Themenheft

Einführung in die Kombinatorik

Ein Hilfsmittel für die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mit wichtigen Beispielen und Übungsaufgaben

Datei Nr. 33 011

Stand 4. Juli 2016

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Inhalt

Hinweis

Die 29 Musterbeispiele dieses Textes sind als **Aufgabensammlung** zum Kopieren für den Unterricht - oder zum Wiederholen (Methoden lernen) - im Anhang 2 zusammengestellt.

Der Binomialkoeffizient wird ausführlich im Text 12106 besprochen!

1 Verteilungsverfahren - Produktregel

Die Kombinatorik ist eine Teildisziplin der Mathematik, die uns Berechnungsverfahren für Anzahlen von Möglichkeiten in vielen Situationen liefert.

Musterbeispiel 1: Wie viele Reihenfolgen des Zieleinlaufes gibt es?

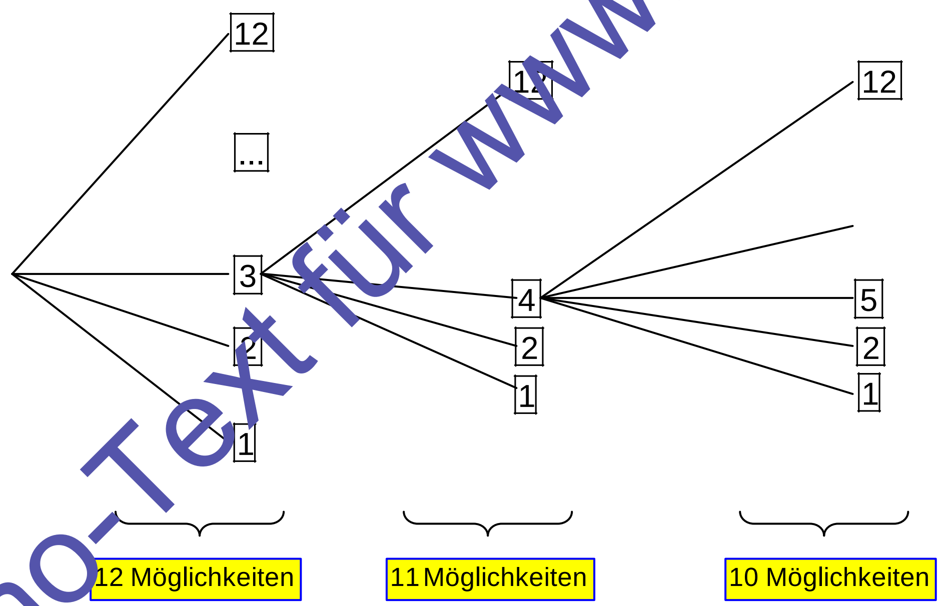
Im Sportunterricht ist der 100-m-Lauf angesagt. Wir setzen voraus, dass keine zwei der gestarteten 12 Kinder dieselbe Zeit benötigen. Klaus erhält die Aufgabe, ein Schild anzufertigen, auf dem die Namen der drei Schnellsten stehen. Wie viele Listen sind denkbar?

Er plant, im Voraus gleich alle möglichen Schilder anzufertigen, so dass er das zum tatsächlichen Laufergebnis sofort das passende parat hat.

Wir werden gleich sehen, dass er sich da zu viel vorgenommen hat.
Die Frage lautet mathematisch formuliert so:

Auf wie viele Arten kann man <u>3 aus 12</u> Elementen auswählen und der Reihe nach <u>anordnen</u>?

Jede Liste ist eine: **<u>Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung</u>**



Diese Grafik zeigt, dass (von links her) auf Platz 1 noch jedes der 12 Kinder ankommen kann, für Platz 1 gibt es somit 12 Möglichkeiten. Hat beispielsweise Klaus (3) gewonnen, bleiben für Platz 2 noch 11 Kinder (alle außer Klaus, der ja schon im Ziel ist.). Nehmen wir an, Kind 4 (Pit) erreicht den 2. Platz, dann bleiben für Platz 3 noch alle außer Klaus und Pit, das sind noch 10 Möglichkeiten.
Man kommt so auf 1320 Möglichkeiten:

$$m = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

So viele Schilder wollte Klaus im Voraus anfertigen …

Musterbeispiel 2: Der Multiple-Choice-Test.

Es gibt Tests in der Mathematik, die so angelegt sind, dass für jede Aufgabe drei oder vier Lösungen zur Auswahl vorgegeben sind. Man berechnet dann ein Ergebnis (oder rät nur) und kreuzt eine der vorgegebenen Lösungen an. Der Lehrer hat diesen Test schnell korrigiert, denn er muss nichts nachrechnen. Für den Schüler ist er jedoch nachteilig, denn es gibt dann nur noch richtig oder falsch, kein „halb richtig", weil z. B. nur ein Schreibfehler passiert ist.

Beispiel für einen solchen Test:

(1)	Berechne $24\cdot 13-12\cdot 15$	a) b) c) d)	132 142 152 136
(2)	Wie viele Teiler hat die Zahl 84?	a) b) c) d)	6 8 10 12
(3)	Welche dieser Zahlen ist 13^5?	a) b) c) d)	65 371293 28561 257824
(4)	Berechne $1+3+5+7+...+99$	a) b) c) d)	2500 2525 3500 2999
(5)	Berechne $\frac{0,24\cdot 513}{0,0081\cdot 38}$	a) b) c) d)	4 0,4 400 0,04

Es geht uns hier nicht um die Ergebnisse, die findet man übrigens auf der letzten Seite, zusammen mit einigen Tricks, wie man die Ergebnisse schnell findet, natürlich ohne Taschenrechner.

Die Aufgabe (2) heißt also:

Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es zu 5 Aufgaben je vier Möglichkeiten zum Ankreuzen. Immer nur eine Antwort ist richtig. Wie viele Möglichkeiten des Ankreuzens gibt es?

Lösung: Für jede Aufgabe haben wir 4 Auswahl-Möglichkeiten, das ergibt insgesamt

$$m = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^5 = 1024 \text{ Möglichkeiten.}$$

Hinweis:

In Beispiel 1 waren keine Wiederholungen möglich, daher hat die Anzahl der Möglichkeiten mit jeder weiteren Stufe abgenommen: $m = 12\cdot 11\cdot 10$.

In Beispiel 2 waren jedoch Wiederholungen möglich, denn man konnte mehrfach hintereinander denselben Lösungsbuchstaben (z. B. a) auswählen: $m = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4$.

Beide Anzahlen werden nach dem gleichen Prinzip berechnet, nämlich nach der

Produktregel der Kombinatorik

Wird ein Experiment in k Stufen durchgeführt,
und sind die Anzahlen der möglichen Ergebnisse
in diesen Stufen m_1, m_2, … , m_k,
dann hat das Experiment $\boxed{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$ mögliche Ergebnisse.

Wir haben bereits zwei verschiedene Formen dieser Produktregel „erlebt“:

<u>Im Beispiel 1</u> hat sich die Zahl der Möglichkeiten mit jeder Stufe um 1 reduziert. Wir hatten daher $m = 12 \cdot 11 \cdot 10$ Möglichkeiten für den Zieleinlauf von 3 von 12 Läufern.

<u>Mathematische Charakterisierung dieses Experiments:</u>

Es liegt ein geordnetes 3-stufiges Ziehen ohne Wiederholung vor.
(Geordnete Stichprobe ohne Wiederholungen)

Weil kein Läufer mehrfach ins Ziel kommen kann, reduziert sich mit jedem ankommenden Läufer die Anzahl der Möglichkeiten.

<u>Im Beispiel 2</u> waren **in jeder Stufe 4 Möglichkeiten zum Ankreuzen** da, d.h. wenn man bei der ersten Aufgabe die dritte Antwort angekreuzt hatte, dann durfte man dies bei den folgenden Aufgaben auch wieder tun.

Damit gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ Möglichkeiten.

<u>Mathematische Charakterisierung dieses Experiments:</u>

Es liegt ein geordnetes 5-stufiges Ziehen mit Wiederholung vor
(Geordnete Stichprobe mit Wiederholungen).

Man sagt „geordnet“ – weil das Ankreuzergebnis $(b\,|\,c\,|\,b\,|\,d\,|\,a)$ nicht identisch ist mit diesem: $(b\,|\,c\,|\,a\,|\,d\,|\,b)$. Die Reihenfolge ist wichtig!

Musterbeispiel 3

Ein Würfel wird 4-mal geworfen. Aus den Augenzahlen werden „Quadrupel“ gebildet.
etwa $(4\,|\,2\,|\,1\,|\,4)$. Wie viele davon gibt es?

Lösung

Bei jedem Wurf gibt es 6 Möglichkeiten, also kommen wir auf $m = 6^4 = 1296$ Quadrupel.

Auch hier sind Wiederholungen möglich. Es liegt eine **geordnete Stichprobe mit Wiederholung** vor.
Sie ist geordnet, weil z. B. diese Quadrupel als verschieden anzusehen sind:

$$(1\,|\,2\,|\,1\,|\,4) \neq (1\,|\,1\,|\,4\,|\,2)$$

Musterbeispiel 4:

a) Wie viele 4-stellige natürliche Zahlen gibt es?

b) Wie viele vierstellige Zahlen haben geradzahlige Ziffern und sind größer als 5000?

Lösung

Solche Zahlenaufgaben sind nicht einfach. Daher gebe ich hier eine gründliche Einführung in die **Lösungsmethodik.**

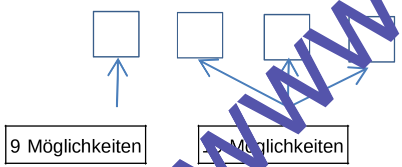
Es geht um vierstellige Zahlen. Jede solche Zahl besteht aus 4 Ziffern.

Für jede verwende ich ein Kästchen:

a) Man spielt dies so durch, wobei ich empfehle, die Belegung der Kästchen mit Ziffern rechts außen zu beginnen:

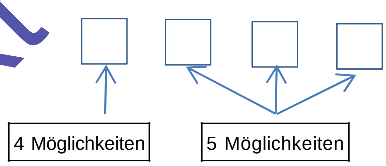
Für die Einerstelle rechts außen stehen 10 Ziffern (0 bis 9) zur Auswahl, also $m_1 = 10$ Möglichkeiten. Dasselbe gilt für die Zehnerstelle und die Hunderterstelle.

Die erste Stelle links (die Tausenderstelle) ist nur eingeschränkt belegbar, denn dort darf keine 0 stehen, weil sonst die Zahl nur dreistellig ist. Also haben wir hier nur 9 Möglichkeiten.



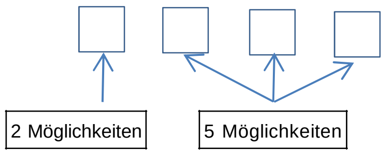
Das ergibt zusammen $\boxed{m = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000}$ Zahlen.

b) Für die Menge aller vierstelligen Zahlen mit nur **geradzahligen** Ziffern stehen nur 0, 2, 4, 6 und 8 zur Verfügung, also hat man hier diese Möglichkeiten:



Das ergibt zusammen $\boxed{m = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500}$ Zahlen.

Nun beachten wir noch die Einschränkung, dass die Zahlen größer als 5000 sein sollen. Dann kann als Tausenderziffer nur 6 und 8 gewählt werden:



Das ergibt zusammen $\boxed{m = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250}$ Zahlen.

Musterbeispiel 5 *Wie geht man mit „mindestens“ um?*

Wie viele vierstellige Zahlen mit **mindestens** 2 Vierern gibt es?

Lösung

Tipp: Das Verständnis für mindestens und das Gegenteil höchstens ist zu beachten:

Mindestens 2 heißt hier: 2, 3 oder 4.

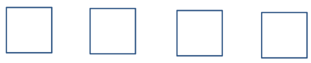
Man sollte bei einer Mindestens-Aufgabe auch das Gegenereignis betrachten:

bedeutet: 0 oder 1.

Jetzt erkennt man, dass das Gegenereignis weniger Fälle umfasst:

Untersuchung des Ereignisses: Höchstens 1 Vier in einer vierstelligen Zahl:

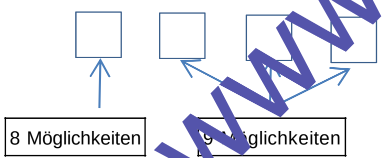
1. Fall: Eine vierstellige Zahl **ohne eine Vier** in der Zahl:



Dann können wir für die Einerziffer alles außer 4 verwenden, das sind 9 Ziffern.

Dasselbe gilt für die Zehnerziffer und die Hunderterziffer.

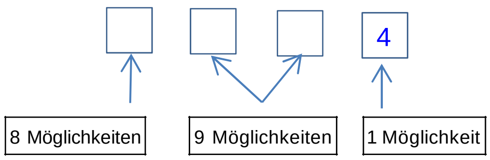
Die Tausenderziffer darf ohnehin keine 0 sein, aber jetzt auch keine 4, also stehen dort nur 8 Ziffern zur Verfügung:



Wir haben für diesen Fall $m_1 = 8\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 8\cdot 9^3 = 5832$ Zahlen.

2. Fall: Eine vierstellige Zahl mit **genau einer Vier** in der Zahl:

(1) 4 in der Einerziffer: Das bedeutet dort genau eine Möglichkeit.
für die Zehnerziffer darf man alles außer 4 verwenden, hat also 9 Möglichkeiten, dasselbe gilt für die Hunderterziffer.
In der Tausenderziffer müssen 0 und 4 wegbleiben.

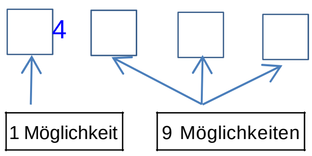


$8\cdot 9\cdot 9$ Möglichkeiten

(2) Steht die Vier in der Zehnerziffer, erhalten wir analog: $8\cdot 9\cdot 9$ Möglichkeiten

(3) Dasselbe gilt für die 4 als Hunderterziffer: $8\cdot 9\cdot 9$ Möglichkeiten

(4) Steht die 4 als Tausenderziffer da, gibt es noch $9\cdot 9\cdot 9$ Möglichkeiten



So viele vierstellige Zahlen haben also **genau eine** Vier: $\underbrace{3\cdot 8\cdot 9\cdot 9 + 9\cdot 9\cdot 9}_{=2673}$

Wir wissen also jetzt:

Es gibt 5832 vierstellige Zahlen <u>ohne eine</u> Vier.

Es gibt 2673 vierstellige Zahlen <u>mit genau einer</u> Vier.

Es gibt also 5832 + 2673 = 8505 vierstellige Zahlen <u>mit höchstens einer</u> 4.

Es gibt insgesamt 9000 vierstellige Zahlen.

Also gibt es 9000 – 8505 = 495 Zahlen <u>mit mindestens zwei</u> Vierern!

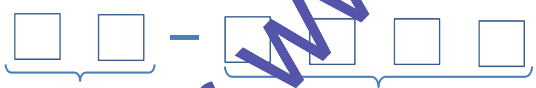
Dies sollte man gründlich üben. Im Aufgabenblatt 33020 gibt es weitere solche Aufgaben.

Musterbeispiel 6

Die Fahrzeugkennzeichen eines Landkreises bestehen (bis auf Sonderkennzeichen) aus einem oder zwei Buchstaben gefolgt von einer drei- oder vierstelligen Zahl.
Wie viele Kennzeichen gibt es, wenn man alle 26 Buchstaben zulässt?

Lösung

Beispiel-Kennzeichen: F 132 / F 1234 / ZA 132 / ZA 1234
Es gibt also 4 verschiedenen Arten zu berücksichtigen.
Wir bilden zwei Blöcke:



1. Fall: Wenn <u>nur ein Buchstabe</u> verwendet wird, gibt es dafür 26 Möglichkeiten.
In jedem Fall kann man 900 dreistellige Zahlen (siehe Beispiel 4) und 9000 vierstellige, also 9900 Zahlen dahinter verwenden.
Das sind also $26 \cdot 9900$ Kombinationen.

2. Fall: Bei <u>zwei Buchstaben</u> kommt man auf 26^2 Möglichkeiten und in jedem Fall dazu 9900 Zahlen:
Das sind also $26^2 \cdot 9900$ Kombinationen.

Gesamtzahl der Möglichkeiten:

$$m = 26 \cdot 9900 + 26^2 \cdot 9900 = \left(26 + 26^2\right) \cdot 9900 = 6.949.800$$

2. Permutationen

Unter einer Permutation versteht man eine <u>neue Anordnung</u> von Elementen

Musterbeispiel 7: Ergebnisliste

12 Kinder laufen die 100 m – Strecke in unterschiedlichen Zeiten. Ihre Namen sollen in einer Liste aufgeschrieben werden, der schnellste Schüler steht oben, der langsamste unten.
Wie viele Listen sind denkbar?

Lösung:

Hier setzen wir das Zählverfahren aus Beispiel 1 fort:

Als Sieger (Platz 1) gibt es 12 Möglichkeiten,
für den 2. Platz noch 11.

So machen wir weiter, bis am Ende noch einer übrig bleibt, es war unser langsamster.

Die Anzahl aller Möglichkeiten beträgt demnach $m = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 4{,}79 \cdot 10^8$

Hinweis:

Man kürzt solche Produkte (die bis zum Faktor 1 gehen) mit einem

Ausrufezeichen ab: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{12!}$

Man liest dies „12 Fakultät“.

Merke: n verschiedene Elemente lassen sich auf n! Arten anordnen.

Beispiel 8: Kinobesuch - Platzverteilung

a) 7 Personen kommen ins Kino und finden in Reihe 12 nur noch genau 7 freie Plätze vor.
Auf wie viele Arten können sie sich hinsetzen?

b) Wenn jedoch für diese 7 Personen noch 9 Plätze frei sind, dann gibt es mehr Möglichkeiten.

c) Was tut man, wenn für diese nur noch 5 freie Plätze vorhanden sind?

Lösung

a) 7 Plätze kann man auf $m = 7! = 5040$ Arten belegen.

b) Bei 9 Plätzen hat die erste Person noch 9 zur Auswahl, die zweite noch 8, die dritte noch 7, die vierte noch 6, die fünfte noch 5, die sechste noch 4 und die 7. noch 3.

$$m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181.440$$

c) ACHTUNG: Weil es jetzt weniger Stühle als Personen gibt, kehrt man die Zuordnungen um:
Der erste Stuhl hat 7 Möglichkeiten der Belegung, der zweite 6, ... der 5. noch 3 usw.
Wir erhalten $m = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ Möglichkeiten.
(Hier kann man so anfangen: Die erste Person hat …. – Vielleicht muss sie ja stehen bleiben!)

Musterbeispiel 9: Lottozahlen – zwei verschiedene Aktionen

Zuerst betrachten wir den **Ziehungsvorgang.**

Bei jeder Ziehung ist eine Reihenfolge im Spiel. Beim Lotto 6 aus 49 werden 6 Zahlen aus 49 gezogen. Beispielsweise sieht eine Ziehung so aus: $13 \to 28 \to 9 \to 41 \to 19 \to 3$.

Eine andere Ziehung ergibt: $3 \to 13 \to 28 \to 19 \to 41 \to 9$.

Das sind verschiedene Ziehungen, aber weil am Ende die Ziehungsreihenfolge ignoriert wird, ergeben beide Ziehungen dasselbe **Ziehungsergebnis.** Dieses ist nämlich ungeordnet. (wobei man allerdings die Zahlen der Größe nach geordnet präsentiert.)

Wie viele Ziehungsvorgänge gibt es?

Für die 1. Zahl hat man 49 Zahlen zur Verfügung, für die zweite noch 48, für die 6. noch 44. (Diese **6. Zahl** kann man so berechnen: 49 – 6 +1 = 44). Also gibt es $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ verschiedene Ziehungsmöglichkeiten. Achtung: Verschiedene Ziehungsreihenfolgen können zum gleichen Ziehungsergebnis führen!

Wie viele Ziehungsergebnisse gibt es?

Dafür spielt die Reihenfolge der Ziehung keine Rolle. Man kann 6 Zahlen auf $6! = 720$ Arten (Reihenfolgen) ziehen. Also sind stets **720 Ziehungsmöglichkeiten** **1 Ziehungsergebnis.**

Es gibt also $\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{720} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816$ verschiedene Ergebnisse. Diesen Bruch nennt man Binomialkoeffizient und schreibt dafür $\binom{49}{6}$. (Seite 27).

Oder anders gesagt: Es gibt fast 14 Millionen Möglichkeiten, in einem 49-er Lottofeld 6 Zahlen anzukreuzen (denn nach dem Ausfüllen erkennt man nicht mehr, in welcher Reihenfolge man angekreuzt hat.)

Musterbeispiel 10: Bücher aufstellen – viele Varianten!

Achtung: Die Permutationsberechnung setzt voraus, dass die anzuordnenden Elemente **unterscheidbar** sind.

a) Wenn man 8 verschiedene Bücher ins Regal stellt, dann gibt es $8! = 40320$ Möglichkeiten. Handelt es sich aber um 8 identische Bücher, dann gibt es nur eine Art der Aufstellung, denn man erkennt ja nach kurzem Wegsehen gar nicht, ob inzwischen jemand einige Bücher vertauscht hat!

b) Wie sieht dies nun aus, wenn unter diesen 8 Büchern genau 2 gleiche sind?

Dann arbeiten wir mit einem Trick: Wir geben den beiden gleichen Büchern zunächst die Nummern 1 und 2. Jetzt hat man 8 unterscheidbare Bücher mit $8! = 40320$ Möglichkeiten der Anordnung. Nehmen wir anschließend die Nummern wieder ab, kann man die beiden gleichen Bücher vertauschen, ohne dass es auffällt. Also muss man die Anzahl durch 2 dividieren:

$$m = \frac{8!}{2} = 20160 \text{ Möglichkeiten.}$$

c) Nun ordnen wir 8 Bücher an, unter denen sich <u>3 gleiche</u> befinden:

Wir versehen die gleichen *zunächst* wieder mit den Nummern 1, 2 und 3, so dass alle 8 Bücher unterscheidbar sind. Sie lassen sich dann auf $8! = 40320$ Arten anordnen. Die drei gleichen kann man in jeder Anordnung auf $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten vertauschen, ohne dass es auffällt. Also bleibt von unseren 40320 nur ein Sechstel übrig:

$$m = \frac{8!}{3!} = 6720 \text{ Möglichkeiten.}$$

d) Nun wollen wir 7 Bücher anordnen, unter denen 3 neue nicht unterscheidbare Bücher stehen, nämlich die drei Formelsammlungen E: A – B - C – D – E – E – E.
Auf wie viele Arten kann man diese 7 Bücher anordnen?

Wir machen zuerst die drei Formelsammlungen mit Aufklebern E_1, E_2, E_3 unterscheidbar. Jetzt haben wir 7 verschiedene Bücher. Damit gibt es 7! = 5040 mögliche Reihenfolgen.
Schauen wir uns eine ganz spezielle davon an:

	A - E_1 - B - E_2 - E_3 - D - C.	(1)
Oder diese:	A - E_1 - B - E_3 - E_2 - D - C.	(2)
Oder diese:	A - E_2 - B - E_1 - E_3 - D - C.	(3)
Oder diese:	A - E_2 - B - E_3 - E_1 - D - C.	(4)
Oder diese:	A - E_3 - B - E_1 - E_2 - D - C.	(5)
Oder diese:	A - E_3 - B - E_2 - E_1 - D - C.	(6)

Wären da nicht diese drei Aufkleber auf den Formelsammlungen, würde jeder sagen, dass es sich sechsmal um dieselbe Anordnung handelt. Die 6 Permutationen der Bücher E_1, E_2 und E_3 fallen also nicht auf. Dies gilt natürlich für jede andere Konstellation der Bücher auf. Nun wird klar, dass es zu jeder möglichen Aufstellung unserer 7 Bücher immer 3! = 6 Permutationen gibt, die aber ohne Aufkleber identisch sind. Also reduziert sich die Anzahl der möglichen Aufstellungen immer auf ein Sechstel, also auf $m = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{6} = 840$ Möglichkeiten

e) Entfernt man in d) von D die Buchhülle, entdeckt man, dass die Bücher A und D ebenfalls gleich sind. Auf wie viele Arten kann man dann diese 7 Bücher anordnen?

Lösung: $$m = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

f) Wir haben 3 Bücher „Harry Potter Band 3“, 2 von „Harry Potter Band 4“ und 4 von „Harry Potter 5“. Auf wie viele Arten lassen sich diese anordnen?

Lösung:

Insgesamt sind das 9 Bücher, die sich (unterscheidbar gemacht) auf 9! Arten anordnen lassen. Da aber 3 Bände „HP3“ identisch sind, stellen deren 3! = 6 Permutationen dieselbe Anordnung dar. Da weiter 2 Bände „HP4“ gleich sind, ist davon die Hälfte identisch. Und die 4 „HP5“-Bücher lassen sich auf $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Arten ohne aufzufallen vertauschen. Daher gibt es

$$m = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{6} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{24}} = 1260$$

g) Im Regal des Lehrmittelraumes der Schule stehen 24 übrig gebliebene Bücher der Jahrgangsstufe 10. Darunter sind 3 gleiche Physikbücher, 5 gleiche Deutschbücher, 4 gleiche Englischbücher, 6 gleiche Mathebücher und 6 gleiche Formelsammlungen.
Auf wie viele Arten kann man sie nebeneinander ins Regal aufstellen?

Lösung

$$m = \frac{24!}{3!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 6!\cdot 6!} = 6{,}9262\cdot 10^{13}$$

h) Der für die Bücherei zuständige Lehrer ordnet die Bücher so an, dass immer die gleichen nebeneinander stehen, etwa so: | PPP | DDDDD | EEEE | MMMMMM | FFFFFF |

Oder so: | DDDDD | EEEE | MMMMMM | PPP | FFFFFF | usw.

Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

Lösung:

Jetzt muss man erkennen, dass lediglich 5 Gruppen von Büchern anzuordnen sind:
Es sind die Gruppen der D-Bücher, der E-Bücher, der F-Bücher, der M-Bücher und der P-Bücher. Dies geht auf 5! = 120 Arten.

Musterbeispiel 11

Wie viele „Wörter“ lassen sich durch Permutation aus dem Wort „Essenmasse“ bilden?

Lösung:

Die Antwort lautet $m = \frac{10!}{3!\cdot 4!} = 25200$

Ein solches „Wort wäre z.B. „Ssssnmeaee“

Guten Appetit !

3. Training: *Rechnen mit Fakultäten*

(1) **Definition**

Für jede natürliche Zahl soll gelten $\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$

Für spätere Zwecke legt man zusätzlich fest, dass gelten soll: $\boxed{0! = 1}$

Den Sinn dieser Maßnahme erkennen wir erst später.

(2) **Beispiele**

$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \quad \text{usw.}$$

Bis 6! sollte man die Fakultäten auswendig wissen, um schneller rechnen zu können.
Die Fakultäten wachsen sehr schnell an, was man an folgenden Zahlen sieht:

$$10! = 3.628.800$$
$$20! = 2{,}4329 \cdot 10^{18}$$
$$69! = 1{,}7112 \cdot 10^{98}$$

$70! > 10^{100}$ wird von vielen Taschenrechnern nicht mehr angezeigt.

(3) **Rechengesetze und Rechenhilfen für Fakultäten**

Wenn man wie oben Fakultäten der Reihe nach berechnet, dann fällt einem schnell dies auf:

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$$

Oder $18! = 18 \cdot \underbrace{17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{17!} = 18 \cdot 17!$

Oder gar dieses: $18! = 18 \cdot 17 \cdot \underbrace{16 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{16!} = 18 \cdot 17 \cdot 16!$

Oder $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!$

Merke:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \quad \text{usw.}$$

(4) Kürzen in Brüchen aus Fakultäten

Folgende Rechnung **ist falsch**: $\frac{8!}{4!} = 2!$

denn **so wird hier gekürzt:**: $\boxed{\frac{8!}{4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}$!!!

Betrachte die folgenden Rechnungen:

$$\frac{12!}{10!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10!}{10!} = 12\cdot 11 = 132$$

$$\frac{20!}{16!\cdot 4!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}\cdot 4!}$$ Dann kann man noch durch 4 und durch 6 kürzen:

$$= \frac{\cancel{20}^{5}\cdot 19\cdot \cancel{18}^{3}\cdot 17}{\cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1} = 19\cdot 17\cdot 15 = 4845$$

$$\frac{4!\cdot 4!}{8!} = \frac{4!\cdot \cancel{4!}}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}$$ Dann kann man noch durch 4 und 6 kürzen:

$$= \frac{\cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{8}_2\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5} = \frac{1}{70}$$

(5) Erweitern von Produkten zu Brüchen aus Fakultäten

Die ist ein toller Trick, mit dem man Berechnungen abkürzen kann:

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \boxed{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\boxed{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{10!}{5!}$$

Erklärung:

Hier wurde aus dem Produkt $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ durch die Erweiterung mit $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ein Bruch, dessen Zähler jetzt 10! ist, und dessen Nenner 5! ist. Zählen wir nach:

Die Berechnung von $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ erfordert insgesamt 11-mal Eintippen in den Taschenrechner (Alle Ziffern, Malzeichen und = oder EXE für das Ergebnis).

Dagegen erledigt man das mit dem Bruch durch 7 Eingaben. Das wird noch krasser bei dieser

Aufgabe: $49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44 = \frac{49!}{43!}$

mit 18 gegenüber 8 Eingaben.

Man kann sich diesen **Erweiterungstrick** leicht merken:

Das Produkt $n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot k$ wird mit (k - 1)! erweitert, also mit der Fakultät der nächst kleineren Zahl: $\boxed{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot k = \frac{n!}{(k-1)!}}$

4. Übersicht über die Möglichkeiten, eine Auswahl zu treffen

Wusstest Du schon:

Es gibt 4 verschiedene Arten, k Elemente aus n Elementen auszuwählen:

Man kann die Reihenfolge der Ziehungen beachten oder auch nicht – und man kann Wiederholungen zulassen oder auch nicht (was dem Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen entspricht.)

1. Art:	**Mit Beachtung der Reihenfolge (= Variation)**	**mit Wiederholungen**
2. Art:	**Mit Beachtung der Reihenfolge (= Variation)**	**ohne Wiederholungen**
3. Art:	**Ohne Beachtung der Reihenfolge (= Kombination)**	**mit Wiederholungen**
4. Art:	**Ohne Beachtung der Reihenfolge (= Kombination)**	**ohne Wiederholungen**

Beispiel 1: **2 Elemente aus 3 Elementen.**
Die Grundmenge sei G, die Ergebnismenge nenne ich S:

Wenn Wiederholungen vorkommen, sind die Paare $(1|1)$, $(2|2)$ und $(3|3)$ vorhanden.

Spielt die Reihenfolge eine Rolle, dann stellen die Paare $(1|2)$ und $(2|1)$ verschiedene Ergebnisse dar, spiele sie keine Rolle, werden sie identifiziert:

$$G = \{1;2;3\}$$

Variationen:

Auswahl unter Beachtung der Reihenfolge
Geordnete Stichpobe mit Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix}(1|1);(1|2);(1|3)\\(2|1);(2|2);(2|3)\\(3|1);(3|2);(3|3)\end{matrix}\right\}$$

$m = 3^2 = 9$

Zahlenpaare

1. Art

Auswahl unter Beachtung der Reihenfolge
Geordnete Stichpobe ohne Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix}\cancel{(1|1)};(1|2);(1|3)\\(2|1);\cancel{(2|2)};(2|3)\\(3|1);(3|2);\cancel{(3|3)}\end{matrix}\right\}$$

$m = 3 \cdot 2 = 6$

2. Art

Kombinationen

Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge
Ungeordnete Stichpobe mit Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix}(1|1);(1|2);(1|3)\\(2|2);(2|3)\\(3|3)\end{matrix}\right\}$$

$m = 6$

3. Art

Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge
Ungeordnete Stichpobe ohne Wiederholung

$$S = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\}$$

$m = 3$

Zweiermengen

4. Art

Beispiel 2: **2 Elemente aus 4 Elementen.**
Die Grundmenge sei G, die Ergebnismenge sei S:

$$G = \{1;2;3;4\}$$

Variationen:

Auswahl unter Beachtung der Reihenfolge
Geordnete Stichpobe mit Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix} (1|1);(1|2);(1|3);(1|4) \\ (2|1);(2|2);(2|3);(2|4) \\ (3|1);(3|2);(3|3);(3|4) \\ (4|1);(4|2);(4|3);(4|4) \end{matrix}\right\}$$

$$\mathbf{m = 4^2 = 16}$$

Zahlenpaare

1. Art

Auswahl unter Beachtung der Reihenfolge
Geordnete Stichpobe ohne Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix} & (1|2);(1|3);(1|4) \\ (2|1); & (2|3);(2|4) \\ (3|1);(3|2); & (3|4) \\ (4|1);(4|2);(4|3) & \end{matrix}\right\}$$

$$\mathbf{m = 4 \cdot 3 = 12}$$

2. Art

Kombinationen

Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge
Ungeordnete Stichpobe mit Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix} (1|1);(1|2);(1|3);(1|4) \\ (2|2);(2|3);(2|4) \\ (3|3);(3|4) \\ (4|4) \end{matrix}\right\}$$

$$\mathbf{m = 10}$$

3. Art

Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge
Ungeordnete Stichpobe ohne Wiederholung

$$S = \left\{\begin{matrix} \{1;2\};\{1;3\};\{1;4\} \\ \{2;3\};\{2;4\} \\ \{3;4\} \end{matrix}\right\}$$

$$\mathbf{m = 6}$$

Zweiermengen

4. Art

Beispiel 3: **3 Elemente aus 4 Elementen.**
Die Grundmenge sei G, die Ergebnismenge sei S:

$$G = \{1;2;3;4\}$$

Variationen:

Auswahl unter Beachtung der Reihenfolge
Geordnete Stichpobe mit Wiederholung

$$S = \begin{Bmatrix} (1|1|1);(1|1|2);(1|1|3);(1|1|4) \\ (1|2|1);(1|2|2);(1|2|3);(1|2|4) \\ \ldots \\ (3|1|1);(3|1|2);(3|1|3);(3|1|4) \\ \ldots \\ (4|4|1);(4|4|2);(4|4|3);(4|4|4) \end{Bmatrix}$$

$m = 4^3 = 64$
Tripel

1. Art

Auswahl unter Beachtung der Reihenfolge
Geordnete Stichpobe ohne Wiederholung

$$S = \begin{Bmatrix} \cancel{(1|1|1)};\cancel{(1|1|2)};\cancel{(1|1|3)};\cancel{(1|1|4)} \\ \cancel{(1|2|1)};\cancel{(1|2|2)};(1|2|3);(1|2|4) \\ \ldots \\ \cancel{(3|1|1)};(3|1|2);\cancel{(3|1|3)};(3|1|4) \\ \ldots \\ \cancel{(4|4|1)};\cancel{(4|4|2)};\cancel{(4|4|3)};\cancel{(4|4|4)} \end{Bmatrix}$$

$m = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

2. Art

Kombinationen

Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge
Ungeordnete Stichpobe mit Wiederholung

$$S = \begin{Bmatrix} (1|1|1);(1|1|2);(1|1|3);(1|1|4) \\ (1|2|2);(1|2|3);(1|2|4) \\ \ldots \\ (4|4|4) \end{Bmatrix}$$

$m = 20$

3. Art

Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge
Ungeordnete Stichpobe ohne Wiederholung

$$S = \begin{Bmatrix} \{1;2;3\};\{1;2;4\};\{1;3;4\} \\ \{2;3;4\} \end{Bmatrix}$$

$m = 4$
Dreiermengen

4. Art

Im 2. Fall wurden alle die Tripel durchgestrichen, die eine Zahl doppelt oder gar dreifach enthalten, es bleiben diese 24 Tripel übrig:

$$\begin{array}{l} \{(1|2|3),(1|2|4),(1|3|2),(1|3|4),(1|4|2),(1|4|3), \\ (2|1|3),(2|1|4),(2|3|1),(2|3|4),(2|4|1),(2|4|3), \\ (3|1|2),(3|1|24),(3|2|1),(3|2|4),(3|4|1),(3|4|2), \\ (4|1|2),(4|1|3),(4|2|1),(4|2|3),(4|3|1),(4|3|2)\} \end{array}$$

Ich empfehle, dies einmal ganz alleine aufzuschreiben. Das ist nicht einfach.

Allgemein: Auswahl von k Elementen aus n Elementen

$$G = \{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n\}$$

Variationen:

1. Art

Auswahl
unter Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholungen

Geordnete Stichprobe mit Wiederholung

$m = n^k$

n – Tupel

2. Art

Auswahl
unter Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholungen

Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung

$m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

k – Permutationen

Kombinationen

4. Art

Auswahl
ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholungen

Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung

$m = \binom{n+k-1}{k}$

k - Kombination

3. Art

Auswahl
ohne Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholungen

Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung

$m = \binom{n}{k}$

k – Mengen

Platzauswahl

Diese 4 Arten werden im Folgenden ausführlich besprochen.

4.1 Die 1. Art: Auswahl von k-Tupeln
Geordnete Stichprobe (Variation) mit Wiederholung

Unter k-Tupeln versteht man Paare, Tripel, Quadrupel (4-Tupel), Quintupel (5-Tupel) usw.

Hier betrachten wir den **ersten Fall** unserer vier Auswahlbeispiele.

Musterbeispiel 12

Aus einem Behälter, der nummerierte Kugeln (0 bis 9) enthält, wird dreimal eine Kugel gezogen und sofort wieder zurückgelegt. Die gezogene Nummer notieren wir. Also spielt die Reihenfolge eine Rolle, man spricht von einer **geordneten Stichprobe**, was man auch eine **VARIATION** nennt. Wegen des Zurücklegens, kann jede Zahl nochmals gezogen werden, also handelt es sich um eine Stichprobe **mit Wiederholungen**. Auf diese Weise entstehen Tripel (die auch eine Null an vorderster Stelle haben dürfen) wie 137, 173, 028, 449, 001, usw. Für jeden Zug haben wir 10 Möglichkeiten, da wir nach jedem Zug zurücklegen. Daher gibt es $m = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ Möglichkeiten.

Musterbeispiel 13

Unter 178 Schülern werden 5 Bücher verlost. Jeder hat dabei auch die Chance, mehr als nur einmal zu gewinnen. Da die Zahl der Bücher kleiner ist als die der Schüler muss man den Büchern die Schüler zuordnen: Für jedes Buch haben wir 178 Schüler-Möglichkeiten.

Insgesamt: $m = 178^5 = 1{,}7869 \cdot 10^{11}$, das sind etwa 179 Milliarden.

Jede Auslosung erzeugt ein 5-Tupel (Quintupel), also eine Anordnung von 5 Namen.
Und wieder handelt es sich um eine **geordnete Stichprobe mit Wiederholung**.

Musterbeispiel 14

Ein Schimpanse sitzt an einer Spezial-Schreibmaschine mit 25 Buchstaben und tippt wahllos darauf herum. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt er das Wort STOCHASTIK, wenn er genau 10-mal auf die Tasten drückt?

Die Wahrscheinlichkeit berechnet man durch $p = \frac{g}{m}$.

Es gibt genau einen günstigen Fall, nämlich das Wort STOCHASTIK: g = 1

Es gibt insgesamt $m = 25^{10} = 9{,}5467 \cdot 10^{13}$ Möglichkeiten.

Es folgt: $$p = \frac{1}{25^{10}} = 1{,}05 \cdot 10^{-14} \approx 0 \quad !$$

Merke: Geordnete Stichproben mit Wiederholung:

Erstellt man eine Stichprobe aus k Elementen, die aus n Elementen ausgewählt werden, bei der die Reihenfolge der Ziehung wichtig ist und Wiederholungen auftreten können (etwa weil nach jedem Zug zurückgelegt wird), dann gibt es dazu $m = n^k$ Möglichkeiten. Es entstehen dann k-Tupel

Musterbeispiel 15

7 zufällig ausgewählte Schüler werden nach dem Wochentag ihrer Geburt befragt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle 7 an verschiedenen Wochentagen zur Welt gekommen?

Lösung:

Wir müssen wieder die Formel $\boxed{P(E)=\frac{g}{m}}$ heranziehen.

Im Zähler stehen die für das Ereignis E <u>günstigen Fälle</u>, also die Anzahl der Möglichkeiten dafür, dass 7 Kinder an 7 verschiedenen Wochentagen geboren worden sind (Permutation!):

$g = 7!$ ist die Zahl der Möglichkeiten, 7 Kinder auf 7 Tage zu verteilen.

Im Nenner müssen wir <u>alle Möglichkeiten</u> in Betracht ziehen. Das erste Kind kann an einem von 7 Wochentagen geboren worden sein, das zweite auch usw. also $m = 7^7$.

Folglich: $\boxed{P(E)=\frac{g}{m}=\frac{7!}{7^7}=0{,}0061198}$

Musterbeispiel 16

Ein Computer gibt eine vierstellige Zufallszahl aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält diese mindestens eine Vier?

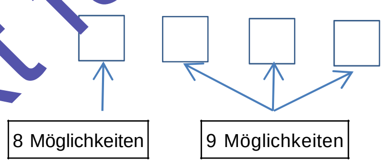
Lösung: (Hierzu beachte man das Musterbeispiel 5 auf Seite 7!)

Wir arbeiten mit der Formel $\boxed{P(E)=\frac{g}{m}}$.

m = Anzahl <u>aller möglichen</u> vierstelligen Zahlen: $m = 9\cdot 10^3 = 9000$

g = Anzahl der vierstelligen Zahlen, mit <u>mindestens einer</u> Vier?

Wir betrachten das Gegenereignis, es heißt: Es kommt <u>keine Vier</u> vor.



(Für die Einerziffer hat man 9 Möglichkeiten, für die Zehner- und Hunderterziffer auch, für die Tausenderziffer nur 8, da die 0 dort nicht zugelassen ist:) $\overline{g} = 8\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 5832$

Also gibt es $g = 9000 - 5832 = 3168$ Zahlen, die mindestens eine Ziffer 4 enthalten.

Folglich erhält man: $\boxed{P(E)=\frac{g}{m}=\frac{3168}{9000}\approx 0{,}352}$

4.2. Die 2. Art - k-Permutationen

Geordnete Stichproben ohne Wiederholung

Das **Beispiel 1** der möglichen Zieleinläufe der drei besten einer Schülergruppe zeigte eine **Dreier-Permutation**:

> **Es wurden 3 Kinder aus 12 ausgewählt und alle möglichen Reihenfolgen zugelassen. Wiederholungen gibt es dabei keine.**

Man denke „experimentell", spiele also das Ergebnis etwa so durch:

Für den ersten Sieger kamen daher 12 Schüler in Frage,
für den Zweiten noch 11
und für den Dritten 10.

Man erhält $m = 12 \cdot 11 \cdot 10$
Dreier-Permutationen.

WISSEN: Bei solchen k-Permutationen ist die Reihenfolge wichtig.

Denn wenn man weiß, dass Franz, Klaus, Johanna auf dem Siegerpodest standen, dann könnten sie auf 6 Arten ins Ziel eingelaufen sein:

Franz, Klaus, Johanna
Franz, Johanna, Klaus
Klaus, Johanna, Franz
Klaus, Franz, Johanna
Johanna, Klaus, Franz
Johanna, Franz, Klaus.

Warum ist die Berechnung $m = 12 \cdot 12 \cdot 12$ falsch?
Weil es dann für den 2. und 3. Platz denselben Schüler hätte geben können, wie für den ersten.
Aber Wiederholungen sind hier gar nicht möglich. Also können die Faktoren nicht gleich sein.

Musterbeispiel 17

Bei einem Autorennen der „Formel 1" starten 23 nummerierte Rennautos. Auf Grund mehrerer Unfälle bzw. Motorschäden fallen 13 Fahrzeuge aus. Es kommen also letztlich nur 10 Fahrzeuge ins Ziel. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

Lösung Jetzt geht es um sogenannte 10-Permutationen.

Die Reihenfolge ist unbedingt wichtig, aber Wiederholungen sind nicht möglich:

$$m = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 14 \approx 4{,}15 \cdot 10^{12}$$

Wichtiger Hinweis:

Bei dieser Lösung tauchen zwei Probleme auf:

(1) Wie kommt man schnell auf den letzten Faktor 14?

(2) Wie kann man dieses Produkt aus 10 Faktoren schnell in einen Taschenrechner eintippen?

Es gibt zwei mathematische Tricks, diese beiden Probleme in den Griff zu bekommen.

Schauen wir sie uns jetzt an:

1. Hilfe: Ermittlung des letzten Faktors bei einer k-Permutation aus n Elementen:

Beobachtung: Die Anzahl der Möglichkeiten hat eine Differenz zu 23, die immer um 1 kleiner ist als die Platznummer des einlaufenden Fahrzeugs.

Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten bei

2 Fahrzeugen: $m = 23 \cdot \boxed{22}$ (22 ergibt sich als 23 – 1)

3 Fahrzeugen: $m = 23 \cdot 22 \cdot \boxed{21}$ (21 ergibt sich als 23 – 2)

4 Fahrzeugen: $m = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \boxed{20}$ (20 ergibt sich als 23 – 3)

Beobachtung: Bei $\boxed{3}$ Fahrzeugen berechnet man den letzten Faktor so: $23 - \boxed{3} + 1$
Bei $\boxed{4}$ Fahrzeugen berechnet man den letzten Faktor so: $23 - \boxed{4} + 1$
Bei $\boxed{10}$ Fahrzeugen berechnet man den letzten Faktor so: $23 - \boxed{10} + 1 = 14$

Allgemein: Bei $\boxed{k}$ Fahrzeugen berechnet man den letzten Faktor so: $n - \boxed{k} + 1$

Merke: Es gibt $m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ geordnete Stichproben ohne Wiederholung.

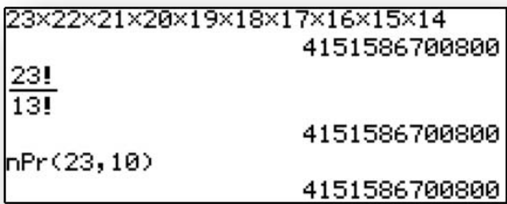
2. Hilfe: Taschenrechnereingabe der Formel $m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$:

1. Der Fakultätenbruch:

Das Produkt $m = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 14$ erweitert man mit 13! zu einem Fakultätenbruch:

$$23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 14 = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot \boxed{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\boxed{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{23!}{13!}$$

Der folgende Screenshot von CASIO ClassPad zeigt zuerst die umständliche Berechnung und dann die Berechnung mit dem Fakultätenbruch.

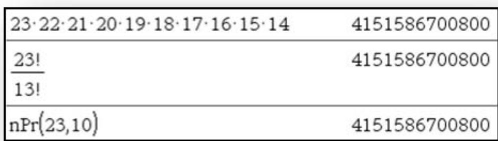


2. Spezialbefehl:

Viele Rechner haben für solche Produkte bzw. Fakultätenbrüche einen eigenen Rechenbefehl. Dieser heißt nPr(n,k).

Die Aufgabe, die Anzahl der 10er-Permutationen aus 23 Autos zu berechnen, wird dann so gelöst, wie es die letzte Zeile des Screenshots zeigt.

Und hier der Screenshot bei TI Nspire:



Man findet die Befehle Fakultät und nPr

(1) bei CASIO ClassPad in der **Softtastatur** unter $\boxed{\text{mth}} \to \boxed{\text{CALC}}$

(2) bei TI Nspire CAS im **Menü Wahrscheinlichkeit**.

Musterbeispiel 18

Die Klassenstufe 12 eines Gymnasiums hat 58 Kinder. 30 von ihnen können sich in eine Aushangliste (für eine Veranstaltung) eintragen. Wie viele Listen sind möglich

a) wenn man die Reihenfolge der Einträge beachtet

b) wenn diese Reihenfolge keine Rolle spielt.

Lösung

a) Hier liegt einer 30er-Permutation vor. Es gibt also $m = 58 \cdot 57 \cdot \ldots \cdot \underbrace{(58-30+1)}_{29}$ Möglichkeiten.

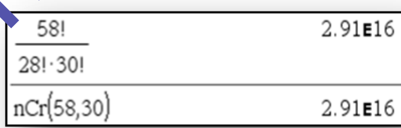
Zur Verwendung des Fakultätenbruchs erweitert man mit 28!

und erhält dann $m = 58 \cdot 57 \cdot \ldots \cdot 29 = \dfrac{58!}{28!} = \text{nPr}(58,30)$

Achtung: *Darunter sind also auch Listen mit gleichen Namen, nur in anderer Reihenfolge!*

b) Diese 30 Namen kann man auf 30! Arten durchmischen. Wenn also die Reihenfolge keine Rolle spielt, sind immer 30! Listen (die sich zuvor durch die Reihenfolge unterschieden haben) identisch. Die Anzahl der dann relevanten Listen wird dadurch auf ein „Dreißig-Fakultät-stel“ reduziert auf

$$m = \frac{58 \cdot 57 \cdot \ldots \cdot 29}{30!} = \frac{58!}{28! \cdot 30!} = \text{nCr}(58,30)$$



Musterbeispiel 19 Noch einmal Zahlenlotto 6 aus 49.

1. Der Ziehungsvorgang:

6 Zahlen können auf $m = 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot \underbrace{(49-6+1)}_{44} = \dfrac{49!}{43!} = \text{nPr}(49,6)$ gezogen werden.

Die Reihenfolge der Ziehung ist da berücksichtigt.

Die gleichen 6 Zahlen können in 6! = 720 verschiedenen Reihenfolgen gezogen werden.

Und bei dieser Berechnungsart sind dies dann auch verschiedene Ziehungsergebnisse.

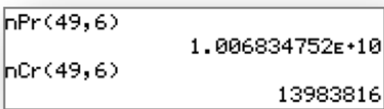
2. Das Ziehungsergebnis:

ist von der Ziehungsreihenfolge unabhängig. *Daher sind stets 720 Permutationen derselben 6 Zahlen ein identisches Ergebnis. Und so wird es im Zahlenlotto auch gehandhabt.*

Am Ende werden die gezogenen 6 Zahlen der Größe nach präsentiert und niemand weiß mehr, in welcher Reihenfolge sie gezogen worden sind.

Es gibt also $m = \dfrac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{6!} = \dfrac{49!}{43! \cdot 6!} = \text{nCr}(49,6)$ Ziehungsergebnisse.

So viele ausgefüllte 49-er Tippfelder gibt es.



Musterbeispiel 20

Aus 32 Kindern sollen 28 ausgewählt werden.

a) Auf wie viele Arten geht das, wenn man sie in einer Reihe aufstellen will?

b) Auf wie viele Arten geht das, wenn man sie als Gruppe vortreten lässt?

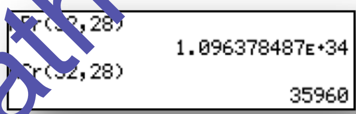
Lösung:

a) Spielt die Reihenfolge der Auswahl eine Rolle, z. B. weil man sie der Reihe nach antreten lässt, dann geht das auf m Arten mit

$$m = 32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot \underbrace{(32-28+1)}_{5} = \frac{32!}{4!} = 1{,}0964 \cdot 10^{34} \quad \boxed{= nPr(32,28)}$$

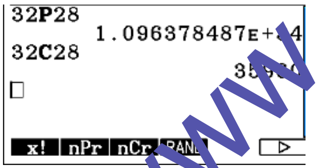
b) Spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle, kommt es also nur darauf an, wer in der ausgewählten Gruppe ist, dann erhält man so viele Möglichkeiten:

$$m = \frac{32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 5}{28!} = \frac{32!}{4!\,28!} = 35960 \quad \boxed{= nCr(32,28)}$$



Hier das Display der Grafikrechners CASIO fx CG20:

Das zugehörige Menü findet man über OTPN – PROB



Merke:

Für die Anzahl der **k-Permutationen**, d.h. Ziehung von k Elementen aus n Elementen unter Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholungen, gibt es so viele Möglichkeiten:

$$m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \boxed{nPr(n,k)}$$

Spielt die Reihenfolge jedoch keine Rolle, dann reduziert sich diese Anzahl auf:

$$m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \boxed{nCr(n,k)} := \binom{n}{k}$$

Man nennt das dann keine k-Permutation sondern eine k-Menge.

Definition: Den Bruch $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \boxed{nCr(n,k)}$ bezeichnet man abkürzend mit $\binom{n}{k}$ und nennt ihn Binomialkoeffizient.

4.3 Die 3. Art: k-Mengen / Platzauswahl

Musterbeispiel 21

Karl geht mit seinen drei Freunden ins Konzert. Es gibt nur noch 9 freie Plätze.

a) Die vier Freunde gehen auf die 9 freien Plätze zu und setzten sich einfach auf 4 Plätze.

b) Karl kauft 4 Eintrittskarten und überlässt der Kassiererin die Auswahl der Plätze.

Wie viele Möglichkeiten gibt es in diesen beiden Fällen?

Lösung

a) **Belegungsvorgang** (Wenn sich Personen auf die Stühle setzen, liegt eine geordnete Stichprobe vor, denn dann spielt die Reihenfolge der Belegung eine Rolle)

Der erste wählt seinen Platz aus:	Dies geht auf 9 Arten.
Der zweite wählt seinen Platz aus:	Dies geht nun noch auf 8 Arten.
Der dritte wählt seinen Platz aus:	Dies geht dann noch auf 7 Arten.
Der vierte wählt seinen Platz aus:	Dies geht noch auf 6 Arten.

Also ergibt dies $m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ Möglichkeiten der Platzauswahl.

b) **Platzauswahl ohne Belegung** (Wenn man nur die 4 Plätze auswählt, und noch nicht festgelegt wird, wer wo sitzt, dann spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle. Man hat dann eben diese vier Karten in der Hand und keiner sieht ihnen die Reihenfolge der Auswahl an.)

Auswahl der 1. Karte	Dies geht auf 9 Arten.
Auswahl der 2. Karte	Dies geht auf 8 Arten.
Auswahl der 3. Karte	Dies geht auf 7 Arten.
Auswahl der 4. Karte	Dies geht auf 6 Arten.

Nun aber muss man so rechnen: $m = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 126 = \binom{9}{4}$

Man muss im Gegensatz zu a) noch durch 4! =24 teilen, denn die Reihenfolge spielt keine Rolle. Also führen 4! = 24 verschiedene Ziehungsreihenfolgen derselben 4 Karten zum selben Ergebnis.

MERKE:

Werden Plätze mit unterscheidbaren Objekten (Personen) belegt, benötigt man die Formel der k-Permutation: $m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(k+1!)} = \boxed{nPr(n,k)}$

Für die reine Platzauswahl spielt die Reihenfolge keine Rolle, also benötigt man die Formel der k-Menge: $m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(k+1!)\,k!} = \boxed{nCr(n,k)} = \binom{n}{k}$

Definition einer sinnvollen Abkürzung:

$$\boxed{\binom{9}{4} := \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4!} = \frac{9!}{4!\cdot5!} = 126}$$

Man liest dies „9 über 4“ und nennt diesen Ausdruck „**Binomialkoeffizient**“.

*ACHTUNG: Viele Schüler schreiben Binomi-**n**-alkoeffizient. Das n ist falsch!*

Musterbeispiel 22: schon wieder Lottozahlen

a) Nun wollen wir die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn des 1. Rangs berechnen.

Dazu benötigt man die Formel $p = \frac{g}{m}$

Die Zahl der für den 1. Rang günstigen Möglichkeiten ist 1 (genau das Ziehungsergebnis).

Im Nenner steht m die Gesamtzahl der möglichen Ziehungsergebnisse (Beispiel 19):

$$m = \binom{49}{6} = \frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6!} = \frac{49!}{6!\cdot43!} = 13983816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für den 1. Rang, also für das Ereignis, alle 6 Richtigen angekreuzt zu haben ist

$$P(1.\,\text{Rang}) = \frac{g}{m} = \frac{1}{13.983.816} \approx 7{,}15\cdot10^{-8}$$

b) Hat man 5 Richtige angekreuzt und dazu die extra gezogene Zusatzzahl, dann ist

$g = \binom{6}{5} = \frac{6\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2}}{\cancel{5!}} = 6$, denn man hat genau 6 Möglichkeiten, 1 der 6 Gewinnzahlen nicht anzukreuzen und dafür die Zusatzzahl.

$$P(2.\,\text{Rang}) = \frac{g}{m} = \frac{6}{13.983.816} \approx 4{,}29\cdot10^{-7}$$

c) Hat man genau 4 Richtige angekreuzt, gewinnt man im 4. Rang.

Der dazu günstige Fall besteht aus 4 richtigen und 2 falschen Zahlen.

4 Richtige aus 6 erzielt man auf $\binom{6}{4} = \frac{\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3}{\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}} = 15$ Arten, und 2 Falsche aus 43 (nicht gezogenen) auf $\binom{43}{2} = \frac{43\cdot42}{2!} = 43\cdot21 = 903$ Arten:

$$P(4.\,\text{Rang}) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}001$$

Musterbeispiel 23:

Zwanzig Schüler haben sich für das Teamprojekt „Angewandte Biologie“ eingetragen. Da kein Kurs mehr als 12 Schüler aufweisen soll, wird ein zweiter Kurs eingerichtet. Das Projekt 1 soll 12 Schüler umfassen, die Lehrerin Frau Richter kann sich also 12 aus diesen 20 Kindern auswählen, während Herr Seidelmann, der Betreuer des 2. Projektkurses nur 8 bekommen soll. Auf wie viele Arten kann man diese Einteilung vornehmen?

Es gibt zwei Lösungen für diese Aufgabe:

Frau Richter kann ihre Schüler auswählen, dann erhält Herr Seidelmann den Rest oder umgekehrt.

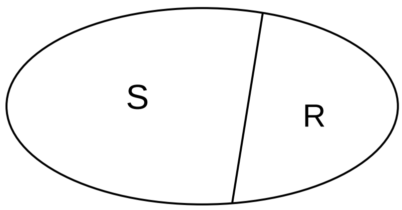
1. Lösung: Bei Auswahl der 12 Schüler durch Frau Richter gibt es so viele Möglichkeiten:

$$m_1 = \binom{20}{12} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot \ldots \cdot (20-12+1)}{12!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot \ldots \cdot 9}{12!} = \frac{20!}{12!\,8!} = 125\,970$$

2. Lösung: Herr Seidelmann wählt sich 8 Schüler für Kurs 2 aus mit so vielen Möglichkeiten:

$$m_2 = \binom{20}{8} = \frac{20\cdot 19\cdot \ldots \cdot (20-8+1)}{8!} = \frac{20\cdot 19\cdot \ldots \cdot 13}{8!} = \frac{20!}{8!\,12!} = 125\,970$$

Das Ergebnis ist für den Laien zunächst verblüffend. Beide Wege liefern dasselbe Ergebnis. Wir teilen im Grunde die Menge S der Schüler in zwei Gruppen ein, die sich ergänzen. Man erhält dasselbe, wenn man zuerst die Teilmenge A auswählt, oder wenn man zuerst die Teilmenge B auswählt.



Musterbeispiel 24

Ein Gefäß enthält 4 rote und 3 blaue Kugeln, die sich durch Anfassen nicht unterscheiden lassen. Man zieht (ohne hinzusehen) 7-mal eine Kugel, notiert die Farbe und legt dann die Kugel wieder zurück. Wie viele dieser Ereignisse enthalten genau 5 rote Kugeln?

Lösung

Man kann jedes Ziehungsergebnis als Pfad darstellen, etwa $r-r-b-r-r-r-b$ oder $b-b-r-r-r-r-r$. Man erkennt, dass sich damit die Aufgabe auf eine reine Platzauswahl reduziert.

Auf wie viele Arten kann man aus den 7 Plätzen 5 Plätze für „rot“ auswählen.

Die Lösung ist jetzt leicht: $m = \binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5!} = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3}\cdot 2} = 21$

Man kann die Lösung auch ganz anders angehen:

Anstatt die Plätze für die roten Kugeln auszuwählen, kann man auch 2 Plätze für die beiden blauen auswählen: $m = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21$

Erkenntnis: $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$

4.4 Die vierte Art: k-Kombinationen
Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung

Zur Erinnerung (Abbildungen auf Seite 15 bis 17):

Aus einer Menge von n Elementen werden k Elemente ausgewählt, und zwar ohne Beachtung der Reihenfolge, wobei Wiederholungen zugelassen sind. Hier darf ein Element auch mehrfach ausgewählt werden.

Musterbeispiel 25

Aus 20 Schülern werden 6 ausgewählt, um ein bestimmtes Amt zu übernehmen, etwa zur Organisation eines Festes. Dabei spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle, und ein Schüler kann auch 2 oder 3 Ämter übernehmen, oder, wenn alle anderen zu faul sind, gar alle.

Die Berechnungsformel für die Anzahl der Möglichkeiten ist schwer zu beweisen, weshalb hier darauf verzichtet wird. Das Ergebnis lautet:

Die Auswahl von k Elementen aus n ohne Beachtung der Reihenfolge aber mit Wiederholungen, geht auf $\binom{n+k-1}{k}$ Arten

Lösung

Unsere 6 Ämter können auf $m=\binom{20+6-1}{6}=\binom{25}{6}=\frac{25!}{6!\cdot 19!}=177.100$ besetzt werden.

Musterbeispiel 26

Ich beziehe mich auf die Auswahlbeispiele auf den Seiten 15 bis 17.

a) In **Auswahl 1 / 3. Art** wurden aus $G=\{1;2;3\}$ zwei Zahlen ausgewählt.

Dabei sollte die Reihenfolge (Anordnung) keine Rolle spielen und Wiederholungen zugelassen werden. Die Ergebnismenge lautete

$$S=\{(1|1);(1|2);(1|3);(2|2);(2|3);(3|3)\}$$

Laut Formel sind das $m=\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2!}=6$ Möglichkeiten, was wir bestätigen.

b) In **Auswahl 2 / 3. Art** wurden aus $G=\{1;2;3;4\}$ zwei ausgewählt.

Dabei sollte die Reihenfolge (Anordnung) keine Rolle spielen und Wiederholungen zugelassen werden. Die Ergebnismenge lautete:

$$: S=\{(1|1);(1|2);(1|3);(1|4);(2|2);(2|3);(2|4);(3|3);(3|4);(4|4)\}$$

Das bestätigt das Formelergebnis: $m=\binom{4+2-1}{2}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2!}=10$ Möglichkeiten.

c) In **Auswahl 3 / 3. Art** wurden aus $G=\{1;2;3;4\}$ drei ausgewählt.

Dabei sollte die Reihenfolge (Anordnung) keine Rolle spielen und Wiederholungen zugelassen werden. Die Ergebnismenge lautete:

$$S=\left\{\begin{array}{r} (1|1|1);(1|1|2);(1|1|3);(1|1|4)\\ (1|2|2);(1|2|3);(1|2|4)\\ (1|3|3);(1|3|4)\\ (1|4|4)\\ (2|2|2);(2|2|3);(2|2|4)\\ (2|3|3);(2|3|4)\\ (2|4|4)\\ (3|3|3);(3|3|4)\\ (3|4|4)\\ (4|4|4) \end{array}\right\}$$

Man sieht, dass Wiederholungen vorhanden sind, aber keine unterschiedlichen Reihenfolgen.

Das bestätigt das Formelergebnis: $m=\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ Möglichkeiten.

Noch ein Tipp zum Aufschreiben einer solchen Menge.

Man verwendet zuerst alle Tripel mit beginnender 1, davon gibt es 10, die wiederum geordnet werden nach 11 12 13 14 22 23 24 33 34 44:
Achtet man darauf, dass nachfolgenden Zahlen nie größer als vorangehende sein sollen, vermeidet man Wiederholungen!

5. Training: Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

(1) Definition und Berechnung

Unter dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ versteht man den Term

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Das sind im Zähler k Faktoren von n ab rückwärts.

Beispiel: $$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5!}$$

Die Berechnung des letzten Faktors geschieht durch die Formel $n-k+1$ und führt hier zu $12-5+1=8$. Damit erhält man tatsächlich k Faktoren.

Durch den **Erweiterungstrick** kann man den Bruch so umwandeln, dass das Ergebnis mit einem Taschenrechner schneller berechnet werden kann:

$$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot \boxed{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5!\cdot \boxed{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{5!\cdot 7!} = \frac{12!}{5!\cdot 7!}$$

Dies kann man sich leicht so *merken*:

$\binom{12}{5}$ enthält im Zähler 12! und im Nenner zunächst 5!

und dazu noch die Fakultät der Differenz 12 – 5 = 7,

Die allgemeinen Berechnungsformeln lauten demnach

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

Weitere Beispiele:

$$\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210 \qquad \binom{10}{6} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6!} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$$

$$\binom{24}{8} = \frac{24\cdot 23\cdot\ldots\cdot 17}{8!} = \frac{24!}{8!\cdot 16!} = 735.471 \qquad \binom{24}{16} = \frac{24\cdot 23\cdot\ldots\cdot 9}{16!} = \frac{24!}{16!\cdot 8!} = 735.471$$

Was fällt bei diesen Beispielen auf???

(2) Ein wichtiges Rechengesetz

An diesen Beispielen konnte man entdecken, dass manche Binomialkoeffizienten die gleichen Werte haben. In den Beispielen galt:

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} \quad \text{und} \quad \binom{24}{16} = \binom{24}{8}.$$

Wenn man die unteren Zahlen anschaut, kann man eine Vermutung bekommen: Ihre Summe ist genau die oben stehende Zahl.

Da kann man schnell überprüfen, ohne das Ergebnis wirklich zu berechnen:

a) $$\binom{13}{7} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{7!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}\cdot6!} = \binom{13}{6}$$

Ich habe im Nenner die $7!$ zerlegt in $7\cdot6!$ (siehe „Training Fakultät“) und dann durch 7 gekürzt.

Also gilt: $\binom{13}{7} = \binom{13}{6}$.

Berechnung des 26. Faktors !

b) $$\binom{30}{26} = \frac{30\cdot29\cdot\ldots\cdot(30-26+1)}{26!} = \frac{30\cdot29\cdot\ldots\cdot5}{26!}$$

Nun zerlege ich im Nenner $26! = 26\cdot25\cdot24\cdot\ldots5\cdot4!$ und schreibe den Zähler ausführlicher, so dass ich kürzen kann:

$$\binom{30}{26} = \frac{30\cdot29\cdot\ldots\cdot5}{26!} = \frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot\cancel{26\cdot25\cdot\ldots\cdot6\cdot5}}{\cancel{26\cdot25\cdot\ldots\cdot6\cdot5}\cdot4!} = \frac{30\cdot29\cdot28\cdot27}{4!} = \binom{30}{4}$$

Berechnung des 43. Faktors !

c) $$\binom{49}{43} = \frac{49\cdot48\cdot\ldots\cdot(49-43+1)}{43!} = \frac{49\cdot48\cdot\ldots\cdot7}{43!}$$

Zerlegung des Nenners: $43! = 43\cdot42\cdot\ldots\cdot8\cdot7\cdot6!$ ergibt

$$\binom{49}{43} = \frac{49\cdot48\cdot\ldots\cdot7}{43!} = \frac{49\cdot\ldots\cdot44\cdot\cancel{43\cdot42\cdot\ldots\cdot7}}{\cancel{43\cdot42\cdot\ldots\cdot7}\cdot6!} = \frac{49\cdot\ldots\cdot44}{6!} = \binom{49}{6}$$

Das ist die Verkleinerungsregel für Binomialkoeffizienten: (Symmetrie)

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{n-k}}$$

Diese Regel erweist sich immer als günstig, wenn k nahe bei n ist, also eine große Zahl ist.
Sie wird dann durch die Differenz n - k ersetzt. Dann kann man den Binomialkoeffizienten oft ohne Taschenrechner ermitteln.

Beispiele

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = \frac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 120$$

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$$

$$\binom{15}{11} = \binom{15}{4} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4!} = \frac{15\cdot \cancel{14}^{7}\cdot 13\cdot \cancel{12}}{\cancel{4\cdot 3}\cdot \cancel{2}} = 1365$$

$$\binom{15}{10} = \binom{15}{5} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5!} = \frac{\cancel{15}^{3}\cdot \cancel{14}^{7}\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11}{\cancel{5}\cdot \cancel{4\cdot 3}\cdot \cancel{2}} = 21\cdot 13\cdot 11 = 3003$$

Ist die untere Zahl auch nach der Umrechnung noch groß, wird der Rechenaufwand zu groß, dann wird man mit dem Taschenrechner arbeiten und die Umformung lohnt sich nicht:

$$\binom{30}{20} = \binom{30}{10} = \frac{30!}{10!\ 20!} = 30045015$$

(3) Einige besondere Binomialkoeffizienten:

$$\binom{4}{1} = \frac{4}{1!} = 4, \qquad \binom{7}{1} = \frac{7}{1!} = 7, \qquad \binom{279}{1} = \frac{279}{1!} = 279$$

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4, \qquad \binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7, \qquad \binom{279}{278} = \binom{279}{1} = 279$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!} = 1 \qquad \binom{7}{7} = \frac{7\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}{7!} = 1, \qquad \binom{279}{279} = 1$$

Analog folgt $\binom{4}{4} = \binom{4}{0}$.

Eigentlich hat $\binom{4}{0}$ gar keinen Sinn, weil man im Zähler nicht 0 Faktoren anschreiben kann.

Aber weil man möchte, dass die Verkleinerungsregel immer gilt, gibt dem Binomialkoeffizienten

$\binom{4}{0} = \binom{5}{0} = \ldots = \binom{n}{0}$ immer den Wert 1.

Wir merken uns also Folgendes:

$$\boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{und} \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1}$$

Bemerkung

Abschließend greife ich, um mathematisch korrekt zu bleiben, nochmals die Definition des Binomialkoeffizienten auf.
Wenn man so eine Definition über eine Formel macht, muss man dazu schreiben, welche Werte die verwendeten Variablen annehmen dürfen.

Hier also die vollständige **Definition**

Für $n \in \mathbf{N}$ (d.h. $n > 0$) und $0 < k \leq n$ gelte

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

Zusätzlich sei $\boxed{\binom{n}{0} = 1}$

Aufgaben

a) Berechne schriftlich ohne Taschenrechner

$$\binom{5}{2};\ \binom{7}{3};\ \binom{8}{4};\ \binom{12}{4};\ \binom{9}{7};\ \binom{13}{12};\ \binom{22}{19};\ \binom{76}{1};\ \binom{28}{28};\ \binom{5}{7};\ \binom{19}{0};\ \binom{7}{6}$$

b) Berechne mittels Taschenrechner

$$\binom{15}{6};\ \binom{22}{10};\ \binom{38}{8};\ \binom{48}{41};\ \binom{27}{25};\ \binom{85}{35};\ \binom{14}{10};\ \binom{40}{20}$$

Lösungen

a)

$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ $\qquad$ $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3!}} = 35$

$\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1} = 70$ $\qquad$ $\binom{12}{4} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9}{\cancel{4\cdot 3}\cdot \cancel{2}} = 11\cdot 45 = 495$

$\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ $\qquad$ $\binom{13}{12} = \binom{13}{1} = 13$

$\binom{22}{19} = \binom{22}{3} = \frac{22\cdot 21\cdot 20}{3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 7\cdot 20 = 1540$ $\qquad$ $\binom{76}{1} = 76$

$\binom{28}{28} = 1$ $\qquad$ $\binom{5}{7}$ ist nicht berechenbar.

Die untere Zahl darf nicht größer als die obere sein!

$\binom{19}{0} = 1$ $\qquad$ $\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$

b)

$\binom{15}{6} = \frac{15!}{6!\cdot 9!} = 5005$ $\qquad$ $\binom{22}{10} = \frac{22!}{10!\cdot 12!} = 646.646$

$\binom{38}{4} = \frac{38!}{4!\cdot 34!} = 73.815$ $\qquad$ $\binom{48}{41} = \frac{48!}{41!\cdot 7!} = 73.629.072$

$\binom{27}{25} = \frac{27!}{25!\cdot 2!} = 351$ oder $\binom{27}{25} = \binom{27}{2} = \frac{27\cdot 26}{2} = 27\cdot 13 = 351$

$\binom{85}{35} = \frac{85!}{35!\cdot 50!}$ ist mit den meisten Taschenrechnern nicht berechenbar.

Wer den Wert dennoch benötigt, muss diesen Weg gehen:

$$\binom{85}{35} = \frac{85\cdot 84\cdot \ldots\cdot (85-35+1)}{35\cdot 34\cdot 33\cdot \ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{85\cdot 84\cdot \ldots\cdot 51}{35\cdot 34\cdot 33\cdot \ldots\cdot 2\cdot 1}$$

und tippt abwechselnd Zähler durch Nenner mal Zähler durch Nenner usw. ein! Auf diese Weise überschreitet der interne Speicher nicht seine Kapazität,

$\binom{14}{10} = \frac{14!}{10!\cdot 4!} = 1001$ $\qquad$ $\binom{40}{20} = \frac{40!}{20!\cdot 20!} = 1{,}3785\cdot 10^{11}$

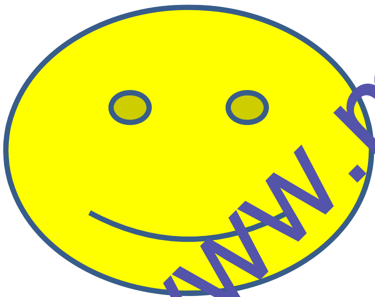
Rückblende

Wozu brauchen wir den Binomialkoeffizienten

Mit dem Binomialkoeffizienten ermitteln wir die Anzahl der Möglichkeiten, die einer Platzauswahl entspricht:

Wenn man aus n Plätzen k auswählen soll, dann geht dies auf $\binom{n}{k}$ Arten.

Man muss wissen, dass dann die Plätze nicht geordnet sind, denn auf die Reihenfolge der Ziehung kommt es nicht an, und natürlich ist auch kein Platz doppelt dabei.



6 Weitere Beispiele zur Anwendung des Binomialkoeffizienten

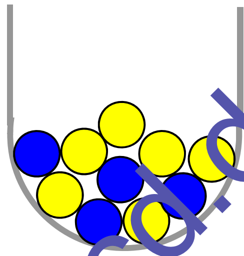
Musterbeispiel 27: Urnenexperiment: Ziehen mit Zurücklegen und Auswahl aus 2 Sorten

In einer Urne liegen 6 gelbe und 4 blaue Kugeln. Wir entnehmen 7-mal eine Kugel, notieren die Farbe und legen sie wieder zurück.
Uns interessiert das Ereignis A: Es werden genau 4 gelbe Kugeln gezogen.

Aufgabe:

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse kann A haben?

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses A.



Lösung

Ein mögliches Ergebnis des Ereignisses A sieht in aufgeschriebener Form so aus:

$$\longrightarrow b \longrightarrow g \longrightarrow g \longrightarrow b \longrightarrow g \longrightarrow b \longrightarrow g$$

Es ist einfacher, diesen einzelnen (aber für unsere Aufgabe wichtigen Pfad) des Baumes darzustellen, der zu diesem Experiment gehört und insgesamt $3^7 = 2187$ solche Pfade enthält.

a) Auf jedem Pfad, der zu unserem Ereignis A „**Man zieht genau 4 mal gelb**" gehört, liegen also 4-mal gelb und 3-mal blau. Wichtig ist diese Erkenntnis: Es gibt so viele Ergebnisse für A, wie man 4 Plätze (für gelb) aus 7 auswählen kann: $\binom{7}{4} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}} = 35$.

Die restlichen 3 Plätze sind für die blauen Kugeln.

Ergebnis: Es gibt also 35 Möglichkeiten, 4 gelbe Kugeln bei 7 Ziehungen zu erhalten, **A besitzt also 35 Ergebnisse**.

b) **Berechnung der Wahrscheinlichkeit**

(1) Da wir jede Kugel wieder zurücklegen, ist bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit für gelb und blau unverändert: $p_{gelb} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ und $p_{blau} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

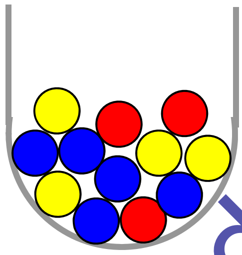
(2) Die Wahrscheinlichkeit eines Pfad berechnet man durch Multiplikation (1. Pfadregel): $p_{Pfad} = 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^3$, denn es wurden 4 gelbe und 3 blaue Kugeln gezogen.

(3) Alle Pfade haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, weil sie gleich viele gelbe und blaue Kugeln enthalten. Da es 35 solche Pfade gibt, ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses:

$$\boxed{P(A) = \underbrace{35}_{\text{Zahl der Pfade}} \cdot \underbrace{0{,}6^4 \cdot 0{,}4^3}_{\text{Wkt. eines Pfads}} \approx 0{,}29}$$

Dieses Berechnungsprinzip heißt Binomialverteilung.

Musterbeispiel 28: Urnenexperiment: Ziehen mit Zurücklegen und Auswahl aus 3 Sorten



In einer Urne liegen 5 blaue, 4 gelbe und 3 rote Kugeln. Wir entnehmen 10-mal eine Kugel, notieren die Farbe und legen sie wieder zurück.
Wir beobachten dabei das Ereignis B:

Es werden genau 3 gelbe, 5 blaue und 2 rote Kugeln gezogen.

Aufgabe:

a) Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Ziehung gibt es?
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses.

Lösung

Ein Ergebnis dieses Ereignisses sieht in aufgeschriebener Form so aus:

$$\longrightarrow b \longrightarrow g \longrightarrow g \longrightarrow b \longrightarrow r \longrightarrow r \longrightarrow b \longrightarrow b \longrightarrow b \longrightarrow g$$

a) Wir haben 10 Plätze zu belegen. 5 davon für blaue Kugeln. Diese können wir auf

$$\binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!} = \frac{\cancel{10}^{2}\cdot 9\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}} = 252 \text{ Arten durchführen.}$$

Von den restlichen 5 Plätzen wählen wir drei für gelb aus, was auf so viele Arten geht:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2!} = 10 \text{ Arten. Dann bleiben noch 2 für rot übrig.}$$

Also ergibt dies insgesamt $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3} = 2520$ Belegungsmöglichkeiten = Pfade.

Übrigens kann man die Belegungsreihenfolge beliebig ändern, man kommt immer auf dieselbe Anzahl. Schauen wir uns ein Beispiel an.

Zuerst suchen wir 2 Plätze für rot aus: $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2!} = 45$ Möglichkeiten und

aus den verbleibenden 8 Plätzen 5 für blau: $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}} = 56$ Möglichkeiten.

Die restlichen 3 Plätze werden mit rot belegt.

Das sind zusammen: $m = 45\cdot 56 = 2520$ Möglichkeiten = Pfade !!!

b) Die Wahrscheinlichkeit für: „**Es werden 5 blaue, 3 gelbe und 2 rote Kugeln entnommen**“:

(1) Da wir jede Kugel wieder zurücklegen, ist bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit für gelb und blau unverändert: $p_{blau} = \frac{5}{12}$, $p_{gelb} = \frac{4}{12}$ und $p_{rot} = \frac{3}{12}$

(2) Wahrscheinlichkeit für einen dazu gehörenden Pfad: $p_{Pfad} = \left(\frac{5}{12}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^2 = \frac{5^5\cdot 4^3\cdot 3^2}{12^{12}}$

(3) Es gibt $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3} = 2520$ Pfade mit dieser Farbzusammensetzung, also gilt:

$$P(B) = \binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^2 = 2520\cdot\frac{5^5\cdot 4^3\cdot 3^2}{12^{12}} \approx 0{,}0005$$

Diese Berechnungsart heißt auch **Polynomialverteilung**.

Musterbeispiel 29

Drei Männer betreten eine Bar. Die 10 Barhocker sind noch unbesetzt. Auf wie viele Arten können sie sich auf diese Hocker setzen?

1. Lösung: Herr 1 hat 10 Plätze zur Auswahl, Herr 2 noch 9 und Herr 3 noch 8.

Und so kommt man viel schneller auf die $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten!

2. Lösung: (Umständlich, aber eine interessante Denkmöglichkeit)

Wir wählen zuerst 3 aus 10 Plätzen aus. Dies geht auf

$$m_{\text{Stuhl}} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 \quad \text{Arten.}$$

In jedem dieser 120 Möglichkeiten haben wir nun 3 Plätze, auf denen sich 3 Männer auf $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten hinsetzen können. So kommt man auch wieder auf $120 \cdot 6 = 720$ Sitz- bzw. Anordnungsmöglichkeiten.

Musterbeispiel 30

An eine Theke mit 12 freien Stühlen wollen sich 3 Männer und 4 Frauen setzen.
Auf wie viele Arten geht dies?

Lösung:

Da man Personen ohnehin unterscheiden kann, reicht es, wenn man einfach von 7 Personen spricht. Man muss gar nicht über Männer und Frauen reden!

1. Person: 12 freie Stühle
2. Person: 11 freie Stühle ...

…

7. Person: 12-7+1=6 freie Plätze.

Also haben wir $m = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{12!}{5!} = 3991680$ Möglichkeiten.

Auch diese Lösung kann man umständlicher gestalten:

Für 3 Männer werden Stühle ausgewählt, das geht auf $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$ Arten.

Dann 4 aus 9 Stühlen für die Damen, das geht auf $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$ Arten.

Also kann man die gewünschten 7 Stühle auf $220 \cdot 126 = 27720$ Arten auswählen.

Bei der Platzauswahl ist keine Reihenfolge der Ziehung enthalten. Die Reihenfolge kommt erst bei der Platzbelegung dazu: Auf die 3 Stühle können sich 3 Männer auf 3! Arten setzen, auf die 4 Stühle der Damen die 4 Frauen auf 4! Arten. Das gibt nun diese Möglichkeiten:

$$m = \binom{12}{3} \cdot 3! \cdot \binom{9}{4} \cdot 4! = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} \cdot 3! \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot 4! = 12 \cdot 11 \cdot \ldots\ldots \cdot 6 = \frac{12!}{5!} = 3.991.680\,.$$

Musterbeispiel 31

An eine Theke mit 5 freien Stühlen wollen sich 3 Männer und 4 Frauen setzen.
Auf wie viele Arten geht dies?

Lösung:

Die Gäste bekommen nun ein Problem, denn die Stühle reichen nicht.
Daher ordnen wir nicht die Stühle den Leuten zu, sondern gehen umgekehrt vor:

Für den 1. Stuhl gibt es 7 Personen,
für den 2. Stuhl noch 6,
…
für den 5. noch 7-5+1, also 3 Personen.

Das sind zusammen $m = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{2!} = 2520$ Möglichkeiten.

Weitere BEISPIELE in der Datei 34010 Binomialverteilung.

Anhang 1

Der Multiple-Choice-Test von Seite 2

(1)	Berechne $24 \cdot 13 - 12 \cdot 15$	a)	132
		b)	142
		c)	152
		d)	136
(2)	Wie viele Teiler hat die Zahl 84?	a)	6
		b)	8
		c)	10
		d)	12
(3)	Welche dieser Zahlen ist 13^5?	a)	65
		b)	371293
		c)	28561
		d)	257824
(4)	Berechne $1+3+5+7+...+99$	a)	2500
		b)	2525
		c)	3500
		d)	2999
(5)	Berechne $\frac{0,24 \cdot 513}{0,0081 \cdot 38}$	a)	4
		b)	0,4
		c)	400
		d)	0,04

Lösung auf der nächsten Seite !

Hier die Rechentipps dazu:

1) $24\cdot 13-12\cdot 15=12\cdot 2\cdot 13-12\cdot 15=12\cdot 26-12\cdot 15=12\cdot (26-15)=12\cdot 11=132$

2) Wie viele Teiler hat die Zahl 84?

84 ist durch 4 teilbar und hat die Quersumme 12, also ist sie auch durch 3 teilbar, folglich auch durch 6 und 12:

$84=1\cdot 84=2\cdot 42=3\cdot 28=4\cdot 21=6\cdot 14=7\cdot 12$ ergibt 12 Teiler.

3) 13^5 muss auf $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=243$ also auf 3 enden.
Also kann nur b) zutreffen.

4) 1 + 3 + 5 + 7 + … + 99 berechne ich doppelt:

$$\begin{array}{l} \;\;1+\;\;3+\;\;5+\;\;7+...+97+\;99 \\ 99+97+95+93+...+\;\;3+\;\;\;1 \\ \hline 100+100+100+...\quad+100+100=50\cdot 100=5000 \end{array}$$

Also ist die gesuchte Summe die Hälfte: 2500

5) Wir zerlegen 513 mit der Quersumme 9 in das Produkt $9\cdot 57=9\cdot 3\cdot 19$

und 38 in $2\cdot 19$ und erweitern zugleich den Bruch mit 10000 um die Dezimalzahlen wegzubringen:

$$\frac{0{,}24\cdot 513}{0{,}0081\cdot 38}=\frac{0{,}24\cdot 9\cdot 3\cdot \cancel{19}\cdot 10000}{0{,}0081\cdot 2\cdot \cancel{19}\cdot 10000}=\frac{2400\cdot \cancel{9\cdot 3}}{\cancel{81}\,3\cdot 2}=400$$

Anhang 2

Zusammenstellung aller Musterbeispiele dieses Textes zu einem **Aufgabenblatt**

Aufgabe 1: Geordnete Stichprobe ohne Wiederholungen

12 Kinder führen einen 100-m-Lauf durch. Alle kommen mit verschiedenen Zeiten ins Ziel. Klaus erhält die Aufgabe, ein Schild anzufertigen, auf dem die Namen der drei schnellsten stehen.
Wie viele Schilder müsste er im Voraus anfertigen, um alle Möglichkeiten vorrätig zu haben?

Aufgabe 2: Geordnete Stichprobe mit Wiederholungen: Multiple-Choice-Test:

(1) Berechne $24 \cdot 13 - 12 \cdot 15$
a) 132
b) 142
c) 152
d) 136

(2) Wie viele Teiler hat die Zahl 84 ?
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

(3) Welche dieser Zahlen ist 13^5 ?
a) 65
b) 371293
c) 28561
d) 257824

(4) Berechne $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99$
a) 2500
b) 2525
c) 3500
d) 2999

(5) Berechne $\frac{0{,}24 \cdot 513}{0{,}0081 \cdot 38}$
a) 4
b) 0,4
c) 400
d) 0,04

Wie viele Möglichkeiten des Ankreuzens gibt es?

Aufgabe 3

Ein Würfel wird 4-mal geworfen. Die Augenzahlen stellen wir zu einem „Quadrupel“ zusammen, etwa $(1 \,|\, 2 \,|\, 1 \,|\, 4)$. Wie viele davon gibt es?

Aufgabe 4

(Lösung Seite 6)

a) Wie viele 4-stellige natürliche Zahlen gibt es?
b) Wie viele vierstellige Zahlen haben geradzahlige Ziffern und sind größer als 5000?

Aufgabe 5

(Lösung Seite 7)

Wie viele vierstellige Zahlen mit **mindestens** 2 Vierern gibt es?

Aufgabe 6:

(Lösung Seite 8)

Die Fahrzeugkennzeichen eines Landkreises bestehen (bis auf Sonderkennzeichen) aus einem oder zwei Buchstaben gefolgt von einer drei- oder vierstelligen Zahl.
Wie viele Kennzeichen gibt es, wenn man alle 26 Buchstaben zulässt?

Aufgabe 7: Anordnung aller Elemente (Permutationen)

(Lösungen Seite 9)

12 Kinder laufen die 100 m – Strecke in unterschiedlichen Zeiten. Ihre Namen sollen in einer Liste aufgeschrieben werden, der schnellste Schüler steht oben, der langsamste unten.
Wie viele Listen sind denkbar?

Aufgabe 8: Kinobesuch – Platzverteilung

(Lösungen Seite 9)

a) 7 Personen kommen ins Kino und finden in Reihe 12 nur noch genau 7 freie Plätze vor. Auf wie viele Arten können sie sich hinsetzen?
b) Wenn jedoch für diese 7 Personen noch 9 Plätze frei sind, dann gibt es mehr Möglichkeiten.
c) Was tut man, wenn für diese nur noch 5 freie Plätze vorhanden sind?

Aufgabe 9: Lottozahlen

(Lösung Seite 10)

Beim Lotto 6 aus 49 werden 6 Zahlen aus 49 gezogen.
a) Wie viele Ziehungsmöglichkeiten gibt es, wenn man die Reihenfolge der Ziehung beachtet?
b) Die 6 gezogenen Zahlen werden zur Bekanntgabe der Größe nach sortiert. Auf wie viele Arten können dieselben 6 Zahlen angeordnet werden?
c) Wie viele verschiedene ausgefüllte Tippscheine (49er.Felder) gibt es?

Aufgabe 10: Bücher aufstellen

(Lösung Seite 10)

a) Auf wie viele Arten kann man 8 verschiedene Bücher in ein Regal stellen?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn unter diesen 8 Büchern genau 2 gleiche sind?
c) Wie ist das bei genau 3 gleichen Büchern?
d) Wir wollen 7 Bücher anordnen, unter denen 3 neue nicht unterscheidbare Bücher stehen; nämlich die drei Formelsammlungen E: A – B - C – D – E – E – E.
Auf wie viele Arten kann man diese 7 Bücher anordnen?
e) Entfernt man in d) von D die Buchhülle, entdeckt man, dass die Bücher A und D ebenfalls gleich sind. Auf wie viele Arten kann man dann diese 7 Bücher anordnen?
f) Wir haben 3 Bücher „Harry Potter Band 3“, 2 von „Harry Potter Band 4“ und 4 von „Harry Potter 5“. Auf wie viele Arten lassen sich diese anordnen?
g) Im Regal des Lehrmittelraumes der Schule stehen 24 übrig gebliebene Bücher der Jahrgangsstufe 10. Darunter sind 3 gleiche Physikbücher, 5 gleiche Deutschbücher, 4 gleiche Englischbücher, 6 gleiche Mathebücher und 6 gleiche Formelsammlungen.
Auf wie viele Arten kann man sie nebeneinander aufstellen?
h) Der für die Bücherei zuständige Lehrer ordnet die Bücher so an, dass immer die gleichen nebeneinander stehen, etwa so: $\boxed{\text{PPP}}\boxed{\text{DDDDD}}\boxed{\text{EEEE}}\boxed{\text{MMMMMM}}\boxed{\text{FFFFFF}}$
Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

Aufgabe 11
(Lösung Seite 12)

Wie viele „Wörter“ lassen sich durch Permutation aus dem Wort „Essenmasse“ bilden?

Aufgabe 12
(Lösung Seite 19)

In einer Urne liegen 10 nummerierte Kugeln (0 bis 9). Wir ziehen daraus dreimal eine Kugel und legen sie jeweils wieder zurück. Die gezogene Nummer notieren wir. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 13
(Lösung Seite 19)

Unter 178 Schülern werden 5 Bücher verlost. Jeder hat dabei auch die Chance, mehr als nur einmal zu gewinnen. Wie viele Ereignisse gibt es?

Aufgabe 14
(Lösung Seite 19)

Ein Schimpanse sitzt an einer Spezial-Schreibmaschine mit 25 Buchstaben und tippt wahllos darauf herum. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt er das Wort STOCHASTIK, wenn er genau 10-mal auf die Tasten drückt?

Aufgabe 15
(Lösung Seite 20)

7 zufällig ausgewählte Schüler werden nach dem Wochentag ihrer Geburt befragt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle 7 an verschiedenen Wochentagen zur Welt gekommen?

Aufgabe 16
(Lösung Seite 20)

Ein Computer gibt eine vierstellige Zufallszahl aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält diese mindestens eine Vier?

Aufgabe 17
(Lösung Seite 21)

Bei einem Autorennen der „Formel 1“ starten 23 nummerierte Rennautos. Auf Grund mehrerer Unfälle bzw. Motorschäden fallen 13 Fahrzeuge aus. Es kommen also letztlich nur 10 Fahrzeuge ins Ziel.
Auf wie viele Möglichkeiten ist dies möglich?

Aufgabe 18
(Lösung Seite 23)

Die Klassenstufe 12 eines Gymnasiums hat 58 Kinder. 30 von ihnen können sich in eine Aushangliste zu einer Veranstaltung eintragen. Wie viele Listen sind möglich (wenn man die Reihenfolge der Einträge beachtet)?

Aufgabe 19
(Lösung Seite 23)

a) Auf wie viele Arten können 6 aus 49 Zahlen gezogen werden, wenn die Ziehungsreihenfolge beachtet wird?

b) Wie viele ausgefüllte Tippfelder (6 aus 49) sind möglich?

Aufgabe 20

(Lösung Seite 24)

Aus 32 Kindern sollen 28 ausgewählt werden.

a) Auf wie viele Arten geht das, wenn man sie in einer Reihe aufstellen will?

b) Auf wie viele Arten geht das, wenn man sie als Gruppe vortreten lässt?

Aufgabe 21

(Lösung Seite 25)

Karl geht mit seinen drei Freunden ins Konzert. Es gibt nur noch 9 freie Plätze.

a) Die vier Freunde gehen auf die 9 freien Plätze zu und setzten sich einfach auf 4 Plätze.

b) Karl kauft 4 Eintrittskarten und überlässt der Kassiererin die Auswahl der Plätze.

Wie viele Möglichkeiten gibt es in diesen beiden Fällen?

Aufgabe 22:

(Lösung Seite 26)

Berechne für das Zahlenlotto 6 aus 49 die Wahrscheinlichkeiten

a) für den 1. Rang (6 Richtige).

b) für den 2. Rang (5 Richtige + Zusatzzahl)

c) für den 4. Rang (4 Richtige)

Aufgabe 23

(Lösung Seite 27)

Zwanzig Schüler haben sich für unser Teamprojekt „Angewandte Biologie“ eingetragen. Da kein Kurs mehr als 12 Schüler aufweisen soll, wird ein zweiter Kurs eingerichtet. Das Projekt 1 soll 12 Schüler umfassen, die Lehrerin Frau Richter kann sich also 12 aus diesen 20 Kindern auswählen, während Herr Seidelmann, der Betreuer des 2. Projektkurses nur 8 bekommen soll. Auf wie viele Arten kann man diese Einteilung vornehmen?

Aufgabe 24

(Lösung Seite 27)

Ein Gefäß enthält 4 rote und 8 blaue Kugeln, die sich durch Anfassen nicht unterscheiden lassen. Man zieht (ohne hinzusehen) 7-mal eine Kugel, notiert die Farbe und legt dann die Kugel wieder zurück. Wie viele dieser Ereignisse enthalten genau 5 rote Kugeln?

Aufgabe 25

(Lösung Seite 28)

Aus 10 Schülern werden 6 ausgewählt, um ein bestimmtes Amt zu übernehmen, etwa zur Organisation eines Festes. Dabei spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle, und ein Schüler kann auch 2 oder 3 Ämter übernehmen, oder, wenn alle anderen zu faul sind, gar alle.
Auf wie viele Arten können diese Ämter besetzt werden?

Aufgabe 26

(Lösung Seite 28)

Auf wie viele Arten kann man ohne Beachtung der Reihenfolge, aber mit Wiederholungen

a) 2 Namen aus 3 auswählen? b) 2 Namen aus 4 auswählen?

c) 3 Namen aus 4 auswählen?

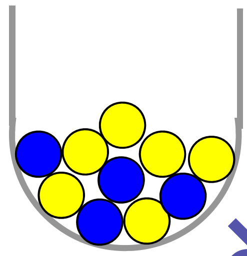
Aufgabe 27

(Lösung Seite 36)

In einer Urne liegen 6 gelbe und 4 blaue Kugeln. Wir entnehmen 7-mal eine Kugel, notieren die Farbe und legen sie wieder zurück.
Uns interessiert das Ereignis A: Es werden genau 4 gelbe Kugeln gezogen.

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse kann A haben?

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses A.



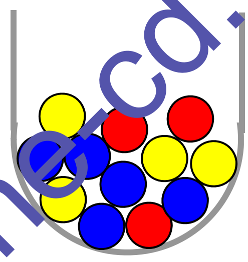
Aufgabe 28

(Lösung Seite 37)

In einer Urne liegen 5 blaue, 4 gelbe und 3 rote Kugeln. Wir entnehmen 10-mal eine Kugel, notieren die Farbe und legen sie wieder zurück.
Wir beobachten dabei das Ereignis B:
Es werden genau 3 gelbe, 5 blaue und 2 rote Kugeln gezogen.

a) Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Ziehung gibt es?

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses



Aufgabe 29

(Lösung Seite 38)

Drei Männer betreten eine Bar. Die 10 Barhocker sind noch unbesetzt. Auf wie viele Arten können sie sich auf diese Hocker setzen?

Aufgabe 30

(Lösung Seite 38)

An eine Theke mit 12 freien Stühlen wollen sich 3 Männer und 4 Frauen setzen.
Auf wie viele Arten geht dies?

Aufgabe 31

(Lösung Seite 39)

An eine Theke mit 5 freien Stühlen wollen sich 3 Männer und 4 Frauen setzen.
Auf wie viele Arten geht dies?