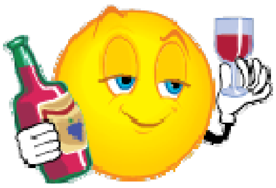
Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der schon betrunken?

Datei Nr.: 32111

Friedrich Buckel

Stand 9. Juni 2008

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

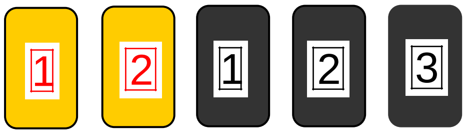
www.mathe-cd.de

Inhalt

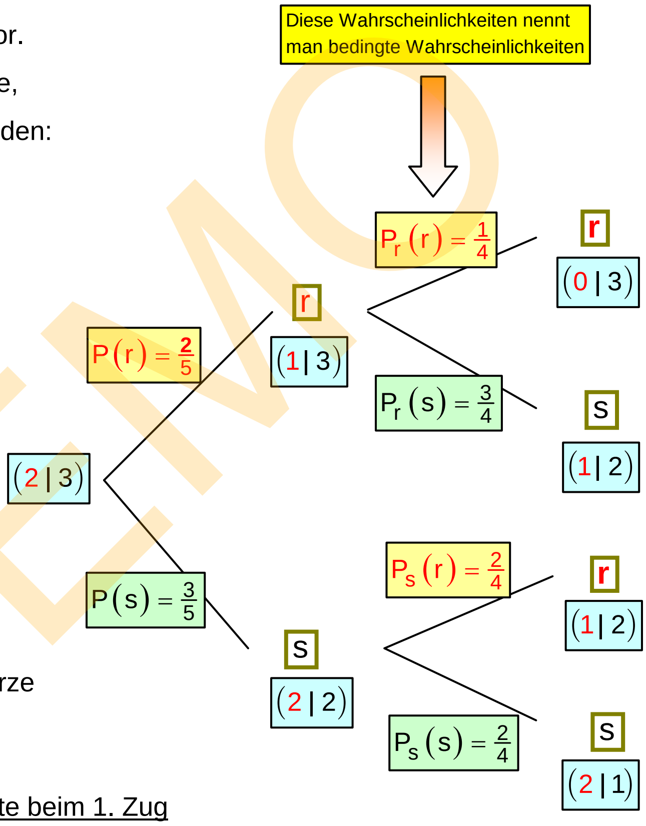
1 Definitionen und Hinführung

Einführungsbeispiel: Karten ziehen

In einem Stapel mit Spielkarten befinden sich 2 rote und 3 schwarze Karten:



Sie liegen verdeckt im Stapel auf einem Tisch. Hans zieht eine Karte, notiert deren Farbe und legt die Karte beiseite. Dann zieht er eine zweite Karte und notiert auch deren Farbe.



Hier liegt ein zweistufiges Experiment vor.
Es hat insgesamt 4 mögliche Ergebnisse,
die in der Ergebnismenge S gelistet werden:

$$S = \{ rr ; rs ; sr ; ss \}$$

Jedem Ergebnis entspricht ein Pfad im gezeigten Baumdiagramm. Daran sind 6 Wahrscheinlichkeiten angeschrieben, die man durch $p = \frac{g}{m}$ aus dem vorhandenen Kartenbestand berechnet, der vor jedem Zug als Zahlenpaar angeschrieben ist.

$(2 | 3)$ bedeutet, dass vor dem folgenden Zug noch 2 rote und 3 schwarze Karten zur Verfügung stehen.

Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Karte beim 1. Zug ist daher $p_r = \frac{2}{5}$ und für eine schwarze beträgt sie $p_s = \frac{3}{5}$.

Statt p_r kann man auch $P(r)$ schreiben. Statt p_s ist auch $P(s)$ möglich. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten gehören zum 1. Zug, bei dem noch alle Karten im Stapel liegen, also m = 5 ist.

Beim zweiten Zug liegen veränderte Bedingungen vor, denn zuvor kann entweder schon eine rote oder eine schwarze Karte gezogen worden sein. Jeder Zug ändert den Inhalt des Kartenstapels und damit auch die daraus zu berechnende Wahrscheinlichkeit. Daher heißen die Wahrscheinlichkeiten für die 2. Stufe **bedingte Wahrscheinlichkeiten**. Dies schauen wir uns ausführlich an.

Mit P(s)	bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für schwarz beim 1. Zug.
Mit $P_r(s)$	bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für schwarz <u>beim 2. Zug</u>, <u>wenn zuvor rot gezogen worden ist.</u> *(Das ist eine Vorbedingung.)*
Mit $P_s(s)$	bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für schwarz <u>beim 2. Zug</u>, <u>wenn zuvor schwarz gezogen worden ist</u>. *(Das ist die Vorbedingung.)*

Diese beiden sogenannten bedingten Wahrscheinlichkeiten liest man so:

$P_r(s) = \frac{3}{4}$ heißt „Die Wahrscheinlichkeit für schwarz unter der Bedingung, dass zuvor rot gezogen worden ist, ist $\frac{3}{4}$."

$P_s(s) = \frac{2}{4}$ liest man so: „Die Wahrscheinlichkeit für schwarz unter der Bedingung, dass zuvor schwarz gezogen worden ist, ist $\frac{2}{4}$."

Beim 1. Zug hatten wir Fünftel, weil m = 5 war, nachdem die erste Karte gezogen worden ist, sind nur noch 4 Karten auf dem Tisch, also ist m = 4 und wir erhalten Viertel, nämlich $P_r(s) = \frac{3}{4}$ (weil unter den 4 Karten noch 3 schwarze sind) und $P_s(s) = \frac{2}{4}$ (weil unter den 4 Karten noch 2 schwarze sind).

Auch für rot gibt es diese drei Wahrscheinlichkeiten, von denen hier zufällig zwei gleich groß sind:

Mit $P(r)$	bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für rot beim 1. Zug.
Mit $P_r(r)$	bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für rot beim 2. Zug, <u>wenn zuvor rot gezogen worden ist</u>.
Mit $P_s(r)$	bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für rot beim 2. Zug, <u>wenn zuvor schwarz gezogen worden ist</u>.

Ausführliche Untersuchung der 4 Pfade des Baumdiagramms

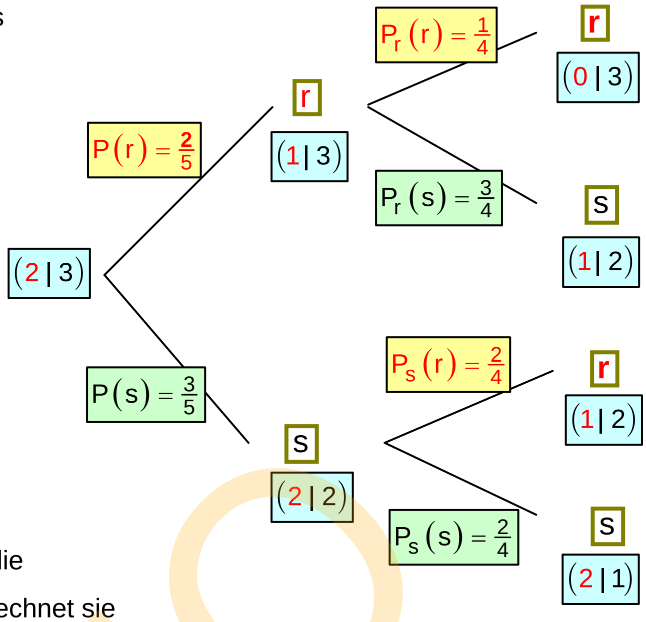
Kennt man nun alle Wahrscheinlichkeiten für den 1. und 2. Zug, dann kann man die Wahrscheinlichkeiten für die 4 Ergebnisse (Pfade) gemäß den Pfadregeln berechnen:

1. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{2}{5}]{} \boxed{r} \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} \boxed{r}$	$P(\{rr\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
2. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{2}{5}]{} \boxed{r} \xrightarrow[\frac{3}{4}]{} \boxed{s}$	$P(\{rs\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$
3. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{3}{5}]{} \boxed{s} \xrightarrow[\frac{2}{4}]{} \boxed{r}$	$P(\{sr\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$
4. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{3}{5}]{} \boxed{s} \xrightarrow[\frac{2}{4}]{} \boxed{s}$	$P(\{ss\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$
Kontrollsumme:		$0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 = 1$

Der Begriff der totalen Wahrscheinlichkeit

Am Ende des zweistufigen Experimentes gibt es zwei Ausgänge: rot oder schwarz.

Oftmals will man wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese auftreten, und zwar ungeachtet dessen, was davor beim 1. Zug passiert ist.



(1) Man kann auf zwei Arten so zu einer roten Karte gelangen: Der 1. und der 3. Pfad führen zu einer roten Karte.
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „beim 2. Zug erhält man rot", nennt man die totale Wahrscheinlichkeit für rot. Man berechnet sie nach der 2. Pfadregel als Summe der Wahrscheinlichkeiten des 1. und 3. Pfades und schreibt:

$$P(r) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4\,.$$

(2) Und es gibt zwei Möglichkeiten, nach dem 2. Zug eine schwarze Karte zu erhalten:
Beim 2. und 4. Pfad. Deren Wahrscheinlichkeit zusammen ist die totale Wahrscheinlichkeit für schwarz:

$$P(s) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6\,.$$

Beispiel 2

In der Jahrgangsstufe 12 des Internatsgymnasiums Schloss Torgelow befanden sich 2004 30 Schüler, darunter nämlich 10 Jungen und 20 Mädchen. Den Leistungskurs Mathematik besuchten davon 6 Jungen und 5 Mädchen.

Ein hervorragendes Hilfsmittel zum Gewinnen einer Übersicht für die Auswertung der Daten ist eine **Vierfeldertafel** (**Carnaugh-Diagramm**) .

	L	G	
J	$F_1 = J \cap L$ 6	$F_2 = J \cap G$ $\boxed{4}$	10
M	$F_3 = M \cap L$ 5	$F_4 = M \cap G$ $\boxed{15}$	20
	$\boxed{11}$	$\boxed{19}$	$\boxed{30}$

Die genannten Daten (10 J und 20 M) wurden am rechten Rand eingetragen.
Die 6 Jungen des LK Mathe (L) stehen im 1. Feld, das die Schnittmenge $J \cap L$ beschreibt, die 5 Mädchen des LK Mathe stehen darunter im 2. Feld $M \cap L$.

Daraus kann man jetzt alle weiteren Daten berechnen, sie wurden blau umrandet eingetragen:
Addiert man die erste Spalte, erfährt man, dass es 5 + 6 = $\boxed{11}$ Schüler im LK Mathe gibt.
In der ersten Zeile stehen die 10 Jungs dieser Klassenstufe. Weil 5 davon im LK Mathe (L) sind, besuchen die restlichen 10 – 6 = $\boxed{4}$ den Grundkurs Mathe (G).
In die 2. Zeile wurden die 20 Mädchen eingetragen. Man errechnet, dass 20 – 5 = $\boxed{15}$ von ihnen den Grundkurs Mathematik besuchen.
Jetzt kann man die rechte Spalte addieren und weiß danach, dass es $\boxed{4} + \boxed{15} = \boxed{19}$ Grundkurs-schüler gibt.

Aus diesen absoluten Häufigkeiten der vier Schnittmengen kann man im nächsten Schritt die relativen Häufigkeiten berechnen, die man oft als Prozentzahlen angibt.

	L	G	
J	$F_1 = J \cap L$ 6 $\frac{1}{5}$	$F_2 = J \cap G$ $\boxed{4}$ $\frac{2}{15}$	10
M	$F_3 = M \cap L$ 5 $\frac{1}{6}$	$F_4 = M \cap G$ $\boxed{15}$ $\frac{1}{2}$	20
	$\boxed{11}$	$\boxed{19}$	$\boxed{30}$

$$h(J \cap L) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$
$$h(J \cap G) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133 = 13{,}3\%$$
$$h(M \cap L) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 = 16{,}7\%$$
$$h(M \cap G) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Diese Zahlen wurden mit rot eingetragen.
Man kann sie als empirische Wahrscheinlichkeiten verwenden und sagen:

Wählt man per Los einen Schüler dieser Jahrgangsstufe, dann ist er mit der Wahrscheinlichkeit:

$p(J \cap L) = \frac{1}{5}$ ein männlicher Leistungskursschüler,
$p(J \cap G) = \frac{2}{15}$ ein männlicher Grundkursschüler,
$p(M \cap L) = \frac{1}{6}$ eine weibliche LK-Schülerin,
$p(M \cap G) = \frac{1}{2}$ eine weibliche GK-Schülerin.

Die Auswertung kann wesentlich weiter gehen.

	L	G	
J	$F_1 = J \cap L$ 6 $\quad \frac{1}{5}$	$F_2 = J \cap G$ $\boxed{4}$ $\quad \frac{2}{15}$	10
M	$F_3 = M \cap L$ 5 $\quad \frac{1}{6}$	$F_4 = M \cap G$ $\boxed{15}$ $\quad \frac{1}{2}$	20
	$\boxed{11}$	$\boxed{19}$	$\boxed{30}$

(a) Unter den 10 Jungen (die jetzt den Grundwert bilden) gibt es 6 LK-Schüler, das sind $\frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$ der Jungen, und folglich besuchen $\frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$ den GK Mathematik.

(b) Unter den 20 Girls (die jetzt den Grundwert bilden) gibt es 5 LK-Schülerinnen, das sind $\frac{5}{20} = \frac{2,5}{10} = 0,25 = 25\%$ der Mädchen und $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$ GK-Schülerinnen.

(c) Unter den 11 LK-Schülern befinden sich 6 Jungen, das ergibt einen Anteil von $\frac{6}{11} \approx 0,545 = 54,5\%$ Jungen und die 5 Mädchen führen zu $\frac{5}{11} \approx 0,455 = 45,5\%$.

(d) Unter den 19 GK-Schülern befinden sich 4 Jungen und 15 Mädchen, das ergibt einen Anteil von $\frac{4}{19} \approx 0,211 = 21,1\%$ Jungen und $\frac{15}{19} \approx 0,789 = 78,9\%$ Mädchen.

Hieraus erhält man <u>bedingte Wahrscheinlichkeiten</u> für das Zufallsexperiment „Losen eines Schülers".

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen LK-Schüler, wenn man weiß, dass der Schüler männlich ist?

Man weiß aus (a), dass $\frac{6}{10}$ der Jungen den LK besuchen, also ist $P_J(L) = \frac{6}{10}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler den LK Mathe besucht, wenn man weiß, dass es ein Junge ist.

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen GK-Schüler, wenn man weiß, dass der Schüler männlich ist?

Man weiß aus (a), dass $\frac{4}{10}$ der Jungen den GK besuchen, also ist $P_J(G) = \frac{4}{10}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler den GK Mathe besucht, wenn man weiß, dass es ein Junge ist.

(3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen LK-Schüler, wenn man weiß, dass der Schüler weiblich ist?

Man weiß aus (b), dass $\frac{5}{20}$ der Mädchen den LK besuchen, also ist $P_M(L) = \frac{5}{20}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler den LK Mathe besucht, wenn man weiß, dass es ein Mädchen ist.

(4) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen GK-Schüler, wenn man weiß, dass der Schüler weiblich ist?

Man weiß aus (b), dass $\frac{15}{20}$ der Mädchen den GK besuchen, also ist $P_M(G) = \frac{15}{10}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler den GK Mathe besucht, wenn man weiß, dass es ein Mädchen ist.

Die nächsten 4 bedingten Wahrscheinlichkeiten solltest du selbst in gleicher Form aufschreiben.
Die Lösung steht auf der Folgeseite:

(5) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen Jungen, wenn man weiß, dass der Schüler den LK Mathe besucht?

(6) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Mädchen, wenn man weiß, dass der Schüler den LK Mathe besucht?

(7) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen Jungen, wenn man weiß, dass der Schüler den GK Mathe besucht?

(8) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Mädchen, wenn man weiß, dass der Schüler den GK Mathe besucht?

Hier die Ergebnisse:

(5) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen Jungen, wenn man weiß, dass der Schüler den LK Mathe besucht?

Man weiß aus (c), dass $\frac{6}{11}$ der LK-Schüler Jungen sind, also ist $P_L(J)=\frac{6}{11}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler ein Junge ist, wenn man weiß, dass er den LK Mathe besucht.

(6) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Mädchen, wenn man weiß, dass der Schüler den LK Mathe besucht?

Man weiß aus (c), dass $\frac{5}{11}$ der LK-Schüler Mädchen sind, also ist $P_L(M)=\frac{5}{11}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler weiblich ist, wenn man weiß, dass er den LK Mathe besucht.

(7) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man einen Jungen, wenn man weiß, dass der Schüler den GK Mathe besucht?

Man weiß aus (d), dass $\frac{4}{19}$ der GK-Schüler Jungen sind, also ist $P_G(J)=\frac{4}{19}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler ein Junge ist, wenn man weiß, dass er den GK Mathe besucht.

(8) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Mädchen, wenn man weiß, dass der Schüler den GK Mathe besucht?

Man weiß aus (d), dass $\frac{15}{19}$ der GK-Schüler Mädchen sind, also ist $P_G(M)=\frac{15}{19}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgeloste Schüler weiblich ist, wenn man weiß, dass er den GK Mathe besucht.

Dies sollte man können!

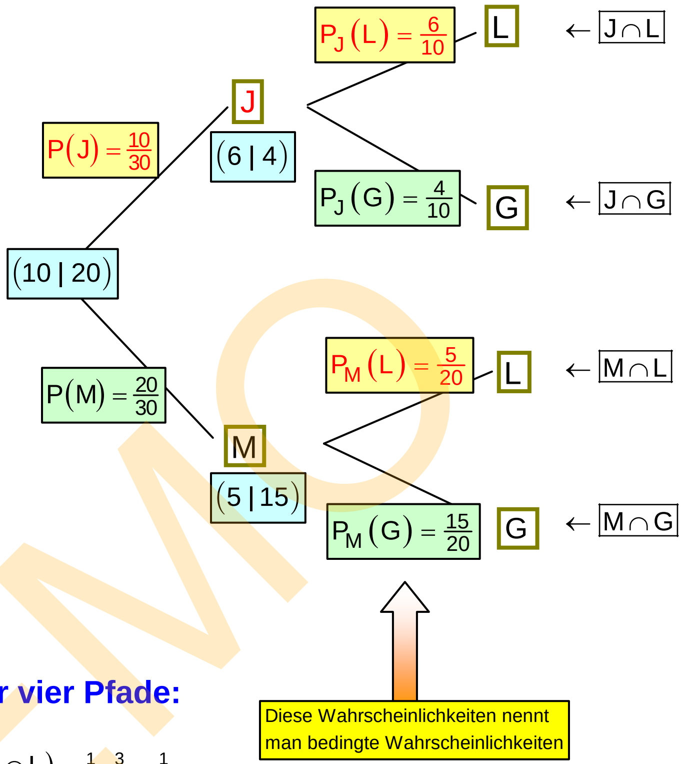
Als nächstes zeichnen wir zwei Baumdiagramme für zwei Zufallsexperimente zu dieser Situation.

Ein Schüler dieser Klassenstufe wird nun zufällig ausgelost.

Da zwei Merkmale vorliegen, kann man für ein Baumdiagramm wählen, ob man J/M für die 1. Stufe nimmt und dann L/G oder umgekehrt.

Im **1. Experiment** sei die Auswahl J/M die erste Stufe und G/L die 2. Stufe.

Die ganzen Daten wurden der Vierfeldertafel entnommen, die bedingten Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe kann man entweder den Zahlenpaaren entnehmen, die unter J und M stehen, oder den zuvor durchgeführten Berechnungen.



Dazu die Wahrscheinlichkeiten der vier Pfade:

1. Pfad: $\xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{J} \xrightarrow[\frac{3}{5}]{} \boxed{L}$ $\quad P(J \cap L) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

2. Pfad: $\xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{J} \xrightarrow[\frac{2}{5}]{} \boxed{G}$ $\quad P(J \cap G) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

3. Pfad: $\xrightarrow[\frac{2}{3}]{} \boxed{M} \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} \boxed{L}$ $\quad P(M \cap L) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

4. Pfad: $\xrightarrow[\frac{2}{3}]{} \boxed{M} \xrightarrow[\frac{3}{4}]{} \boxed{G}$ $\quad P(M \cap G) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Kontrollsumme: $\frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{6+4+5+15}{30} = \frac{30}{30} = 1$

Und hier die totalen Wahrscheinlichkeiten

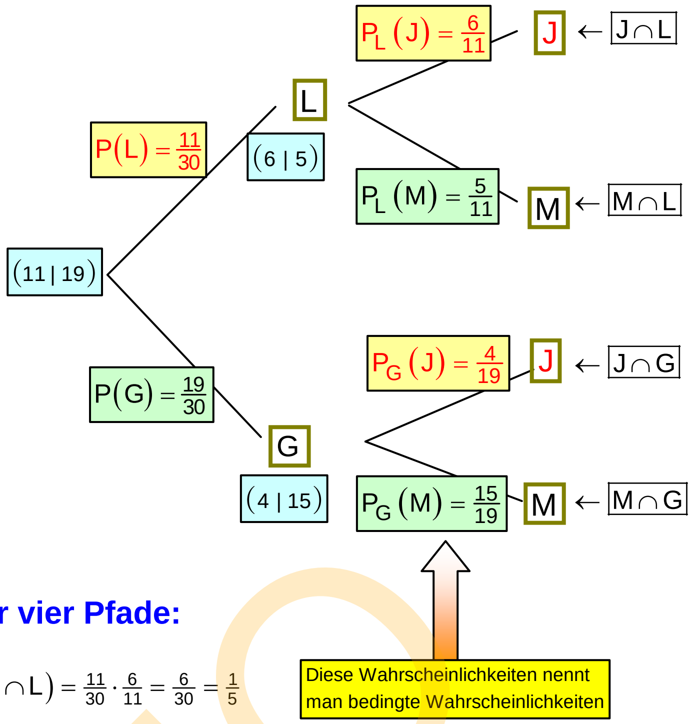
für L: $P(L) = P(J \cap L) + P(M \cap L) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30} = \frac{11}{30}$

und für G: $P(G) = P(J \cap G) + P(M \cap G) = \frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{4+15}{30} = \frac{19}{30}$

Kontrollsumme: $\frac{11}{30} + \frac{19}{30} = \frac{30}{30} = 1$

Im **2. Experiment** sei die Auswahl G/J die erste Stufe und J/M die 2. Stufe.

Die ganzen Daten wurden der Vierfeldertafel entnommen, die bedingten Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe kann man entweder den Zahlenpaaren entnehmen, die unter J und M stehen, oder den zuvor durchgeführten Berechnungen.



Dazu die Wahrscheinlichkeiten der vier Pfade:

1. Pfad: $\xrightarrow[\frac{11}{30}]{} \boxed{L} \xrightarrow[\frac{6}{11}]{} \boxed{J}$ $\quad P(J \cap L) = \frac{11}{30} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

2. Pfad: $\xrightarrow[\frac{11}{30}]{} \boxed{L} \xrightarrow[\frac{5}{11}]{} \boxed{M}$ $\quad P(M \cap L) = \frac{11}{30} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

3. Pfad: $\xrightarrow[\frac{19}{30}]{} \boxed{G} \xrightarrow[\frac{4}{19}]{} \boxed{J}$ $\quad P(J \cap G) = \frac{19}{30} \cdot \frac{4}{19} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

4. Pfad: $\xrightarrow[\frac{19}{30}]{} \boxed{G} \xrightarrow[\frac{15}{19}]{} \boxed{M}$ $\quad P(M \cap G) = \frac{19}{30} \cdot \frac{15}{19} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Kontrollsumme: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{6+5+4+15}{30} = \frac{30}{30} = 1$

Und hier die totalen Wahrscheinlichkeiten

für J: $P(J) = P(J \cap L) + P(J \cap G) = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{3+2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

und für M: $P(M) = P(M \cap L) + P(M \cap G) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

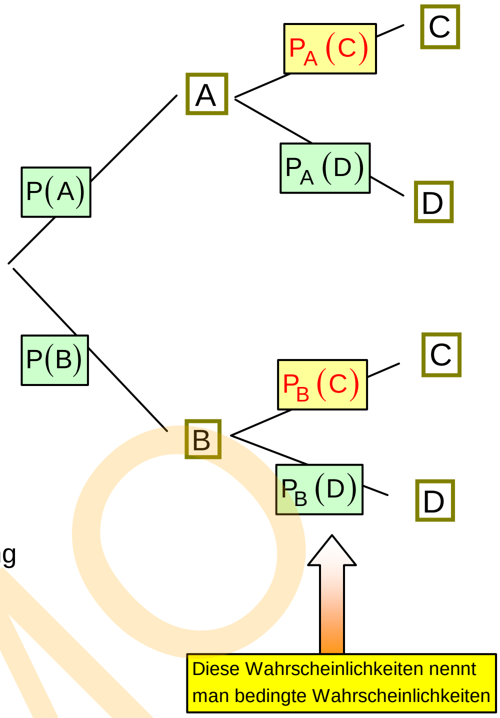
Kontrollsumme: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Nachwort: Hier wurde gezeigt, was man aus so einer Aufgabenstellung alles berechnen kann. Man sollte erkennen, welche Bedeutung die bedingten Wahrscheinlichkeiten haben und dass man auch totale Wahrscheinlichkeiten berechnen kann.

In den folgenden Aufgaben sind dann immer nur Teilaspekte zu berechnen. Dazu sind immer wieder Überlegungen anzustellen, wie sie hier gezeigt worden sind.

Übersicht

In diesem Baumdiagramm sind nach der zweiten Verzweigung die bedingten Wahrscheinlichkeiten eingetragen.



$P_A(C)$ ist die Wahrscheinlichkeit für C, wenn zuvor A eingetreten war,

$P_A(D)$ ist die Wahrscheinlichkeit für D, wenn zuvor A eingetreten war, usw.

Die totalen Wahrscheinlichkeiten für A und B sind P(A) bzw. P(B). Hier ist keine Vorbedingung gestellt worden.

Die totalen Wahrscheinlichkeiten für C und D errechnet man mit der 2. Pfadregel:

Aus dem 1. und 3. Pfad folgt: $P(C) = P(A) \cdot P_A(C) + P(B) \cdot P_B(C)$

Aus dem 2. und 4. Pfad folgt: $P(D) = P(A) \cdot P_A(D) + P(B) \cdot P_B(D)$

2 Zwei Leichte Trainingsaufgaben

Aufgabe 1: Tanzkreis

In einem neu zusammengestellten Tanzkreis befinden sich 8 Paare, die älter als 40 Jahre sind und 12 Paare, die höchstens 40 Jahre alt sind. Von den älteren Paaren tanzen 5 bereits auf höherem Niveau, während dies bei den jüngeren nur bei 4 Paaren der Fall ist.

a) Fülle die Vierfeldertafel aus, und zwar sowohl mit den absoluten, wie auch mit den relativen Häufigkeiten.

	H	N
Ä		
J		

b) Übertrage dann die Werte in ein Baumdiagramm, wobei Ä (älter) und J (jünger) die erste Stufe bilden sollen.

c) Trage dann die 6 Wahrscheinlichkeiten ein.

d) Berechne dann die Wahrscheinlichkeiten für die vier Pfade und die totalen Wahrscheinlichkeiten für H (höheres Niveau) und N (niedrigeres Niveau).

Aufgabe 2: Brillenträger

In einer Klasse mit 30 Schülern sind 40% Jungen. Die Hälfte von ihnen trägt eine Brille, während dieser Anteil bei den Mädchen nur ein Drittel ist.

Führe die Aufgabenteile a) bis d) der Aufgabe 1 analog durch.

Die Lösungen findet man auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1

In einem neu zusammengestellten Tanzkreis befinden sich 8 Paare, die älter als 40 Jahre sind und 12 Paare, die höchstens 40 Jahre alt sind. Von den älteren Paaren sind 5 bereits auf höherem Niveau, während dies bei den jüngeren bei 4 Paaren der Fall ist.

Lösung zu 1a

Die schwarzen Zahlen waren gegeben, die blau umrandeten sind die berechneten $\boxed{3}$ absoluten Häufigkeiten, die roten sind die relativen Häufigkeiten, alle bezogen auf den Umfang der Stichprobe, also 20, und dann umgerechnet in Prozent.

	H	N	
Ä	$H \cap Ä$ 5 $\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%$	$N \cap Ä$ $\boxed{3}$ $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\%$	8 40%
J	$H \cap J$ 4 $\frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20\%$	$J \cap N$ $\boxed{8}$ $\frac{8}{20} = \frac{40}{100} = 40\%$	12 60%
	$\boxed{9}$ 45%	$\boxed{11}$ 55%	$\boxed{20}$

Erstelle nun das Baumdiagramm!

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Aufgabe 2

In einer Klasse mit 30 Schülern sind 40% Jungen. Die Hälfte von ihnen trägt eine Brille, während dieser Anteil bei den Mädchen nur ein Drittel ist.

Lösung zu 2a

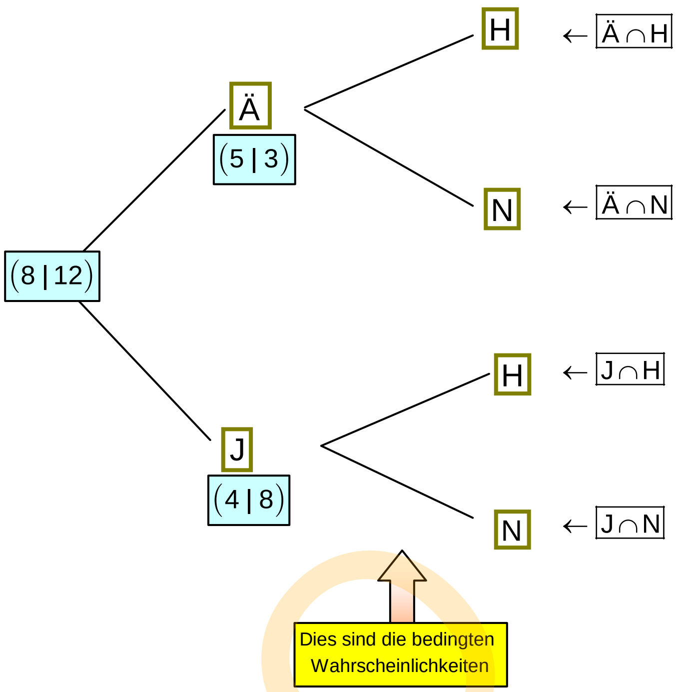
Aus den gegebenen Werten (schwarz) wurden die anderen Werte (blau und rot) berechnet.

	B	$\overline{B}$	
J	$J \cap B$ $\boxed{6}$ $\frac{1}{2}$	$J \cap \overline{B}$ $\boxed{6}$ $\frac{1}{2}$	$\boxed{12}$ 40%
M	$M \cap B$ $\boxed{6}$ $\frac{1}{3}$	$M \cap \overline{B}$ $\boxed{12}$ $\frac{2}{3}$	$\boxed{18}$ 60%
	$\boxed{12}$ 40%	$\boxed{18}$ 60%	$\boxed{30}$

Erstelle nun das Baumdiagramm!

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Lösung zu 1b

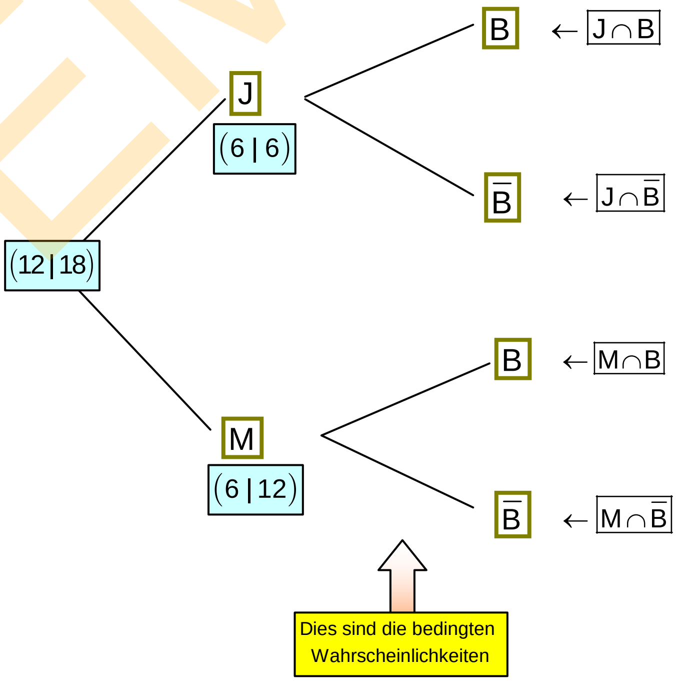


Die Zahlenpaare geben die absoluten Häufigkeiten an. Aus ihnen werden jetzt die relativen Häufigkeiten berechnet, die man dann als Wahrscheinlichkeiten verwendet.

Führe dies bitte durch!

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Lösung zu 2b



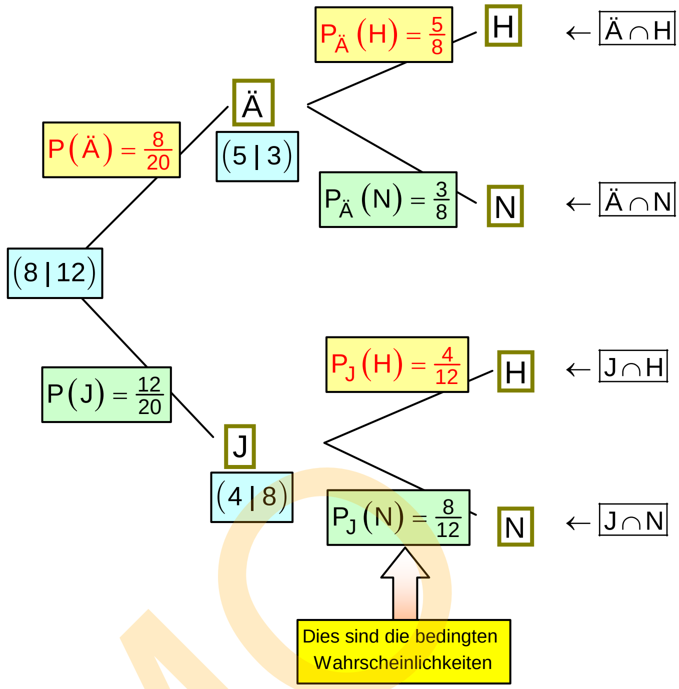
Die Zahlenpaare geben die absoluten Häufigkeiten an. Aus ihnen werden jetzt die relativen Häufigkeiten berechnet, die man dann als Wahrscheinlichkeiten verwendet.

Führe das bitte durch!

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Lösung zu 1c

Hier die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

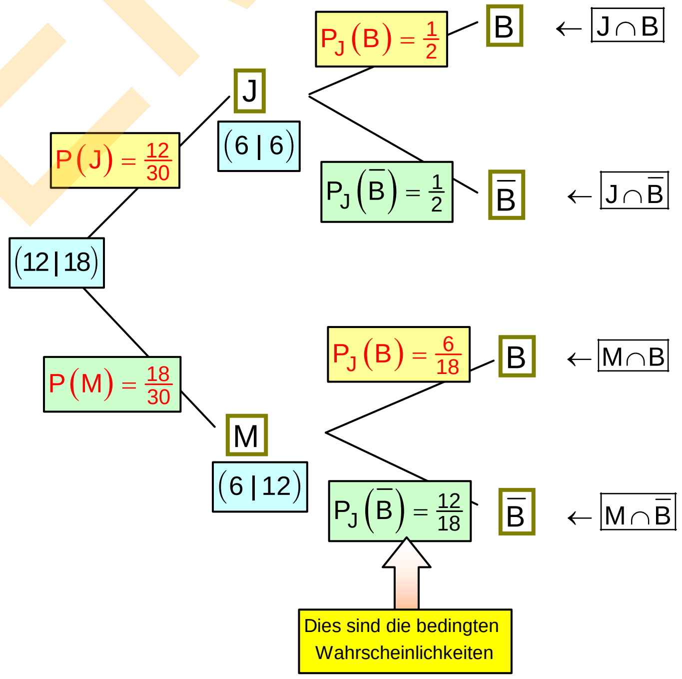


d) Berechne dann die Wahrscheinlichkeiten für die vier Pfade und die totalen Wahrscheinlichkeiten für H (höheres Niveau) und N (niedrigeres Niveau).

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Lösung Aufgabe 2c

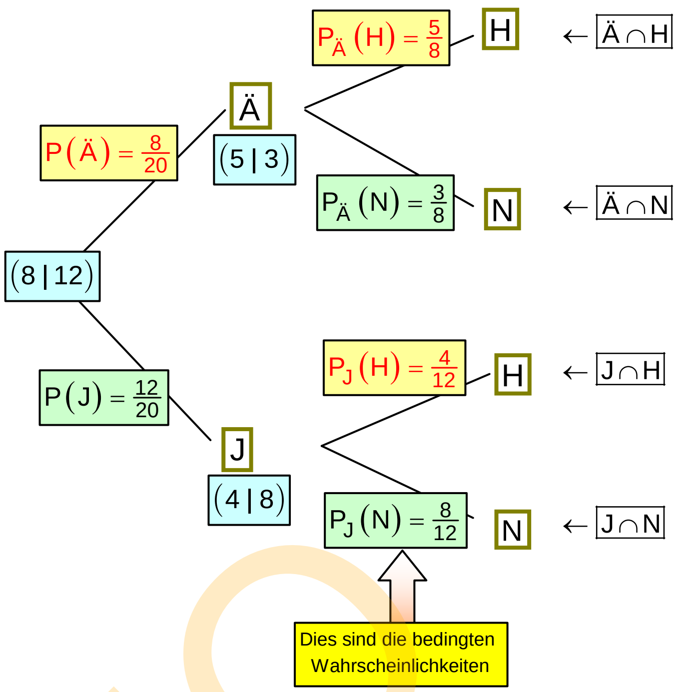
Hier die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



d) Berechne dann die Wahrscheinlichkeiten für die vier Pfade und die totalen Wahrscheinlichkeiten für H (höheres Niveau) und N (niedrigeres Niveau).

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Lösung zu 1d



1. Pfad: $P(Ä\cap H)=\frac{8}{20}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

2. Pfad: $P(Ä\cap N)=\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{20}$

3. Pfad: $P(J\cap H)=\frac{12}{20}\cdot\frac{4}{12}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

4. Pfad: $P(J\cap N)=\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{12}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

Kontrolle:

$$\frac{5}{20}+\frac{3}{20}+\frac{4}{20}+\frac{8}{20}=\frac{20}{20}=1$$

Totale Wahrscheinlichkeiten:

Für H: (Pfad 1 und 3):

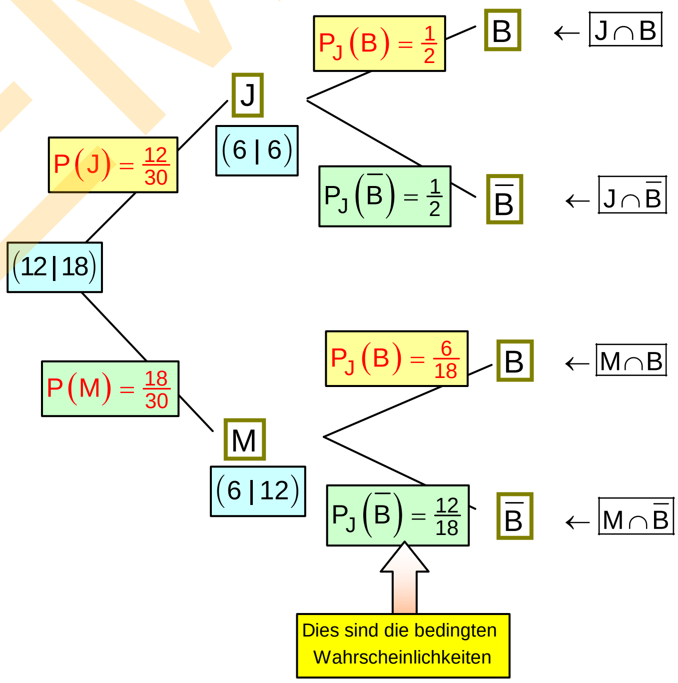
$$P(H)=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{9}{20}$$

Für N: (Pfad 2 und 4):

$$P(N)=\frac{3}{20}+\frac{8}{20}=\frac{11}{20}$$

Kontrolle: $P(H)+P(N)=1$

Lösung Aufgabe 2d



1. Pfad: $P(J\cap B)=\frac{12}{30}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

2. Pfad: $P(J\cap\overline{B})=\frac{12}{30}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

3. Pfad: $P(M\cap B)=\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{18}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

4. Pfad: $P(M\cap\overline{B})=\frac{18}{30}\cdot\frac{12}{18}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

Kontrolle:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Totale Wahrscheinlichkeiten:

Für B: (Pfad 1 und 3):

$$P(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Für $\overline{B}$: (Pfad 2 und 4):

$$P(\overline{B})=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

Kontrolle: $P(B)+P(\overline{B})=1$

3 Grundaufgabe 1: Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Beispiel 1: Mädchen und Mathematik

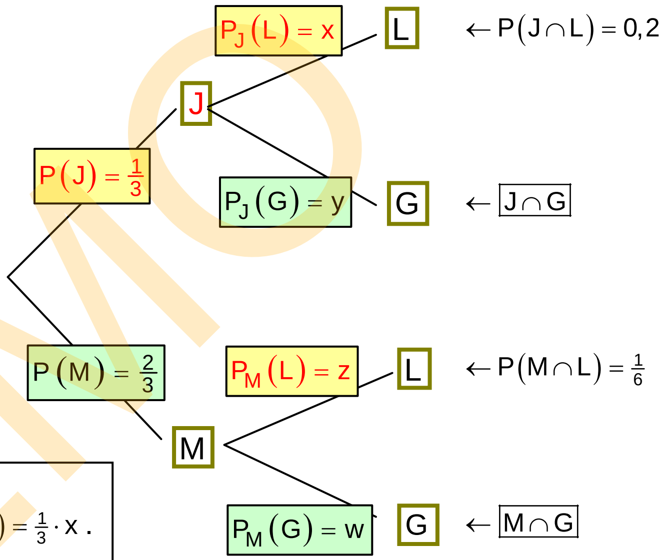
In der Jahrgangsstufe 12 des Internatsgymnasiums Schloss Torgelow sind 2001 ein Drittel Jungen.

20% aller Schüler sind männlich und besuchen den LK Mathematik.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Junge den LK Mathe besucht?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Mädchen den LK Mathe besucht, wenn man weiß, dass $\frac{1}{6}$ aller Schüler weiblich ist und den LK besucht?

Lösung



Man beginne mit einem Baumdiagramm!

Diese Aufgaben enthalten diese <u>Schwierigkeit</u>: Man muss erkennen, dass die 20% der Jungen im LK zur Schnittmenge gehören, dass also die Wahrscheinlichkeit des 1. Pfades 0,20 ist.

Das nutzt man so aus (1. Schritt):

<u>Einerseits</u> ist $P(J \cap L) = 0,2$ und
<u>andererseits</u> gilt nach der Pfadregel: $P(J \cap L) = \frac{1}{3} \cdot x$.

Also folgt: $\boxed{\frac{1}{3}x = 0,2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0,2}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 0,2 = 0,6}$

2. Schritt: Entsprechend stellt $\frac{1}{6}$ die Wahrscheinlichkeit des 3. Pfades, also der Schnittmenge $M \cap L$ dar. Wir wissen also:

Einerseits ist $P(M \cap L) = \frac{1}{6}$
andererseits gilt $P(M \cap L) = \frac{2}{3} \cdot z$ (Pfadregel)
Also folgt: $\boxed{\frac{2}{3}z = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 0,25}$

Ergebnis: Die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten sind:

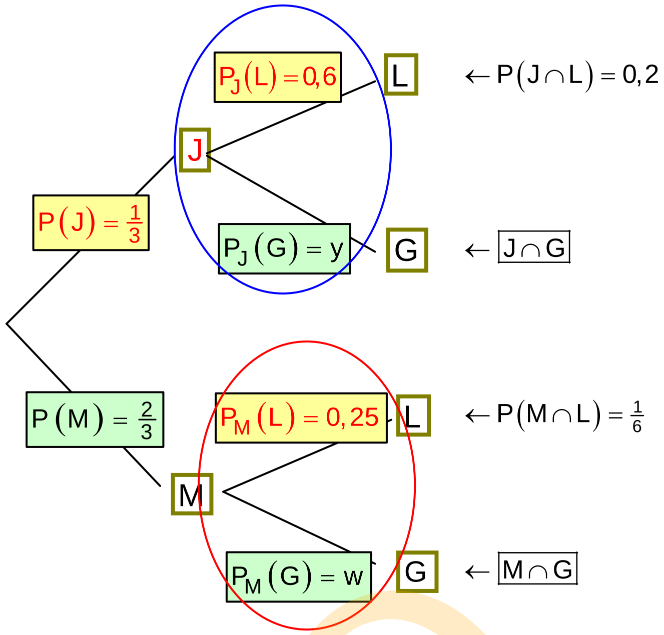
$P_J(L) = x = 0,6 = 60\%$

$P_M(L) = z = 0,25 = 25\%$.

<u>Zusatzaufgabe:</u>

Berechne noch die beiden anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten dieses Baums, also $P_J(G)$ und $P_M(G)$.

Lösung der Zusatzaufgabe



Dies ist einfach, wenn man erkennt, dass man nur die Wahrscheinlichkeiten der Gegenereignisse sucht:

$P_J(L)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Junge den LK besucht, also 60%.
Also besucht einer mit 40% Wahrscheinlichkeit der Grundkurs!
$P_J(G)=1-P_J(L)$ (blaues Oval).

Entsprechend gilt:
$P_M(G)=1-P_M(L)=1-0{,}25=0{,}75=75\%$

Auswertung und Hintergrund der gelernten Methode:

WICHTIG!

1. Teil

Vom 1. Pfad $\xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{J} \xrightarrow[x]{} \boxed{L}$ kennen wir die 1. Wahrscheinlichkeit $P(J)$ und die Wahrscheinlichkeit des ganzen Pfades (also der Schnittmenge $J \cap L$): Das ist $P(J \cap L)$.

Die Wahrscheinlichkeit der 2. Stufe des 1. Pfades, die mit x bezeichnet worden ist, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_J(L)$, also die Wahrscheinlichkeit für L, wenn zuvor J eingetreten war.
Diese Wahrscheinlichkeit war zu berechnen!

Nach der 1. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades multipliziert, also gilt:

$$\underbrace{P(J \cap L)}_{\text{Gegeben}} = \underbrace{P(J)}_{\text{Gegeben}} \cdot \underbrace{P_J(L)}_{\text{Gesucht}}$$

Diese Gleichung stellt man nach der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeit um und erhält:

$$\boxed{P_J(L) = \frac{P(J \cap L)}{P(J)}} \qquad (1)$$

Genau so haben wir auf der Seite zuvor x berechnet, also:

„Wahrscheinlichkeit des ganzen Pfads geteilt durch die Wahrscheinlichkeit des 1. Teilpfads = Wahrscheinlichkeit des 2. Teilpfads“ (also eine bedingte Wahrscheinlichkeit)

Die Formel 1 ist der Satz von Bayes (die Bayes-Formel).

Eine gründliche Übersicht dazu steht auf Seite 25

Aufgabe: Stelle auf analoge Weise die Formeln für die anderen 3 bedingten Wahrscheinlichkeiten auf, also für $P_J(G)$, $P_M(L)$ und $P_M(G)$.

Zwei davon kann man auch kürzer berechnen, entdeckst du die Methode?

2. Teil

Vom 2. Pfad $\xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \boxed{J} \xrightarrow[P_J(G)]{} \boxed{G}$ kennen wir die 1. Wahrscheinlichkeit $P(J) = \frac{1}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit des ganzen Pfades (der Schnittmenge $J \cap G$), also $P(J \cap G)$.

Nach der 1. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades multipliziert, also gilt:

$$\underbrace{P(J \cap G)}_{\text{Gegeben}} = \underbrace{P(J)}_{\text{Gegeben}} \cdot \underbrace{P_J(G)}_{\text{Gesucht}}$$

Diese Gleichung stellt man nach der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeit um und erhält:

$$\boxed{P_J(G) = \frac{P(J \cap G)}{P(J)}} \qquad (2)$$

3. Teil

Vom 3. Pfad $\xrightarrow[\frac{2}{3}]{} \boxed{M} \xrightarrow[P_M(L)]{} \boxed{L}$ kennen wir die 1. Wahrscheinlichkeit $P(M) = \frac{2}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit des ganzen Pfades (der Schnittmenge $M \cap L$), also $P(M \cap L)$.

Nach der 1. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades multipliziert, also gilt:

$$\underbrace{P(M \cap L)}_{\text{Gegeben}} = \underbrace{P(M)}_{\text{Gegeben}} \cdot \underbrace{P_M(L)}_{\text{Gesucht}}$$

Diese Gleichung stellt man nach der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeit um und erhält:

$$\boxed{P_M(L) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)}} \qquad (3)$$

4. Teil

Vom 4. Pfad $\xrightarrow[\frac{3}{3}]{} \boxed{M} \xrightarrow[P_M(G)]{} \boxed{G}$ kennen wir die 1. Wahrscheinlichkeit $P(M) = \frac{2}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit des ganzen Pfades (der Schnittmenge $M \cap G$), also $P(M \cap G)$.

Nach der 1. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades multipliziert, also gilt:

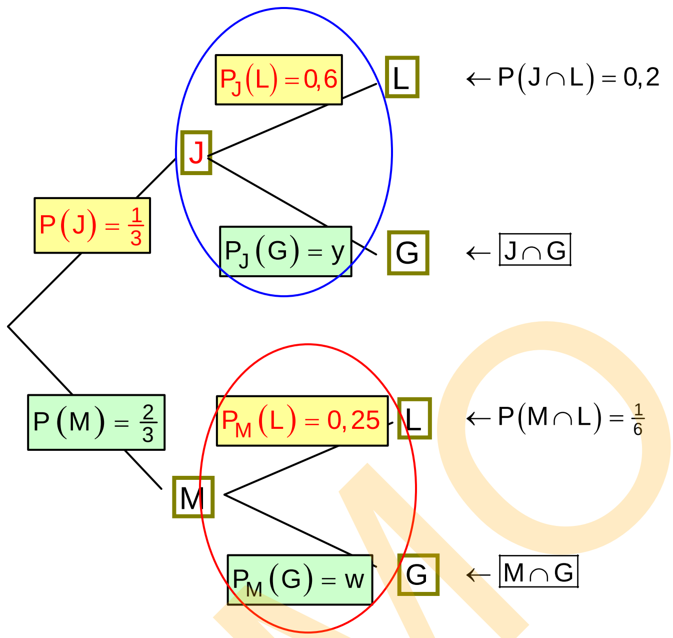
$$\underbrace{P(M \cap G)}_{\text{Gegeben}} = \underbrace{P(M)}_{\text{Gegeben}} \cdot \underbrace{P_M(G)}_{\text{Gesucht}}$$

Diese Gleichung stellt man nach der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeit um und erhält:

$$\boxed{P_M(G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)}} \qquad (4)$$

Merke auch:

Man kann eine bedingte Wahrscheinlichkeit einfacher berechnen, wenn man die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses kennt.



Vereinfachte Berechnung:

Im blauen Oval:

Aus $P_J(L) + P_J(G) = 1$ kann man etwa $P_J(G) = 1 - P_J(L)$ bekommen, wenn man $P_J(L)$ schon kennt.

Im roten Oval:

Aus $P_M(L) + P_M(G) = 1$ folgt $P_M(G) = 1 - P_M(L)$, wenn man $P_M(L)$ schon kennt.

Beispiel 2: Basketballspieler

Ein Basketballspieler erhält einen Doppelfreiwurf. Er weiß aus Erfahrung, dass er mit 60% Wahrscheinlichkeit beim ersten Wurf trifft. Dies gilt auch für den 2. Wurf. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer nacheinander liegt jedoch nur bei 48%.

Trage diese Werte in ein Carnaugh-Diagramm ein (Vierfeldertafel) und erkläre die Bedeutung der vier Felder. Zeichne dann ein Baumdiagramm und berechne daraus die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beim 2. Wurf je nachdem, ob der 1. Wurf sitzt oder nicht.

Lösung

Zuerst die Vorbereitung der Lösung!

Man erstellt ein Carnaugh-Diagramm (Vierfeldertafel) und definiert dazu die folgenden Ereignisse:

	A	$\overline{A}$	
B	$0{,}48$	$0{,}6-0{,}48=0{,}12$	$0{,}6$
$\overline{B}$	$0{,}6-0{,}48=0{,}12$	$0{,}4-0{,}12=0{,}28$	$0{,}4$
	$0{,}6$	$0{,}4$	

Definition von Ereignissen:

A = Treffer beim 1. Wurf,

B = Treffer beim 2. Wurf.

Gegeben war: $P(A) = P(B) = 0{,}6$

Daraus folgen die Wahrscheinlichkeiten für die Gegenereignisse:

$P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 1-0{,}6 = 0{,}4$ (blau eingetragen)

Jetzt folgen die Berechnungen der vier Schnittmengen:

$A \cap B$ stellt das Ereignis „Beide Würfe sind Treffer" dar mit: $P(A \cap B) = 0{,}48$

$A \cap \overline{B}$ stellt das Ereignis „Nur der 1. Wurf sitzt" dar mit: $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}6-0{,}48 = 0{,}12$

$\overline{A} \cap B$ stellt das Ereignis „Nur der 2. Wurf sitzt" dar mit: $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6-0{,}48 = 0{,}12$

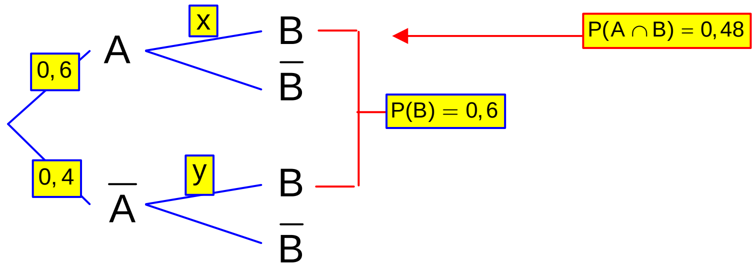
$\overline{A} \cap \overline{B}$ stellt das Ereignis „Kein Wurf sitzt" dar mit: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4-0{,}12 = 0{,}28$

Nun kann man an die Lösung gehen. Es lohnt sich immer, zum vorliegenden Sachverhalt ein Baumdiagramm zu zeichnen. Dazu muss man festlegen, welches die 1. und die 2. Stufe sein sollen.

Dies ist hier jedoch klar: Der 1. Wurf bildet die 1. Stufe, der 2. Wurf die 2. Stufe.

Versuche zuerst, das Baumdiagramm selbst zu entwerfen.
Trage darin diese Wahrscheinlichkeiten ein: P(A), $P(\overline{A})$, P(B) und $P(A \cap B)$.

Die Fortsetzung der Lösung folgt dann auf der nächsten Seite.



(a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der 2. Wurf sitzt, wenn schon der 1. ein Treffer war, ist die im Baum mit x bezeichnete bedingte Wahrscheinlichkeit, die man so schreibt: $P_A(B)$.

Die Wahrscheinlichkeit des 1. Pfades ist bekannt als $P(A \cap B) = 0,48$.

Für den 1. Pfad gilt die Pfadregel: $P(A \cap B) = P(A) \cdot x$

Daraus folgt: $x = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,48}{0,6} = \frac{4}{5} = 0,8$

Ergebnis: Wenn der erste Wurf sitzt, trifft der zweite mit der Wahrscheinlichkeit 0,8.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dafür dass der 2. Wurf sitzt, wenn der 1. kein Treffer war, ist die im Baum mit y bezeichnete bedingte Wahrscheinlichkeit, die man so schreibt: $P_{\overline{A}}(B)$.

Die Wahrscheinlichkeit des 3. Pfades entnimmt man der Vierfeldertafel: $P(\overline{A} \cap B) = 0,12$.

Für den 3. Pfad gilt die Pfadregel: $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot y$

Daraus folgt: $y = P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,12}{0,4} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3$

Ergebnis: Wenn der erste nicht Wurf sitzt, trifft der zweite mit der Wahrscheinlichkeit 0,3.

Bemerkung:

Die beiden restlichen (in der Aufgabenstellung nicht verlangten Wahrscheinlichkeiten) erhält man über Gegenereignisse so:

Wenn der erste Wurf sitzt, trifft der 2. mit dieser Wahrscheinlichkeit nicht:

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Wenn der erste nicht Wurf sitzt, trifft der 2. mit dieser Wahrscheinlichkeit nicht:

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0,3 = 0,7 .$$

Beispiel 3: Krankenkassen

Von den Mitgliedern einer Krankenkasse wohnen im Schnitt 60% auf dem Land.
52% nahmen im Kalenderjahr 2006 die Kasse in Anspruch, darunter waren 22 % Landbewohner.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein KK-Mitglied, das die Kasse in Anspruch nimmt, Landbewohner?

Lösung (jetzt ohne Vierfeldertafel)

Vorbereitung:

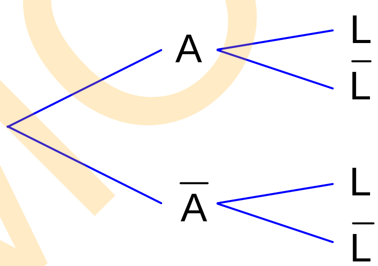
1. <u>Definition von Ereignissen:</u>

   L = Das Mitglied wohnt auf dem Land.

   A = Das Mitglied nimmt die Krankenkasse in Anspruch.

2. <u>Erstellung eines Baumdiagramms</u>:

   Aus der Fragestellung entnimmt man, dass das Ereignis A die erste Stufe bildet, es geht um Personen, welche die Krankenkasse in Anspruch nehmen.



3. Erkunden, welche Wahrscheinlichkeiten in der Aufgabenstellung gegeben sind und in das Baumdiagramm eintragen.

   (1) „52% nahmen im Kalenderjahr 2006 die Kasse in Anspruch“ bedeutet ???

   (2) 60% sind Landbewohner. Diese Wahrscheinlichkeit kommt wohin?

   (3) Darunter waren 22 % Landbewohner. Dies ist welche Wahrscheinlichkeit ???

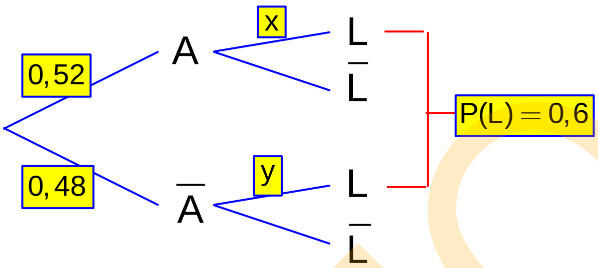
Trage diese Wahrscheinlichkeiten ins Baumdiagramm ein!

Hier die vollständige Auswertung des Textes:

(1) 52% nahmen im Kalenderjahr 2006 die Kasse in Anspruch bedeutet:
P(A) = 0,52.

(2) 60% sind Landbewohner. Die ist die totale Wahrscheinlichkeit für L und ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten des 1. und 3. Pfades.

(3) Darunter waren 22 % Landbewohner. Dies bezieht sich auf die Schnittmenge $A \cap L$:
$P(A \cap L) = 0,22$ und beschreibt den 1. Pfad.



(4) Nun zur Frage in der Aufgabe:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein KK-Mitglied, das die Kasse in Anspruch nimmt, Landbewohner?

Für den 1. Pfad gilt nach der 1. Pfadregel: $P(A \cap L) = P(A) \cdot x$, woraus folgt:

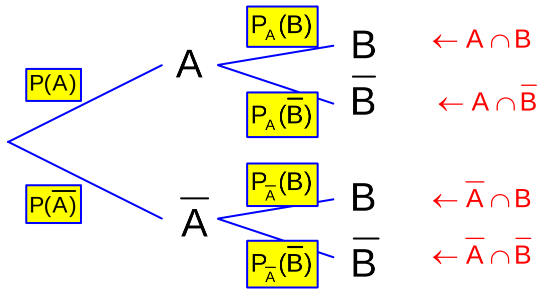
$$x = P_A(L) = \frac{P(A \cap L)}{P(A)} = \frac{0,22}{0,52} \approx 0,42 .$$

Ergebnis:
42 % der Mitglieder, welche die Kasse in Anspruch genommen haben, sind also Landbewohner.
Daraus folgt, dass der Rest, also 58% in der Stadt wohnen.

Diese Aufgabe wird ab Seite 30 durch b) und c) fortgesetzt.

Verallgemeinerung dieser Methode: Der Satz von Bayes

Sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten gesucht, also die Wahrscheinlichkeiten für die 2. Stufe, muss man die Anfangs-Wahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeit des ganzen Pfads kennen.



Stellt man die Gleichung der 1. Pfadregel um, folgt die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

Aus $P(A)$ und $P(A \cap B)$ folgt: $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \Rightarrow \boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Aus $P(A)$ und $P(A \cap \overline{B})$ folgt: $$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) \Rightarrow \boxed{P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}}$$

Aus $P(\overline{A})$ und $P(\overline{A} \cap B)$ folgt: $$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \Rightarrow \boxed{P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}}$$

Aus $P(\overline{A})$ und $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ folgt: $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) \Rightarrow \boxed{P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})}}$$

Diese Berechnungsformeln nennt man den Satz von Bayes.

Hinweis dazu:

Viele Schüler lernen die erste Formel $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$ auswendig und verwenden sie dann in den Bezeichnungen angepasst in allen möglichen Situationen.

Davon rate ich eigentlich ab. Denn dies ist erfahrungsgemäß oft eine Fehlerquelle, die ihren Grund einfach darin hat, dass man Bezeichnungen (Ereignisse) verwechselt.

Ich empfehle so vorzugehen, wie in Beispiel 3:

Man schreibt die Pfadregel-Formel an und stellt sie nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit um. Dann hat man die Aufgabe eher verstanden, als wenn man eine unverstandene, auswendig gelernte Formel versucht, irgendwie anzuwenden.

4 Einen Baum stürzen

Grundidee

Wenn ich aus unserer Jahrgangstufe 12 die Kinder haben will, die weiblich sind und den Leistungskurs Mathematik besuchen, dann kann ich dies auf zwei verschiedene Arten zweistufig durchführen:

1. Möglichkeit: Ich bitte zuerst die Mädchen, sie mögen nach vorne treten: Anschließend wähle ich diejenigen aus, die eine LK Mathe besuchen.

2. Möglichkeit: Ich lasse zuerst alle Leistungskursschüler nach vorne kommen, und davon wähle ich diejenigen aus, die weiblich sind.

Das bedeutet, dass ich diese Schnittmenge der LK-Schülerinnen durch zwei unterschiedliche Pfade erzeugen kann:

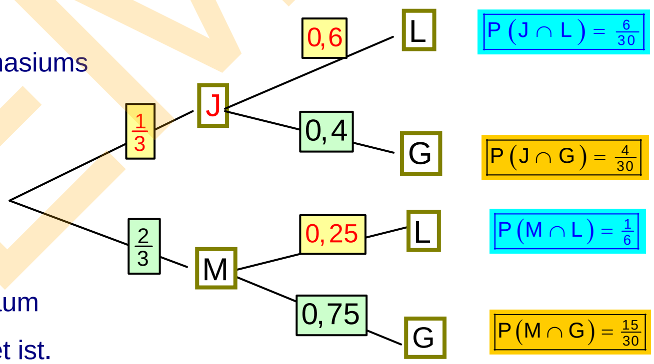
1. Möglichkeit: $\longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow \boxed{L}$

2. Möglichkeit: $\longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow \boxed{M}$.

Man sagt auch, der 2.Pfad ist gegenüber dem ersten Pfad gestürzt worden.
Es soll hier erklärt werden, wie man einen ganzen Baum stürzt.

Beispiel 1 (von Seite 16)

In der Jahrgangsstufe 12 des Internatsgymnasiums Schloss Torgelow sind ein Drittel Jungen. 20% aller Schüler sind männlich und besuchen den LK Mathematik, $\frac{1}{6}$ der Schüler ist weiblich und besucht den LK. Daraus wurde auf Seite 8 dieser Baum erstellt, der hier etwas vereinfacht abgebildet ist.

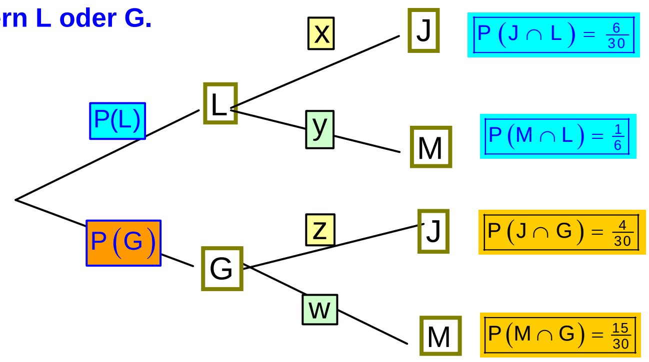


Wir wollen diesen Baum stürzen.

Dann heißt die 1. Stufe nicht J oder M sondern L oder G.

Die Wahrscheinlichkeit P(L) ist die totale Wahrscheinlichkeit für L, die man als Summe der Wahrscheinlichkeiten von Pfad 1 und 3 des oberen Baumdiagramms erhält (blau).

P(G) ist die totale Wahrscheinlichkeit von G, also die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Pfad 2 und 4 des oberen Baumes.



AUFGABE: Berechne diese Wahrscheinlichkeiten!

Berechnung der totalen Wahrscheinlichkeiten:

$$P(L) = \tfrac{6}{30} + \tfrac{5}{30} = \boxed{\tfrac{11}{30}}$$

$$P(G) = \tfrac{4}{30} + \tfrac{15}{30} = \boxed{\tfrac{19}{30}}$$

Nun fehlen noch die vier bedingten Wahrscheinlichkeiten x, y, z und w.

Diese berechnen wir mit der im letzten Abschnitt gelernten Methode:

1. Pfad: $P(J \cap L) = P(L) \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{P(J \cap L)}{P(L)} = \dfrac{\frac{6}{30}}{\frac{11}{30}} = \boxed{\dfrac{6}{11} = P_L(J)}$

2. Pfad: $P(M \cap L) = P(L) \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{P(M \cap L)}{P(L)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{30}} = \boxed{\dfrac{5}{11} = P_L(M)}$

3. Pfad: $P(J \cap G) = P(G) \cdot z \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{P(J \cap G)}{P(G)} = \dfrac{\frac{4}{30}}{\frac{19}{30}} = \boxed{\dfrac{4}{19} = P_G(J)}$

4. Pfad: $P(M \cap G) = P(G) \cdot w \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{P(M \cap G)}{P(G)} = \dfrac{\frac{15}{30}}{\frac{19}{30}} = \boxed{\dfrac{15}{19} = P_G(M)}$

Hinweis:

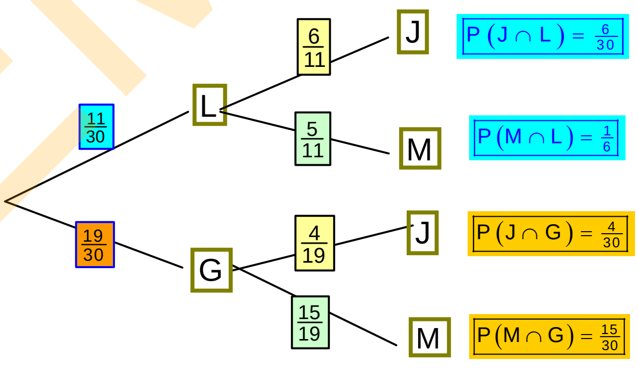
Beim 2. Pfad kann man auch so rechnen:

$$y = 1 - x = 1 - \tfrac{6}{11} = \tfrac{5}{11}$$

Und beim 4. wäre kürzer:

$$y = 1 - z = 1 - \tfrac{4}{19} = \tfrac{15}{19}$$

Damit ist der gestürzte Baum komplett!



METHODE zur Erzeugung eines gestürzten Baumes:

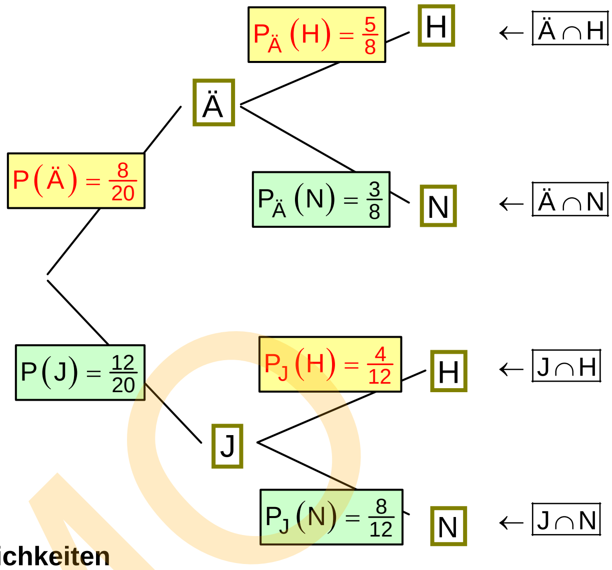
1. Schritt: **Die Wahrscheinlichkeiten der 1. Stufe sind die totalen Wahrscheinlichkeiten des ursprünglichen Baumes.**

2. Schritt: **Die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe sind bedingte Wahrscheinlichkeiten. Aus der Gleichung für die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Pfades kann man sie durch eine einfache Umstellung berechnen. (Oder den Satz von Bayes anwenden)**

Beispiel 2 (von Seite 11): Tanzkreis

In einem neu zusammengestellten Tanzkreis befinden sich 8 Paare, die älter als 40 Jahre sind und 12 Paare, die höchstens 40 Jahre alt sind. Von den älteren Paaren sind 5 bereits auf höherem Niveau, während dies bei den jüngeren bei 4 Paaren der Fall ist.

Folgende Ereignisse sind verarbeitet worden:



Ä = Älteres Tanzpaar

J = Jüngeres Tanzpaar

H = Hohes Niveau

N = Niedriges Niveau

Der Baum wurde auf Seite 15 erstellt.

Aufgabe: Stürze diesen Baum!

1. Schritt: Berechnung der totalen Wahrscheinlichkeiten

$$P(H) = \underbrace{\frac{8}{20}\cdot\frac{5}{8}}_{1.\text{Pfad}} + \underbrace{\frac{12}{20}\cdot\frac{4}{12}}_{3.\text{Pfad}} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \boxed{\frac{9}{20}}$$

$$P(N) = \underbrace{\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{8}}_{2.\text{Pfad}} + \underbrace{\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{12}}_{4.\text{Pfad}} = \frac{3}{20} + \frac{8}{20} = \boxed{\frac{11}{20}}$$

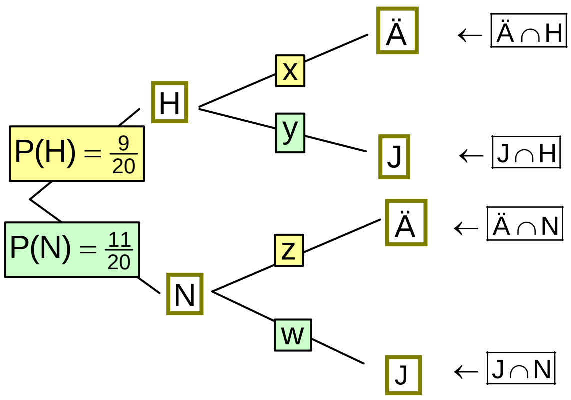
2. Schritt: Berechnung der 4 bedingten Wahrscheinlichkeiten

1. Pfad: $P(Ä \cap H) = P(H)\cdot x \Rightarrow x = \frac{P(Ä \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{8}{20}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{9}{20}} = \boxed{\frac{5}{9} = P_H(Ä)}$

2. Pfad: $P(J \cap H) = P(H)\cdot y \Rightarrow y = \frac{P(J \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{12}{20}\cdot\frac{4}{12}}{\frac{9}{20}} = \boxed{\frac{4}{9} = P_H(J)}$ (oder: $y = 1 - x = \frac{4}{9}$)

3. Pfad: $P(Ä \cap H) = P(N)\cdot z \Rightarrow z = \frac{P(Ä \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{11}{20}} = \boxed{\frac{3}{11} = P_N(Ä)}$

4. Pfad: $P(J \cap N) = P(N)\cdot w \Rightarrow w = \frac{P(J \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{12}}{\frac{11}{20}} = \boxed{\frac{8}{11} = P_N(J)}$ (oder: $w = 1 - z = \frac{8}{11}$)



Ich zeige nun, welche Bedeutung das Stürzen von Bäumen hat.

Dazu schauen wir uns die Aufgabenstellung noch einmal an.

In einem neu zusammengestellten Tanzkreis befinden sich 8 Paare, die älter als 40 Jahre sind und 12 Paare, die höchstens 40 Jahre alt sind. Von den älteren Paaren sind 5 bereits auf höherem Niveau, während dies bei den jüngeren bei 4 Paaren der Fall ist.

Die Angabe „*Von den älteren Paaren sind 5 bereits auf höherem Niveau*" deutet auf eine bedingte Wahrscheinlichkeit hin, denn es wird vorausgesetzt, dass sie älter sind (Ä) und dann kommt die 2. Stufe: höheres Niveau:

$$\xrightarrow[\frac{8}{20}]{} \boxed{\text{Ä}} \xrightarrow[\frac{5}{8}]{} \boxed{\text{H}}$$

Aus dieser Aussage geht nicht unmittelbar eine Antwort auf folgende Frage hervor:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig gewähltes Paar mit höherem Niveau älter als 40 Jahre?

Diese Frage gehört zum gestürzten Baum:

$$\xrightarrow[\text{P(H)}]{} \boxed{\text{H}} \xrightarrow[x]{} \boxed{\text{Ä}}$$

Auf Grund unserer Rechnung wissen wir:

$$\xrightarrow[\frac{9}{20}]{} \boxed{\text{H}} \xrightarrow[\frac{5}{9}]{} \boxed{\text{Ä}}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_H\left(\text{Ä}\right) = \frac{5}{9} \approx 56\%$

Oder diese Frage:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Paar mit niedrigem Tanzniveau ein jüngeres Paar?

Dazu gehört dieser Pfad des gestürzten Baumes:

$$\xrightarrow[\frac{11}{20}]{} \boxed{\text{N}} \xrightarrow[\frac{8}{11}]{} \boxed{\text{J}}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_N\left(J\right) = \frac{8}{11} \approx 73\%$.

Es ist nicht immer einfach zu erkennen, dass die Frage zum gestürzten Baum gehört. In aller Regel tauchen in einer Aufgabe höchstens zwei solcher Fragen auf, so dass es nicht erforderlich wird, den ganzen Baum zu stürzen. Meist reichen wie hier zwei gestürzte Pfade. Im nächsten Abschnitt wollen wir diese Aufgabenstellung als Grundaufgabe 2 gründlich üben.

5 Grundaufgabe 2: Gestürzte Pfade berechnen

Beispiel 1 (von Seite 23)

Von den Mitgliedern einer Krankenkasse wohnen im Schnitt 60% auf dem Land.
52% nahmen im Kalenderjahr 2006 die Kasse in Anspruch, darunter waren 22 % Landbewohner.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein KK-Mitglied, das die Kasse in Anspruch nimmt, Landbewohner?

Neu sind diese Fragen zur Aufgabe:

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mitglied, das die Kasse nicht in Anspruch nimmt, Landbewohner?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt ein Landbewohner die Kasse in Anspruch?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt ein Stadtbewohner die Kasse nicht in Anspruch?

Lösung

Vorbereitung:

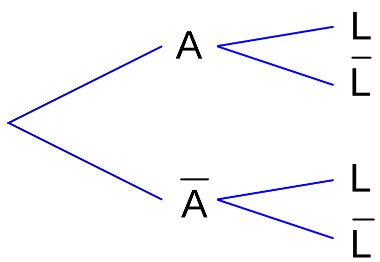
1. Definition von Ereignissen:

   L = Das Mitglied wohnt auf dem Land.

   A = Das Mitglied nimmt die Krankenkasse in Anspruch.

2. Erstellung eines Baumdiagramms:

   Aus der Fragestellung entnimmt man, dass das Ereignis A die erste Stufe bildet, es geht um Personen, welche die Krankenkasse in Anspruch nehmen.

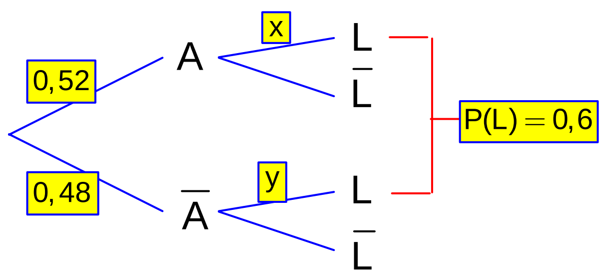


3. Auswertung des Textes:

(1) „52% nahmen im Kalenderjahr 2006 die Kasse in Anspruch“ bedeutet:
P(A) = 0,52.

(2) 60% sind Landbewohner. Dies ist die totale Wahrscheinlichkeit für L und ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten des 1. und 3. Pfades.

(3) Darunter waren 22 % Landbewohner. Dies bezieht sich auf die Schnittmenge $A \cap L$:
$P(A \cap L) = 0{,}22$ und beschreibt den 1. Pfad.



4. Nun zur Lösung der gestellten Fragen:

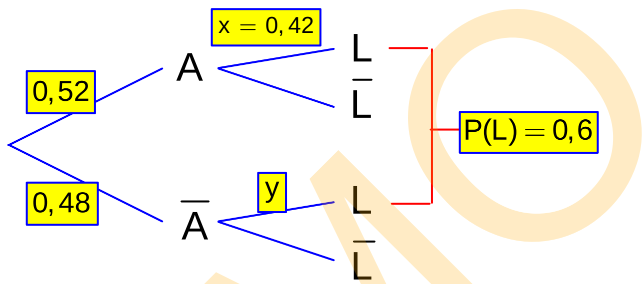
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein KK-Mitglied, das die Kasse in Anspruch nimmt, Landbewohner? (Das ist eine Wiederholung aus Seite 24.)

Für den 1. Pfad gilt nach der 1. Pfadregel: $P(A \cap L) = P(A) \cdot x$, woraus folgt:

$$x = P_A(L) = \frac{P(A \cap L)}{P(A)} = \frac{0{,}22}{0{,}52} \approx 0{,}42 .$$

Ergebnis:

42 % der Mitglieder, welche die Kasse in Anspruch genommen haben, sind also Landbewohner. Daraus folgt, dass der Rest, also 58% in der Stadt wohnen.



b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mitglied, das die Kasse nicht in Anspruch nimmt, Landbewohner? Gesucht ist also $P_{\overline{A}}(L)$.

1. Lösungsweg

Jetzt ist y gesucht. y steht im 3. Pfad, dessen Wahrscheinlichkeit wir nicht kennen.
Aber wir kennen die totale Wahrscheinlichkeit für L: $P(L) = 0{,}6$.
Diese totale Wahrscheinlichkeit errechnet man andererseits als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade 1 und 3: $P(L) = 0{,}52 \cdot 0{,}42 + 0{,}48 \cdot y$
Durch Gleichsetzen folgt:

$$0{,}52 \cdot 0{,}42 + 0{,}48 \cdot y = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad 0{,}48 \cdot y = 0{,}6 - 0{,}52 \cdot 0{,}42 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0{,}6 - 0{,}52 \cdot 0{,}42}{0{,}48} \approx 0{,}795 .$$

Ergebnis: Mit etwa 80% Wahrscheinlichkeit ist ein „Gesunder“ Landbewohner.

Hinweis: Diese Methode wird im Abschnitt 6 vertieft!

2. Lösungsweg:

In der Aufgabe ist gegeben: $P(A \cap L) = 0{,}22$.

Die totale Wahrscheinlichkeit errechnet man andererseits als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade 1 und 3, was man allgemein so schreiben kann:

$$P(L) = \underbrace{P(A \cap L)}_{1.\text{ Pfad}} \cup \underbrace{P(\overline{A} \cap L)}_{3.\text{ Pfad}}$$

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit des 3. Pfads:

$$\underbrace{P\left(\overline{A}\cap L\right)}_{\text{3. Pfad}}=P(L)-P(A\cap L)=0{,}6-0{,}22=0{,}38$$

Für ihr gilt außerdem: $P\left(\overline{A}\cap L\right)=0{,}48\cdot y$

Daraus erhält man: $y=\dfrac{P(\overline{A}\cap L)}{0{,}48}=\dfrac{0{,}38}{0{,}48}\approx 0{,}791\approx 80\%$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt ein Landbewohner die Kasse in Anspruch?

Man sollte sich den zugehörenden Pfad aufzeichnen: $\xrightarrow[P(L)]{}\boxed{L}\xrightarrow[P_L(A)]{}\boxed{A}$

Er stellt genau wie $\xrightarrow[P(A)]{}\boxed{A}\xrightarrow[P_A(L)]{}\boxed{L}$ die Schnittmenge $A\cap L$ dar.

Daher haben beide Pfade dieselbe Wahrscheinlichkeit:

$$P(L)\cdot P_L(A)=P(A\cap L)\quad\Rightarrow\quad P_L(A)=\frac{P(A\cap L)}{P(L)}=\frac{0{,}22}{0{,}6}\approx 0{,}37$$

(Das ist übrigens wieder die Formel von Bayes!)

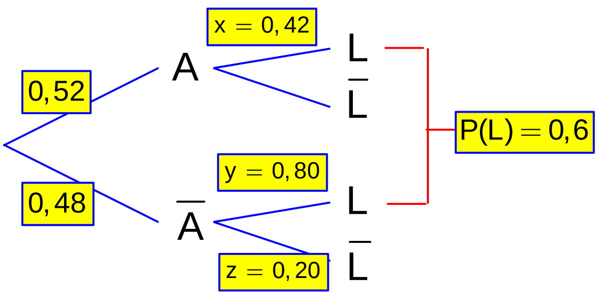
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt ein Stadtbewohner die Kasse nicht in Anspruch?

Man sollte sich den zugehörenden Pfad aufzeichnen: $\xrightarrow[P(L)]{}\boxed{\overline{L}}\xrightarrow[P_{\overline{L}}(A)]{}\boxed{\overline{A}}$

Da Stadtbewohner (also $\overline{L}$) als erste Stufe genannt wird, erhalten wir einen Pfad, der nicht im aufgestellten Baumdiagramm vorkommt. Er gehört offenbar zum gestürzten Baum.

Aber er stellt genau wie $\xrightarrow[0{,}48]{}\boxed{\overline{A}}\xrightarrow[P(L)]{}\boxed{\overline{L}}$ die Schnittmenge $\overline{A}\cap\overline{L}$ dar:

Der Baum wurde durch die Wahrscheinlichkeiten y und z ergänzt.



Damit kann man die Wahrscheinlichkeit des 4.Pfades berechnen:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{L}\right)=0{,}48\cdot 0{,}2=0{,}096$$

Andererseits gilt für den gestürzten Pfad $\xrightarrow[P(L)]{}\boxed{\overline{L}}\xrightarrow[P_{\overline{L}}(A)]{}\boxed{\overline{A}}$:

$$P\left(\overline{L}\cap\overline{A}\right)=P\left(\overline{L}\right)\cdot P_{\overline{L}}\left(\overline{A}\right)$$

Weil die beiden Schnittmengen dasselbe Ereignis darstellen, folgt durch Gleichsetzen:

$$0{,}096=P\left(\overline{L}\right)\cdot P_{\overline{L}}\left(\overline{A}\right)\quad\Rightarrow\quad P_{\overline{L}}\left(\overline{A}\right)=\frac{0{,}096}{P\left(\overline{L}\right)}=\frac{0{,}096}{0{,}4}=0{,}24$$

Ergebnis: Ein Stadtbewohner nimmt die Kasse mit 24% Wahrscheinlichkeit nicht in Anspruch.

Beispiel 2: Maschine defekt (Siehe auch Beispiel 3 im folgenden Abschnitt 6)

Eine Maschine stellt 30% defekte Teile her. Davon bleiben bei der Endkontrolle 10% unentdeckt. 40% aller Geräte werden nicht ausgeliefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit …

a) kommt ein defekter Artikel in den Handel?

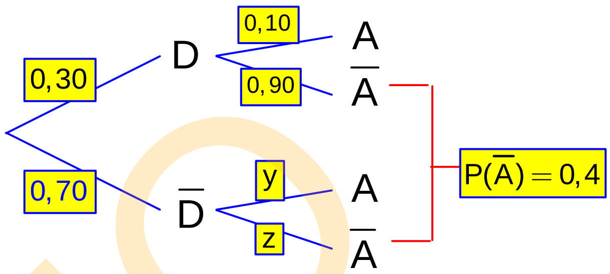
b) kommt ein beliebiger Artikel in den Handel?

c) wird ein Artikel nicht ausgeliefert, obwohl er gut ist? (Lösung in Abschnitt 6)

d) ist ein in den Handel kommender Artikel defekt? (Das ist unser Thema hier!)

Lösung

Vorbereitung:



1. Definition von Ereignissen:

   D = Das Gerät ist defekt.

   A = Das Gerät wird ausgeliefert.

2. Erstellung eines Baumdiagramms:

   Aus der Fragestellung entnimmt man, dass das Ereignis D die erste Stufe bildet, es geht um defekte und nicht defekte Artikel.

3. Auswertung des Textes:

   (1) 30% sind defekt: P(D) = 0,30.

   (2) Davon bleiben 10 % unentdeckt, also werden sie verkauft!

   Das ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Artikel ausgeliefert wird ist also 0,1: $P_D(A) = 0,1$.

4. Lösung der Teilaufgaben:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein defekter Artikel in den Handel?

Hier streiten sich viele Schüler, weil sie diese Frage für eine Beschreibung der Schnittmenge $P(D \cap A)$ halten. Dann aber sollte man fragen:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Artikel defekt und wird ausgeliefert?

Hier ist aber gemeint: Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein Gerät in den Handel, wenn (obwohl) es defekt ist? Defekt wird also vorausgesetzt als 1. Stufe. Und dann erst wird ausgeliefert. Und jetzt (bitte Anschnallen!) muss man entdecken, dass diese Wahrscheinlichkeit ja gegeben ist: $P_D(A) = 0,10$. (Diese Aufgabe prüft also nur das Textverständnis ab.)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein beliebiger Artikel in den Handel?

Gesucht ist jetzt die totale Wahrscheinlichkeit für A. Diese berechnen wir über das Gegenereignis, denn wir wissen ja, dass traurigerweise 40% aller Geräte nicht ausgeliefert werden: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, also 60% werden ausgeliefert.

c) Diese Lösung folgt erst im Abschnitt 6.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein in den Handel kommender Artikel defekt?

Diese Frage bezieht sich auf den Pfad $\xrightarrow[P(A)]{} \boxed{A} \xrightarrow[w]{} \boxed{D}$

Dies ist der gestürzte 1. Pfad des obigen Baumdiagramms. Er beschreibt genau wie

$\xrightarrow[0{,}3]{} \boxed{D} \xrightarrow[0{,}1]{} \boxed{A}$ die Schnittmenge $D \cap A$.

Beide Pfade haben also dieselbe Wahrscheinlichkeit:

$$\underbrace{P(A) \cdot w}_{\substack{\text{Gestürzter} \\ \text{Pfad}}} = \underbrace{0{,}3 \cdot 0{,}1}_{\substack{\text{alter} \\ \text{Pfad}}} \Rightarrow w = \frac{0{,}03}{0{,}30} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = P_A(D).$$

6 Grundaufgabe 3: Bedingte Wahrscheinlichkeit über die totale Wahrscheinlichkeit berechnen

Es folgt eine Reihe von Beispielen, in denen es erforderlich wird, Pfade zu stürzen.

Beispiel 1: Fehlersuche

Ein Gerät ist mit der Wahrscheinlichkeit 8,8% unbrauchbar. Beim Test wird ein brauchbares Gerät versehentlich mit 4% Wahrscheinlichkeit ausgesondert. Insgesamt werden 10% aller Geräte ausgesondert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein unbrauchbares Gerät ausgesondert?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesondertes Gerät unbrauchbar?

Lösung

Vorbereitung:

1. Definition von Ereignissen:

U: Das (zufällig ausgewählte) Gerät ist unbrauchbar.

B: Das Gerät ist brauchbar.

A: Das Gerät wird ausgesondert.

N: Das Gerät wird nicht ausgesondert. $(N = \overline{A})$.

2. Auswertung des Textes:

Gegeben ist**:** $P(U) = 8{,}8\% = 0{,}088$

Beim Test wird ein brauchbares Gerät versehentlich mit 4% Wahrscheinlichkeit ausgesondert.

d. h. $P_B(A) = 4\% = 0{,}04$

Gegeben ist ferner: $P(A) = 10\% = 0{,}1$

3. Herausfinden, was gesucht ist

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein unbrauchbares Gerät ausgesondert? D. h. $P_U(A)$ ist zu berechnen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesondertes Gerät unbrauchbar? D. h. $P_A(U)$ ist gefragt.

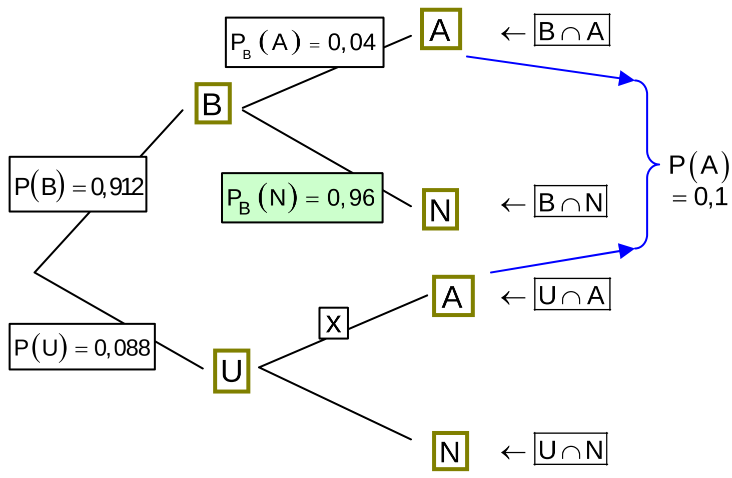
4. Lösungsstrategie finden

Da man $P(U) = 8{,}8\% = 0{,}088$ kennt, kann man $P(B) = 1 - P(U) = 1 - 0{,}088 = 0{,}912$ berechnen. Nimmt man B und U als 1. Stufe für das Baumdiagramm, dann passt $P_B(A) = 4\% = 0{,}04$ direkt als erste Wahrscheinlichkeit für die 2. Stufe dazu.
Dazu passt auch, dass $P_U(A)$ gesucht ist.

Damit ist klar, wie man den Baum erstellen muss, und man kann jetzt rechnen.

Versuche nun, das Baumdiagramm selbst zu erstellen!!!!!

In dieses Baumdiagramm wurden alle gegebenen Werte eingetragen. Dazu wurde für das grüne Feld noch eine bedingte Wahrscheinlichkeit als Gegenereignis berechnet.



Berechnung für a):

In der Frage a) ist die Wahrscheinlichkeit $x = P_U(A)$ zu berechnen.

Dies geschieht mit einem TRICK:

Die Wahrscheinlichkeit x steht im dritten Pfad. Den ersten kennt man ganz.
Der erste und der dritte Pfad ergeben zusammen die totale Wahrscheinlichkeit von A, und diese ist gegeben. Also kann man folgende Gleichung aufstellen:

Einerseits gilt: $P(A) = 0,912 \cdot 0,04 + 0,088 \cdot x$

Andererseits ist gegeben: $P(A) = 0,1$

Daraus folgt: $0,912 \cdot 0,04 + 0,088 \cdot x = 0,1$

Umstellen: $0,088 \cdot x = 0,1 - 0,912 \cdot 0,04$

$$x = \frac{0,1 - 0,912 \cdot 0,04}{0,088} = 0,7218$$

Ergebnis: $P_U(A) = 0,7218 \approx 72\%$

b) Die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_A(U)$ gehört zu einem gestürzten Pfad:

$$\xrightarrow[P(A)]{} \boxed{A} \xrightarrow[y]{} \boxed{U}.$$

Dieser stellt die Schnittmenge $A \cap U$ dar, genauso wie der Pfad $\xrightarrow[0,088]{} \boxed{U} \xrightarrow[0,7218]{} \boxed{A}$

aus dem ursprünglichen Baum.

Also gilt einerseits: $P(A \cap U) = 0,1 \cdot y$

und andererseits: $P(A \cap U) = 0,088 \cdot 0,7218$

Durch Vergleichen: $0,1 \cdot y = 0,088 \cdot 0,7218 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{0,088 \cdot 0,7218}{0,1} = 0,6352$

Man kann dazu auch die Formel von Bayes verwenden:

$$P_A(U) = \frac{P(A \cap U)}{P(A)} = \frac{0,088 \cdot 0,7218}{0,1} = 0,6352.$$

Beispiel 2: Maschine defekt (von Seite 33)

Eine Maschine stellt 30% defekte Teile her. Davon bleiben bei der Endkontrolle 10% unentdeckt.
40% aller Geräte werden nicht ausgeliefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit …

a) kommt ein defekter Artikel in den Handel?

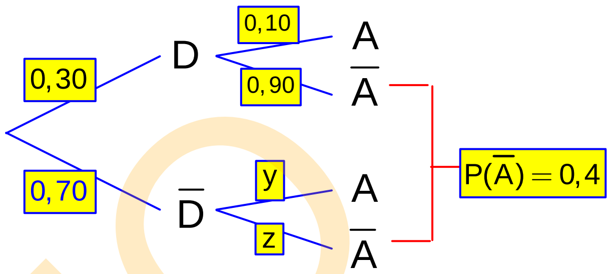
b) kommt ein beliebiger Artikel in den Handel?

c) wird ein Artikel nicht ausgeliefert, obwohl er gut ist?

d) ist ein in den Handel kommender Artikel defekt?

Lösung

Vorbereitung:



1. Definition von Ereignissen:

   D = Das Gerät ist defekt.

   A = Das Gerät wird ausgeliefert.

2. Erstellung eines Baumdiagramms:

   Aus der Fragestellung entnimmt man, dass das Ereignis D die erste Stufe bildet, es geht um defekte und nicht defekte Artikel.

3. Auswertung des Textes:

   (1) 30% sind defekt: P(D) = 0,30.

   (2) Davon bleiben 10 % unentdeckt, also werden sie verkauft!

   Das ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Artikel ausgeliefert wird ist also 0,1: $P_D(A) = 0,1$.

4. Lösung der Teilaufgaben: - Für a), b) und d) von Seite 33 ff. übernommen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein defekter Artikel in den Handel?

Hier streiten sich viele Schüler, weil sie diese Frage für eine Beschreibung der Schnittmenge $P(D \cap A)$ halten. Dann aber sollte man „defekt und ausgeliefert" sagen.
Hier ist aber gemeint: Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein Gerät in den Handel, wenn (obwohl) es defekt ist? Das ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_D(A)$.
Und jetzt (bitte Anschnallen:) muss man entdecken, dass diese Wahrscheinlichkeit ja gegeben ist: $P_D(A) = 0,10$. (Diese Aufgabe prüft also nur das Textverständnis ab.)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein beliebiger Artikel in den Handel?

Gesucht ist jetzt die totale Wahrscheinlichkeit für A. Diese berechnen wir über das Gegenereignis, denn wir wissen ja, dass traurigerweise 40% aller Geräte nicht ausgeliefert werden: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$, also 60% werden ausgeliefert.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Artikel nicht ausgeliefert, obwohl er gut ist?

Gesucht ist jetzt die bedingte Wahrscheinlichkeit $z = P_{\overline{D}}(\overline{A})$.
Sie gehört in die 2. Stufe des 4. Pfades. Da wir dessen Wahrscheinlichkeit nicht kennen, müssen wir wieder den <u>Weg über die totale Wahrscheinlichkeit</u> von $\overline{A}$ nehmen, die gegeben ist: $P(\overline{A}) = 0,4$.
Andererseits ist sie als Summe der Pfade 2 und 4 berechenbar. Daher gilt:
$P(\overline{A}) = 0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot z$
Durch Gleichsetzen erhält man eine Gleichung zur Berechnung von z:

$$0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot z = 0,4 \quad \Rightarrow \quad 0,7 \cdot z = 0,4 - 0,3 \cdot 0,9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{0,4 - 0,3 \cdot 0,9}{0,7} \approx 0,186$$

Ergebnis: Mit etwa 19% Wahrscheinlichkeit wird ein guter Artikel nicht ausgeliefert!

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein in den Handel kommender Artikel defekt?

Diese Frage bezieht sich auf den Pfad $\xrightarrow[P(A)]{} \boxed{A} \xrightarrow[w]{} \boxed{D}$

Dies ist der gestürzte 1. Pfad des obigen Baumdiagramms. Er beschreibt genau wie

$\xrightarrow[0,3]{} \boxed{D} \xrightarrow[0,1]{} \boxed{A}$ die Schnittmenge $D \cap A$.

Beide Pfade haben also dieselbe Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) \cdot w = 0,3 \cdot 0,1 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{0,03}{0,30} = \frac{1}{10} = 0,1 = P_A(D).$$

7 Bedingte Wahrscheinlichkeiten zu komplizierteren Bäumen

Aufgabe 1: Ein Gremium

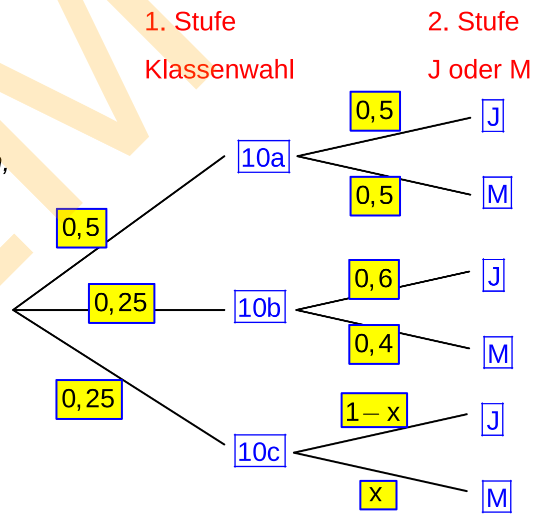
Aus den Klassen 10a, 10b und 10c wird ein Gremium gebildet, das eine bestimmte Aufgabe durchführen soll. Dabei stammen 50% der Schüler aus der Klasse 10a, und je 25% aus 10b und 10c. Unter den Schülern aus 10a sind gleich viele Jungen und Mädchen, unter den 10b-Schülern sind 40% Mädchen. Über die Zusammensetzung der Abordnung aus 10c ist nichts bekannt.
Beim ersten Treffen des Gremiums stellt man fest, dass 10% der Mädchen aus der 10c stammen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm für diese Situation.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person aus 10c ein Mädchen ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person weiblich ist?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein Junge aus der 10a, 10b bzw. 10c?
e) Wenn die Schüler der 10b wegen Verweigerung ausgeschlossen werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann ein Mädchen aus 10a bzw. 10c?

Lösung

a)

Man hätte x auch an den Jungen-Pfad schreiben können, doch beim Lesen der Aufgabe erkennt man, dass es um Mädchen geht.
Mit dieser Bezeichnung vereinfacht man die weitere Rechnung.



b) Eine weitere Angabe ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass 10 % der Mädchen aus der 10c stammen, d.h. $P_M(10c) = 0,1$. Diese Wahrscheinlichkeit gehört jedoch zum gestürzten Baum.

$$\xrightarrow[P(M)]{} \boxed{M} \xrightarrow[0,1]{} \boxed{10c}$$

Dieser Pfad beschreibt die Schnittmenge $M \cap 10c$ genauso wie der Pfad aus dem dargestellten Baum:

$$\xrightarrow[0,25]{} \boxed{10c} \xrightarrow[x]{} \boxed{M}$$

Also kann man die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Pfade gleichsetzen:

$$0,25 \cdot x = P(M) \cdot 0,1 \qquad (1)$$

Die darin enthaltene <u>totale Wahrscheinlichkeit</u> der Mädchen muss aus dem Baum berechnet werden:

$$P(M) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot x = 0,35 + 0,25 \cdot x$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man eine Berechnungsgleichung für x:

$$0,25\cdot x=\left(0,35+0,25\cdot x\right)\cdot 0,1 \qquad (2)$$
$$0,25x=0,035+0,025x \quad \left|\cdot 1000\right.$$
$$250x=35+25x$$
$$225x=35 \quad \Leftrightarrow \quad x=\tfrac{35}{225}=\tfrac{7}{45}\approx 0,1556$$

Ergebnis zu b): Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person aus 10c ein Mädchen ist, ist $\boxed{P_{10c}(M)=x=0,1556}$

Wer lieber mit der Formel von Bayes arbeitet und gestürzte Bäume als „Naturschädigung" weniger bevorzugt der geht so vor:

Lösung von b) nach dem Ansatz von Bayes:

Es gilt nach Bayes: $P_M\left(10c\right)=\dfrac{P(M\cap 10c)}{P(M)}$

Mit $P_M\left(10c\right)=0,1$ folgt: $0,1=\dfrac{P(M\cap 10c)}{P(M)}$

Ergibt: $P(M\cap 10c)=0,1\cdot P(M) \quad (3)$

Nun errechnet man die linke Seite und die rechte Seite getrennt an Hand des Baumes und erhält:

$$P(M\cap 10c)=0,25\cdot x \qquad \text{(letzter Pfad)}$$

und für die rechte Seite noch:

$$P(M)=0,5\cdot 0,5+0,25\cdot 0,4+\cdot 0,25\cdot x=0,35+0,25\cdot x$$

(totale Wahrscheinlichkeit für M)

Eingesetzt in (3) folgt dann: $0,25x=\left(0,35+0,25x\right)\cdot 0,1$

$$0,25x=0,035+0,025x \quad \left|\cdot 1000\right.$$
$$250x=35+25x$$
$$225x=35 \quad \Leftrightarrow \quad x=\tfrac{35}{225}=\tfrac{7}{45}\approx 0,1556$$

Ergebnis zu b): Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person aus der 10c ein Mädchen ist, ist $\boxed{P_{10c}(M)=x=0,1556}$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person weiblich ist, ist nichts anderes als die totale Wahrscheinlichkeit für M. Dazu verwenden wir den Ansatz aus Teilaufgabe (b). Dort erhielten wir bereits:

$$P(M)=0,5\cdot 0,5+0,25\cdot 0,4+\cdot 0,25\cdot x=0,35+0,25\cdot x$$

Mit $x=\tfrac{7}{45}$ folgt: $P(M)=0,35+0,25\cdot\tfrac{7}{45}$, also $\boxed{P\left(M\right)=0,3889}$.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein Junge aus 10a bzw. aus 10b oder aus 10c?
Dies sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_J(10a)$, $P_J(10b)$, $P_J(10c)$, die alle drei zum gestürzten Baum gehören!

(1) Wir berechnen $y = P_J(10a)$ durch einen Pfadvergleich: $\xrightarrow[0{,}5]{} \boxed{10a} \xrightarrow[0{,}5]{} \boxed{J}$ aus dem dargestellten Baum mit dem gestürzten Pfad: $\xrightarrow[P(J)]{} \boxed{J} \xrightarrow[y]{} \boxed{10a}$

Die totale Wahrscheinlichkeit für Jungs erhält man über das Gegenereignis
$P(J) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}3889$ also $\boxed{P(J) = 0{,}6111}$.

Da beide Pfade die Schnittmenge der Jungen aus der 10a darstellen, haben sie dieselbe Wahrscheinlichkeit, also gilt: $0{,}6111\,y = 0{,}25$ d.h. $P_J(10a) = y = 0{,}4091$.

(2) $P_J(10b)$ erhält man genauso, oder auch mit dem Satz von Bayes:

$$P_J(10b) = \frac{P(J \cap 10b)}{P(J)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}6}{0{,}6111} = 0{,}2455$$

(3) Und schließlich $P_J(10c)$:

$$P_J(10c) = \frac{P(J \cap 10c)}{P(J)} = \frac{0{,}25 \cdot (1 - 0{,}1556)}{0{,}6111} = 0{,}3454$$

Den letzten Wert hätte man aber auch schneller über die Gegenereignisse bekommen können, denn in 10c ist der Rest der Klassen 10:

$$P_J(10c) = 1 - P_J(10a) - P_J(10b) = 1 - 0{,}4091 - 0{,}2455 = 0{,}3454$$

e) Wenn die Schüler der 10b wegen Verweigerung ausgeschlossen werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann ein Mädchen aus 10a bzw. 10c?

Nun muss man sich zunächst klar machen, dass 10a doppelt so viele Kinder abgeordnet hatte, wie 10b und 10c. Ist 10b jetzt weg, dann ändern sich die Schülerverhältnisse.

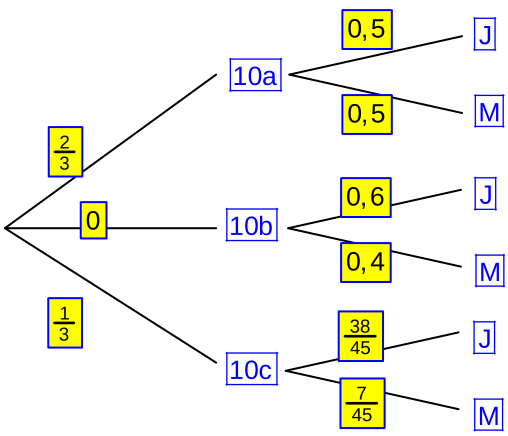
Bezeichnet man die (unbekannte) Gesamtzahl der Schüler dieser 3 Klassen mit n, dann haben die 10a $\frac{1}{2}n$ und 10b und 10c je $\frac{1}{4}n$ Schüler.
Nach Ausschluss der 10b sind also noch $\frac{3}{4}n$ Schüler vorhanden und davon also sind

$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{3}{4}n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ in 10a (also 2 von 3 Teilen) und

$\frac{\frac{1}{4}n}{\frac{3}{4}n} = \frac{1}{3}$ in 10c.

Daher gilt jetzt $P(10a) = \frac{2}{3}$ und $P(10c) = \frac{1}{3}$.

Für den Baum folgt dann:
Dabei wurde $P_{10c}(M) = x = \frac{7}{45}$
und $P_{10c}(J) = 1 - \frac{7}{45} = \frac{38}{45}$ aus (b) verwendet.



Die totale Wahrscheinlichkeit für Mädchen ist jetzt:

$$P(M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{45} = \frac{1}{3} + \frac{7}{135} = \frac{52}{135} \approx 0{,}3852$$

Die beiden gesuchten Wahrscheinlichkeiten $P_M(10a)$ und $P_M(10c)$ berechnen wir wieder mit zwei verschiedenen Methoden:

(1) $P_M(10a)$ über den Vergleich mit einem gestürzten Pfad:

$\xrightarrow[\frac{2}{3}]{} \boxed{10a} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \boxed{M}$ und andererseits $\xrightarrow[\frac{52}{235} \approx 0{,}3852]{} \boxed{M} \xrightarrow[z]{} \boxed{10a}$

Da beide Pfade dieselbe Schnittmenge (Mädchen aus 10a) darstellen, haben sie dieselbe Wahrscheinlichkeit, also gilt:

$$0{,}3852 \cdot z = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{also} \quad z = \frac{1}{3 \cdot 0{,}3852} \approx 0{,}8654 = P_M(10a)$$

(2) $P_M(10c)$ berechnen wir zur Abwechslung mit der Bayes-Formel:

$$P_M(10c) = \frac{P(M \cap 10c)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{45}}{\frac{52}{135}} = \frac{7}{52} \approx 0{,}1346$$

Im Übrigen wird man die zweite dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten am schnellsten über das Gegenereignis ermitteln:

$$P_M(10c) = 1 - P_M(10a) = 1 - 0{,}8654 = 0{,}1346.$$

Aufgabe 2: Schwarzfahrer

Ein Bus verkehrt zwischen den Haltestellen X und Y. Da viele Schwarzfahrer unterwegs sind, setzt der Busbetreiber Kontrolleure ein. Kontrolleur 1 (K1) und dann Kontrolleur 2 (K2) überprüfen die Passagiere stichprobenartig. Die Erfahrung sagt, dass unter den Schwarzfahrern 60% Jugendliche sind. Wir gehen davon aus, dass K1 60% der erwachsenen Schwarzfahrer und 40 % der jugendlichen Schwarzfahrer entdeckt, während K2 jeweils die Hälfte der erwachsenen und der jugendlichen Betrüger entdeckt.

a) Zeichne zuerst einen 3-stufigen Baum für die Schwarzfahrer und verwende folgende Ereignisse:

J: Der Schwarzfahrer ist jugendlich.

E: Der Schwarzfahrer ist erwachsen.

S: Schwarzfahrer wird vom Kontrolleur entdeckt.

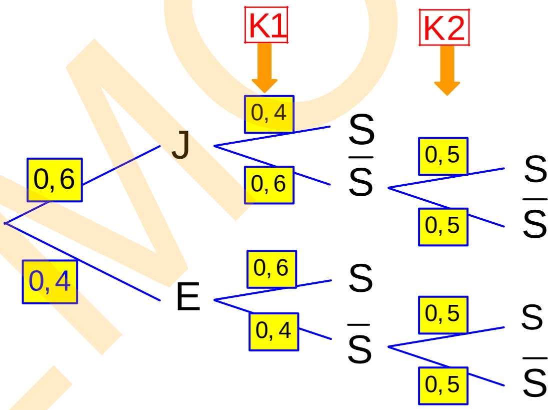
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer entdeckt wird?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein entdeckter Schwarzfahrer jugendlich?

Lösung

a)

> Ein vom Kontrolleur entdeckter Schwarzfahrer muss für teures Geld eine Karte nachlösen und ist somit von da an kein Schwarzfahrer mehr. Daher enden bei S deren Pfade.



b) Gesucht ist zuerst die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schwarzfahrer entdeckt wird. Dies ist in den vier Pfaden der Fall, die mit S enden.

$P(S) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}24 + 0{,}18 + 0{,}24 + 0{,}08 = 0{,}74$

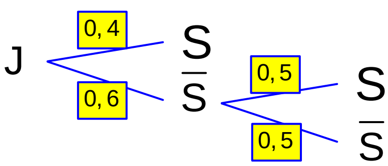
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein entdeckter Schwarzfahrer jugendlich?

Gesucht ist also $P_S(J)$.

Diese Wahrscheinlichkeit gehört zum gestürzten Pfad $\xrightarrow[0{,}74]{} \boxed{S} \xrightarrow[x]{} \boxed{J}$.

Er und der Pfad $\xrightarrow[0{,}6]{} \boxed{J} \xrightarrow[y]{} \boxed{S}$ beschreiben beide die Schnittmenge $S \cap J$,

also die entdeckten jugendlichen Schwarzfahrer.
y ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Jugendlicher als Schwarzfahrer entdeckt wird:



$$y = P_J(S) = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$$

Zur Berechnung der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeit $x = P_S(J)$ berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten beider Pfade und setzen sie gleich:

$$0{,}74 \cdot x = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0{,}42}{0{,}74} \approx \boxed{0{,}5676} = P_S(J)$$