pfad $\xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}} \xrightarrow[\frac{5}{6}]{} \boxed{\overline{6}}$ mit $p = \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

Somit folgt $P(D) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{4 \cdot 5^3 + 5^4}{6^4} = \frac{4 \cdot 125 + 625}{1296} = \frac{1125}{1296} \approx 0{,}868$.

ÜBERSICHT

Zu Ereignissen, die durch <u>mindestens</u> (bzw. <u>mehr als</u>) oder <u>höchstens</u> (bzw. <u>weniger als</u>) beschrieben werden, kann man die Wahrscheinlichkeit entweder direkt oder über das Gegenereignis berechnen.

Man sollte stets den Weg wählen, der den geringsten Aufwand benötigt

6.3 Die „Dreimal Mindestens – Aufgabe“

Für diese Aufgabe wurde ein eigener Text geschrieben.

Er trägt die Nummer 31110

§ 7 Anwendungsaufgaben

Hier eine Reihe kleinerer Aufgaben zum Üben

Aufgabe 1

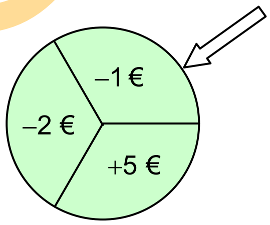
Fritzle will seine Mutter ärgern. Die hat für Ostern 20 Eier gekocht und möchte sie danach einfärben. Er entnimmt gekochte 5 Eier und ersetzt sie durch rohe.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt der erste Griff in den Korb zu einem rohen Ei?

b) Johanna entnimmt zwei Eier, Welche Möglichkeiten gibt es, und wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür?

c) Seine Mutter entnimmt 4 Eier. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind das 3. und 4. Ei roh?

Aufgabe 2



Klaus denkt sich für seine Schwester Anna ein Spiel aus. Sie muss einmal an seinem selbst gebastelten Glücksrad drehen. Bleibt es bei -1 € oder bei – 2 € stehen, dann muss sie ihm 1 € bzw. 2 € geben. Bleibt das Rad bei + 5 € stehen, muss er ihr 5 € auszahlen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt bzw. verliert Anna, wenn sie nur einmal dreht?

b) Im zweiten Spiel muss Anna zweimal drehen und beide Aktionen werden ausgeführt. Wie sind dann die Chancen?

Aufgabe 3

In einer Schülerversammlung sitzen die Schüler der 8a, 8b und 8c gemischt in drei ihnen zugewiesenen Reihen. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Sitzverteilung

Reihe	8a - J	8a - M	8b - J	8b - M	8c - J	8c – M
Reihe 1	4	2	6	4	2	4
Reihe 2	2	6	0	8	6	6
Reihe 3	6	6	2	2	4	10

a) Aus jeder Reihe wird ein Schüler ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

A: gehören sie alle derselben Klasse an?

B: gehören sie verschiedenen Klassen an?

C: ist der Schüler aus der 1. Reihe aus 8a, dann aus 8b und dann aus 8c?

D: sind es lauter Mädchen?

E: sind es keine Schüler aus der 8b ?

b) Nun wird für jede Klasse 1 Buch verlost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

F: fallen alle Preise in die 1. Reihe?

G: bekommen die Preise nur Mädchen?

H: bekommen in der 8a ein Junge das Buch und in der 8b ein Mädchen?

c) Wenn pro Klasse zwei Bücher verlost werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen in allen drei Klassen jeweils ein Junge und ein Mädchen ein Buch (Ereignis K), wenn jeder höchstens ein Buch erhalten soll?

Die Lösungen der Aufgaben

stehen nur im Originaltext auf der Mathe-CD.