Einführung in die Grundbegriffe
Teil 2

Mehrstufige Ereignisse
Baumdiagramme

Datei Nr. 31102

Stand 22. Januar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Hinweise zum Inhalt

Die Behandlung mehrstufiger Experimente kann schon in 6 beginnen, denn einfache Aufgaben erfordern nur einfaches Bruchrechnen, und die Baumdiagramme mit ihren Regeln sind leicht zu handhaben. Im vorliegenden Text gibt es einfache bis schwere Aufgaben.
Schwierige Aufgabenstellungen, die eigentlich hierzu gehören sind die „Solange-Bis-Aufgaben“ und die „Dreimal Mindestens-Aufgaben“. Damit habe ich vorliegenden Text nicht belastet.
„Solange-Bis-Aufgaben“ findet man im Text 31211, „Dreimal Mindestens-Aufgaben“ in 31110.
Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden ausführlich in 32111 besprochen.

Inhalt

Wichtige Hinweise zur Schreibweise von Ereignissen

Das Ziehen von Karten aus einem Stapel, das mehrfache Würfeln nacheinander, oder das Ermitteln von Buchstaben nacheinander, aus denen man dann ein Wort bildet usw. sind mehrstufige Experimente. Weil es dabei auf die Reihenfolge der einzelnen „Ziehungen“ ankommt, muss man auch durch die Schreibweise ausdrücken, dass die Reihenfolge durch das Ziehen festgelegt und nicht verändert werden darf. Dazu gibt es verschiedene Schreibweisen.

Die gebräuchlichste sind die geordneten Paare, Tripel usw.

a) Man zieht aus einem Kartenstapel der Reine nach Karten mit den Farben rot, schwarz, rot. Dann drückt man dieses Ergebnis durch das Tripel (r,s,r) aus. Günstiger sind meist die Schreibweisen $(r;s;r)$ oder $(r\,|\,s\,|\,r)$, vor allem dann wenn man statt Buchstaben Zahlen hat, um nicht das Dezimalkomma zu verwechseln. Man kann aber auch – wenn keine Verwechselungsgefahr besteht die Buchstaben zu einem Wort aneinanderfügen und dieses Ziehungsergebnis durch rsr ausdrücken.

Falsch sind jedoch die Schreibweisen $\{r,s,r\}$ oder $\{r;s;r\}$, denn sie stellen eine Menge mit drei Elementen dar, und in ihr darf man die Elemente vertauschen und muss sogar doppelte weglassen. Somit gilt für Mengen: $\{r,s,r\} = \{r,r,s\} = \{s,r,r\} = \{r,s\} = \{s,r\}$.

b) Beispiel 1: Aus einem Stapel mit 6 Karten, auf denen die Buchstaben A,B,E,M,U,S aufgedruckt sind, werden 4 Karten zufällig entnommen und nach jedem Zug wieder zurückgelegt. Man notiert die gezogenen Buchstaben und bildet daraus ein Wort. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dreimaligem Ziehen von 4 Karten dieses Ereignis: $E = \{maus, saum, mumm, baum\}$?
Hier bewährt sich die abkürzende Schreibweise gegenüber der gebräuchlichsten Form:
$E = \{(m;a;u;s),(s;a;u;m),(m;u;m;m),(b;a;u;m)\}$
Man darf nur nicht das Ziehungsergebnis „saum“ in der Form $\{s;a;u;m\}$ als Menge schreiben, dann ist die Reihenfolge der Ziehungen nicht mehr festgelegt, denn es gilt ja:
$\{s;a;u;m\} = \{m;a;u;s\} = \{a;u;m;s\} = \ldots$

c) Beispiel 2: Aus drei Würfelergebnissen kann man jeweils eine dreistellige Zahl bilden:
$A = \{115;666;254;515;246\}$. Dies war ein Ergebnis von fünf Dreierwürfen.
Hier wird auch klar, dass in $\{2,3;4\}$ nur zwei Ergebnisse stehen, nämlich die Zahl 2,3 und die Zahl 4!

§ 2 Mehrstufige Experimente

2.1 Einführung: Bernoulli-Experimente

Man kann ein Zufallsexperiment mehrfach nacheinander ausführen, Dann erweitert sich die Vielfalt der Ereignisse enorm. Dazu folgen einige Beispiele (zunächst noch ohne Rechnungen), damit man eine Vorstellung davon bekommt.

Beispiel 1: **Man würfelt 3-mal mit einem Würfel.**

Dann kann man die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse berechnen:

A: Man hat dreimal eine 6 gewürfelt

B: Man hat insgesamt die Augensumme 12 erhalten

C: Die 3. Zahl war eine 1

D: Man hat das Ergebnis 1-3-6 gewürfelt.

Beispiel 2: **Man würfelt einmal mit drei Würfeln.**

Haben dann die Ereignisse A bis D aus Beispiel 1 dieselben Wahrscheinlichkeiten?

Beispiel 3: **Kugeln ziehen**

In einem Topf sind 8 Kugeln, welche die Buchstaben A, B, L, A, L, M, Z, H tragen.
Man entnimmt nun der Reihe nach 4 Kugeln und legt sie nebeneinander auf den Tisch.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man das Wort BALL bzw. das Wort ZAHL?
Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn man nach jedem Zug die Kugel wieder in das Gefäß zurücklegt?

Beispiel 4: **Kleiderchaos**

Man kann auch ganz unterschiedliche Stufen hintereinander schalten:
In der Schublade 1 befinden sich 3 paar schwarze Socken, 2 Paar weiße Socken und 1 Paar rote Socken. In Schublade 2 befinden sich Unterhemden: 5 weiße und 3 graue.
Peter greift im Dunkeln in die erste Schublade und entnimmt ein Paar Socken, und dann in die zweite für ein Unterhemd. Jetzt können verschiedene Kombinationen entstehen, deren Wahrscheinlichkeit sich berechnen lassen.

Von großer Bedeutung sind diejenigen Zufallsexperimente, die genau zwei mögliche Ergebnisse haben. Etwa:

Eine Münze werfen:	Wappen oder Zahl
Basketball werfen:	Treffer oder Niete
Gewinnen oder verlieren	usw.

Definition:

> **Ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ausgängen heißt Bernoulli-Experiment.**

Führt man ein Bernoulliexperiment mehrfach nacheinander aus, und bleiben dabei die Wahrscheinlichkeiten für die Ausgänge unverändert, dann spricht man von einer Bernoulli-Kette. Beispielsweise kann man eine Münze 10-mal nacheinander werfen. Das ist dann eine 10-stufige Bernoulli-Kette. Oder man erhält 2 Freiwürfe im Basketball: Zweistufige Bernoulli-Kette.

Definition:

> **Ändert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei der Wiederholung eines Bernoulli-Experiments nicht und wiederholt man das Experiment n-mal, so heißt diese Wiederholung eine n-stufige Bernoulli-Kette und kann wie ein einziges Experiment betrachtet werden**

Folgendes Experiment ist <u>keine</u> Bernoullikette:

In einem Kartenstapel sind 10 rote und 8 schwarze Karten.
Man zieht 5-mal nacheinander eine Karte, *liegt sie aber nicht mehr zurück*.
Das ist keine 5-stufige Bernoulli-Kette, denn die Wahrscheinlichkeit für rot oder schwarz ändert sich mit jedem Zug, weil man durch jeden Zug den Inhalt des Stapels verändert.
Würde man eine gezogene Karte wieder zurücklegen, läge eine Bernoulli-Kette vor.

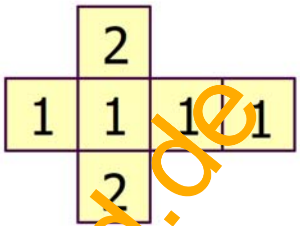
Die Bernoulliketten werden unter dem Thema Binomialverteilung noch ausführlich behandelt. Sie lassen sich gut berechnen. Mehr dazu in 34010.

An dieser Stelle gehe ich noch nicht darauf ein, weil die nötigen Grundlagen (Pfadregeln) dazu erst noch folgen.

Zur Einführung: Ein zweistufiges Experiment:

Beispiel 5

Nebenstehender idealer Würfel wird zweimal geworfen.



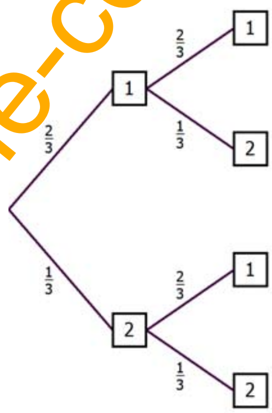
$\boxed{1}$ **Welche Ergebnisse gibt es?**

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

Bei jedem Wurf können zwei Teilergebnisse auftreten.
Daher gibt es insgesamt vier mögliche Spielergebnisse, die man als Zahlenpaare aufschreibt: $(1.\text{Wurf} \mid 2.\text{Wurf})$

$$S = \{(1|1);(1|2);(2|1);(2|2)\}$$

S ist die Ergebnismenmge unseres Experimentes.
Diese vier Ereignisse werden im **Baum** durch vier Pfade dargestellt.
An jedem Pfad steht die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ergebnisses.



Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1:

Der Würfel hat 6 Möglichkeiten, 4 davon sind günstig, für das Ergebnis 1. Die Formel dazu lautet

$$p_1 = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = \frac{g}{m} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2: $p_2 = \frac{g}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (1,1) – 1. Pfad: $P(1,1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Die **1. Pfadregel** besagt, dass man die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades multipliziert.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (1,2) – 2. Pfad: $P(1,2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (2,2) – 3. Pfad: $P(2,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (2,2) – 4. Pfad: $P(2,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$\boxed{2}$ Spezielle Ereignisse

Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Man würfelt zwei verschiedene Zahlen. (Oder: Die Augensumme ist 3.)
B: Man erhält <u>mindestens</u> einmal die 2.
C: Man erhält <u>höchstens</u> einmal die 2.

Mit dem Baumdiagramm kann man die zu den Ereignissen gehörenden Pfade leicht ermitteln:

Zu A gehören der 2. und der 3. Pfad.

Die **2. Pfadregel** besagt, dass man die Wahrscheinlichkeiten der Pfade addiert.

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Zu B gehören die Pfade 2, 3 und 4. Nach der 2. Pfadregel folgt:

$$P(B) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{5}{9}$$

Eine Grundregel für die Wahrscheinlichkeit solcher Ereignisse lautet:

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ist 1.

Das kann man so aufschreiben:

$$P(\text{Pfad1}) + \underbrace{P(\text{Pfad2}) + P(\text{Pfad3}) + P(\text{Pfad4})}_{P(B)} = 1$$

Also folgt daraus: $\boxed{P(B) = 1 - P(\text{Pfad1})} = 1 - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{9}{9} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{5}{9}$

Das geht natürlich schneller. Dazu gibt es einen nützlichen Sprachgebrauch.
Der Pfad 1 stellt das **Gegenereignis** zum Ereignis B dar.

In vielen Fällen ist ein einfacher eine Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis zu berechnen, nämlich dann, wenn das Gegenereignis weniger Ergebnisse hat als das zu berechnende.

Das ist hier so: B lautet „mindestens eine 2“ – das passt zu 3 Pfaden.

Das Gegenereignis zu „mindestens eine“ heißt „keine“.

Man bezeichnet das Gegenereignis zu B mit einem Querstrich $\overline{B}$. Es gehört zum 1. Pfad.

Und dann rechnet man schneller so: $\boxed{P(B) = 1 - \overline{B}}$

Zu C (*höchstens eine*) gehören die Pfade 1, 2 und 3.

Das Gegenereignis $\overline{C}$ heißt hier „genau 2“, und besteht aus dem 1. Pfad.

Also rechnet man mit dem Gegenereignis so:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = 1 - \tfrac{4}{9} = \tfrac{5}{9}$$

---

3 Oft würfeln – mit ganz speziellen Ereignissen:

c) Mit dem Würfel aus 1 wird fünfmal gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten zu:

- D: Die Zahlen 1 und 2 erscheinen abwechselnd.
- E: Man würfelt die 2 genau 3-mal nacheinander.
- F: Man erzielt genau einmal die 2.
- G: Beim 2. bis 5. Wurf kommen genau zwei Zweier-
- H: Nur die 1., 3. und 5. Zahl sind eine 2.
- I: Die Augensumme ist 7.

Die Lösungen folgen auf der Mathe-CD.