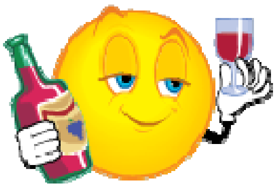
Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit

Thema:

Bedingte Wahrscheinlichkeit



Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der schon betrunken?

Datei Nr.: 32111

Friedrich Buckel

Stand 19. Januar 2019

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

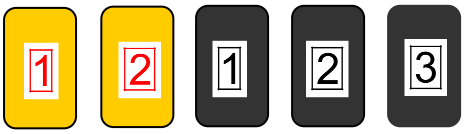
Inhalt

1	Definitionen und Hinführung	1
	Einführungsbeispiel: Karten ziehen	1
	Bedingte Wahrscheinlichkeit	1
	Totale Wahrscheinlichkeit	3
	Vierfeldertafel (Carnaugh-Diagramm)	4
	Übersicht	10
2	Zwei leichte Trainingsaufgaben	11
	Aufgabe 1: Tanzkreis	11
	Aufgabe 2: Brillenträger	11
3	**Grundaufgabe 1**: Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit	16
	Beispiel 1: Mädchen und Mathematik	16
	Satz von Bayes (1)	18
	Beispiel 2: Basketballspieler	21
	Beispiel 3: Krankenkassen	23
	Satz von Bayes (2)	25
4	Einen Baum stürzen	26
	Beispiel 1: Mädchen und Mathematik	26
	Beispiel 2: Tanzkreis	28
5	**Grundaufgabe 2**: Gestürzte Pfade berechnen	30
	Beispiel 1: Krankenkassen	30
	Beispiel 2: Maschine defekt	33
6	**Grundaufgabe 3**: Bedingte Wahrscheinlichkeit über die totale Wahrscheinlichkeit berechnen	35
	Beispiel 1: Fehlersuche	35
	Beispiel 2: Maschine defekt	37
7	Bedingte Wahrscheinlichkeiten zu komplizierteren Bäumen	39
	Beispiel 1: Ein Gremium	39
	Beispiel 2: Schwarzfahrer	43

1 Definitionen und Hinführung

Einführungsbeispiel: Karten ziehen

In einem Stapel mit Spielkarten befinden sich 2 rote und 3 schwarze Karten:

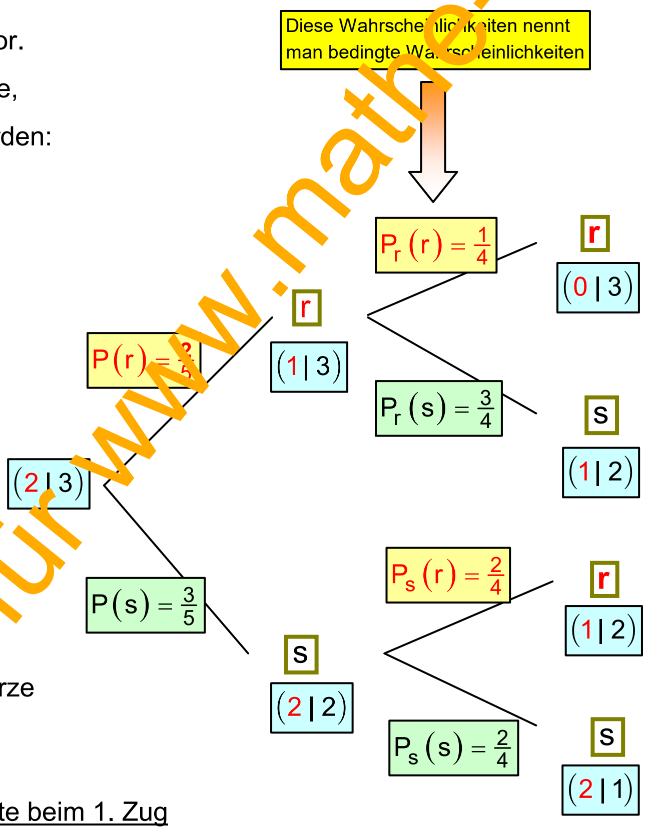


Sie liegen verdeckt im Stapel auf einem Tisch. Hans zieht eine Karte, notiert deren Farbe und legt die Karte beiseite. Dann zieht er eine zweite Karte und notiert auch deren Farbe.

Hier liegt ein zweistufiges Experiment vor.
Es hat insgesamt 4 mögliche Ergebnisse, die in der Ergebnismenge S gelistet werden:

$$S = \{\ rr\ ;\ rs\ ;\ sr\ ;\ ss\ \}$$

Jedem Ergebnis entspricht ein Pfad im gezeigten Baumdiagramm. Daran sind 6 Wahrscheinlichkeiten angeschrieben, die man durch $\boxed{p = \frac{g}{m}}$ aus dem vorhandenen Kartenbestand berechnet, der vor jedem Zug als Zahlenpaar angeschrieben ist.



$\boxed{(2\,|\,3)}$ bedeutet, dass vor dem folgenden Zug noch 2 rote und 3 schwarze Karten zur Verfügung stehen.

Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Karte beim 1. Zug ist daher $p_r = \frac{2}{5}$ und für eine schwarze beträgt sie $p_s = \frac{3}{5}$.

Statt p_r kann man auch $P(r)$ schreiben. Statt p_s ist auch $P(s)$ möglich. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten gehören zum 1. Zug, bei dem noch alle Karten im Stapel liegen, also m = 5 ist.

Beim zweiten Zug liegen veränderte Bedingungen vor, denn zuvor kann entweder schon eine rote oder eine schwarze Karte gezogen worden sein. Jeder Zug ändert den Inhalt des Kartenstapels und damit auch die daraus zu berechnende Wahrscheinlichkeit. Daher heißen die Wahrscheinlichkeiten für die 2. Stufe **bedingte Wahrscheinlichkeiten**. Dies schauen wir uns ausführlich an.

Mit P(s) bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für schwarz beim 1. Zug.

Mit $P_r(s)$ bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für schwarz <u>beim 2. Zug</u>, <u>wenn zuvor rot gezogen worden ist.</u> *(Das ist eine Vorbedingung.)*

Mit $P_s(s)$ bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für schwarz <u>beim 2. Zug</u>, <u>wenn zuvor schwarz gezogen worden ist</u>. *(Das ist die Vorbedingung.)*

Diese beiden sogenannten bedingten Wahrscheinlichkeiten liest man so:

$P_r(s) = \frac{3}{4}$ heißt „Die Wahrscheinlichkeit für schwarz unter der Bedingung, dass zuvor rot gezogen worden ist, ist $\frac{3}{4}$."

$P_s(s) = \frac{2}{4}$ liest man so: „Die Wahrscheinlichkeit für schwarz unter der Bedingung, dass zuvor schwarz gezogen worden ist, ist $\frac{2}{4}$."

Beim 1. Zug hatten wir Fünftel, weil m = 5 war, nachdem die erste Karte gezogen worden ist, sind nur noch 4 Karten auf dem Tisch, also ist m = 4 und wir erhalten Viertel, nämlich $P_r(s) = \frac{3}{4}$ (weil unter den 4 Karten noch 3 schwarze sind) und $P_s(s) = \frac{2}{4}$ (weil unter den 4 Karten noch 2 schwarze sind).

Auch für rot gibt es diese drei Wahrscheinlichkeiten, von denen hier zufällig zwei gleich groß sind:

Mit $P(r)$ bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für rot beim 1. Zug.

Mit $P_r(r)$ bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für rot beim 2. Zug, <u>wenn zuvor rot gezogen worden ist</u>.

Mit $P_s(r)$ bezeichnet man die <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit für rot beim 2. Zug, <u>wenn zuvor schwarz gezogen worden ist</u>.

Ausführliche Untersuchung der 4 Pfade des Baumdiagramms

Kennt man nun alle Wahrscheinlichkeiten für den 1. und 2. Zug, dann kann man die Wahrscheinlichkeiten für die 4 Ergebnisse (Pfade) gemäß den Pfadregeln berechnen:

1. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{2}{5}]{}\boxed{r}\xrightarrow[\frac{1}{4}]{}\boxed{r}$	$P(\{rr\}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
2. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{2}{5}]{}\boxed{r}\xrightarrow[\frac{3}{4}]{}\boxed{s}$	$P(\{rs\}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$
3. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{3}{5}]{}\boxed{s}\xrightarrow[\frac{2}{4}]{}\boxed{r}$	$P(\{sr\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$
4. Pfad:	$\xrightarrow[\frac{3}{5}]{}\boxed{s}\xrightarrow[\frac{2}{4}]{}\boxed{s}$	$P(\{ss\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$
Kontrollsumme:		$0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 = 1$

Der Begriff der totalen Wahrscheinlichkeit