Arkus-Funktionen

Funktionsuntersuchungen

Datei Nummer 47311

Stand: 17. Februar 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Hinweise

Beim Ableiten verwende ich folgende Formeln:

$\sqrt{x}\,' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ bzw. bei Verkettung: $\sqrt{u}\,' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bzw. bei Verkettung: $\arcsin(u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ bzw. bei Verkettung: $\arccos(u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ bzw. bei Verkettung: $\arctan(u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

Dann ist z. B.:

$$\arcsin\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

Ausführliche Hintergründe im Text	47301
Kurze Übersicht zu den Arkusfunktionen:	47305
Umfangreiche Funktionsaufgaben in	47320
und in	47321.

Aufgabenblatt

Aufgabe 6

Stelle f als Wurzelfunktion dar. Gib Definitionsbereich und Wertmenge an. Skizziere die Graphen der Funktionen.

a) $f(x) = \sin(\arccos(x))$ b) $f(x) = \cos(\arcsin(x))$

c) $f(x) = \tan(\arccos(x))$ d) $f(x) = \tan(\arcsin(x))$

e) $f(x) = \cos(\arctan(x))$ f) $f(x) = \sin(\arctan(x))$

Aufgabe 7

Bestimme die Definitionsbereiche und die zugehörigen Wertmengen. Skizziere den Graphen von f.

a) $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}x) + \frac{\pi}{2}$ b) $f(x) = -\arccos(x-1) + \pi$

c) $f(x) = \arcsin(x-1) - \frac{\pi}{2}$ d) $f(x) = x + \arccos(x)$

e) $f(x) = \arcsin(x) - \sqrt{x}$ f) $f(x) = \arcsin(x^2 - 2x - 3)$

Aufgabe 8

Bestimme die Definitionsbereiche, Wertmengen, Asymptoten, senkrechte Tangenten.

a) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $f(x) = \arcsin(\ln x)$ c) $f(x) = \arcsin\sqrt{4-x^2}$

Zusatz: Zeige, dass die Graphen in d) und e) eine Spitze besitzen:

d) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)$ e) $f(x) = \arccos\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)$

f) $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ g) $f(x) = \arccos(\arctan(x))$

Aufgabe 9

Berechne die Ableitung der Funktion und gib ihre Wertmenge an.

a) $f(x) = \arctan(x^2)$ b) $f(x) = \arctan^2(x)$

c) $f(x) = x \cdot \arcsin(x)$ d) $f(x) = \frac{\arccos(x)}{x}$ e) $f(x) = \arccos\left[\sqrt{1-x^2}\right]$

t) $f(x) = \sqrt{\arccos(x)}$ g) $f(x) = \arcsin\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$

Aufgabe 10

Berechne zwei Ableitungen

a) $f(x) = t \cdot \arcsin\left(\frac{x}{t}\right)$ b) $f(x) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \frac{t^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{t^2 - x^2}$ d) $f(x) = \arccos(1-x) - \sqrt{2x - x^2}$

e) $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ f) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\frac{2x}{1-x^2}$

g) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \sqrt{x - x^2}$ h) $f(x) = \arctan\left(x \cdot \sqrt{x+1}\right)$ (nur 1 Ableitung)

Aufgabe 11

Beweise, dass der Graph von $f(x) = \arccos\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ punktsymmetrisch ist zu $Z(1\,|\,?)$.

Lösungen zur Aufgabe 6

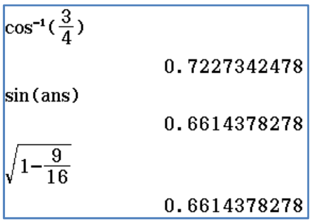
a) $\boxed{f(x) = \sin(\arccos(x))}$

Man benötigt: $\arccos(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ (Siehe Text 47301 Seite 23)

Also ist $\sin\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2}$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}}$

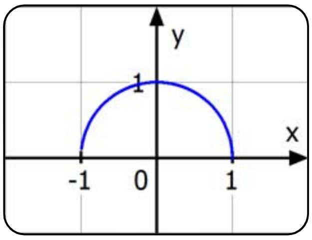
Zahlenbeispiel: Es sei $x = \frac{3}{4}$: $\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{9}{16}}$



Berechnung mit CASIO ClassPad:

Immer beachten: Die Gültigkeitsbereiche der Formeln müssen untersucht werden

Linke Seite: Der Definitionsbereich für arccos ist $\mathbf{D}_{\text{arccos}} = [-1, 1]$, die Zwischenwerte sind aus $\mathbf{W}_{\text{arccos}} = [\,0\,;\pi\,]$, und die Funktionswerte von $f(x) = \sin(\arccos(x))$ sind dann aus $\mathbf{W} = [\,0\,;1\,]$.



Rechte Seite: Der Definitionsbereich von $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ entsteht so:

$1-x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$

Man erkennt Übereinstimmung in $\mathbf{D} = [-1;1]$.

Das Schaubild dieser Funktion ist der obere Halbkreis um den Ursprung mit Radius 1.

b) $\boxed{f(x) = \cos(\arcsin(x))}$

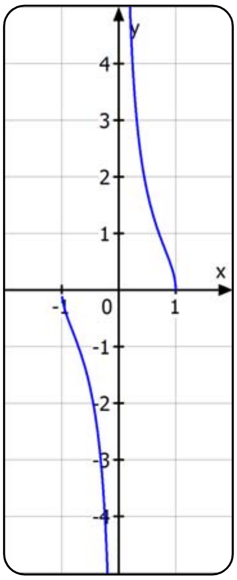
Man benötigt: $\arcsin(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ (Siehe Text 47301 Seite 23)

Also ist $\cos(\arcsin(x)) = \cos(\arccos\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}}$

f hat den Definitionsbereich $\mathbf{D} = [\,-1;1\,]$ und die Wertmenge $\mathbf{W} = [\,0\,;1\,]$.
Das Schaubild ist identisch mit dem aus Teilaufgabe a)

c) $\boxed{f(x) = \tan(\arccos(x))}$



Man benötigt: $\arccos(x) = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (Siehe 47301 Seite 23)

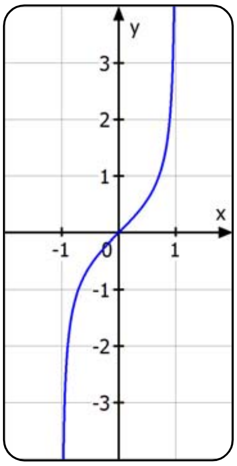
Also ist $\tan(\arccos(x)) = \tan\left(\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$

Definitionsbereich für die Wurzelfunktion: $\mathbf{D} = [\,-1;1\,]\setminus\{0\}$

Definitionsbereich für arccos(x): $\mathbf{D}_{\text{arccos}} = [-1;1]$ mit den Zwischenwerten aus $\mathbf{W}_{\text{arccos}} = [0\,;\pi]$. Die Tangenswerte dazu wiederum sind nicht definiert für $\frac{\pi}{2}$: $\tan(\arccos(0)) = \cancel{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$. Also ist $\mathbf{D}_f = [-1;1]\setminus\{0\}$.

d) $\boxed{f(x)=\tan(\arcsin(x))}$



Man benötigt: $\arcsin(x)=\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Siehe 47301 Seite 23)

Also ist $\boxed{f(x)=\tan(\arcsin(x))=\tan\left(\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

Definitionsbereich für die Wurzelfunktion: $\mathbf{D}=\left]-1;1\right[$

Definitionsbereich für arcsin(x): $\mathbf{D}_{\text{arcsin}}=[-1;1]$ mit den Zwischenwerten aus $\mathbf{W}_{\text{arcsin}}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Die Tangenswerte dazu sind definiert.

Also gilt für beide Funktionsterme $\mathbf{D}=\left]-1;1\right[$ und die Wertmenge $\mathbf{W}=\mathbb{R}$.

e) $\boxed{f(x)=\cos(\arctan(x))}$

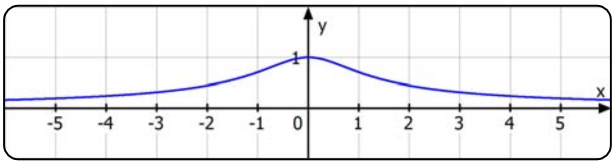
Man benötigt: $\arctan(x)=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (Siehe 47301 Seite 23)

Also ist $\boxed{f(x)=\cos(\arctan(x))=\cos\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

Der Definitionsbereich für die Wurzelfunktion ist $\mathbf{D}=\mathbb{R}$, die Wertmenge ist $\mathbf{W}=\left]0;1\right]$.

Die Funktion $\arctan(x)$ hat ebenfalls $\mathbf{D}=\mathbb{R}$, und liefert Zwischenwerte aus $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, was dann über die Kosinusfunktion zur endgültigen Wertmenge $\mathbf{W}=\left]0;1\right]$ führt.

Die Formelgleichheit gilt also in $\mathbf{D}=\mathbb{R}$.



f) $\boxed{f(x)=\sin(\arctan(x))}$

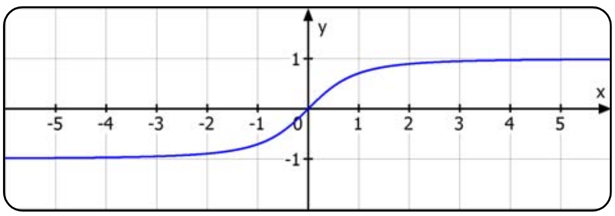
Man benötigt: $\arctan(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (Siehe 47301 Seite 23)

Also ist $\boxed{f(x)=\sin(\arctan(x))=\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

Der Definitionsbereich für die Wurzelfunktion ist $\mathbf{D}=\mathbb{R}$.

Die Funktion $\arctan(x)$ hat ebenfalls $\mathbf{D}=\mathbb{R}$, und liefert Zwischenwerte aus $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, was dann über die Sinusfunktion zur endgültigen Wertmenge $\mathbf{W}=\left]-1;1\right[$ führt.

Die Formelgleichheit gilt also in $\mathbf{D}=\mathbb{R}$.



Aufgabe 7

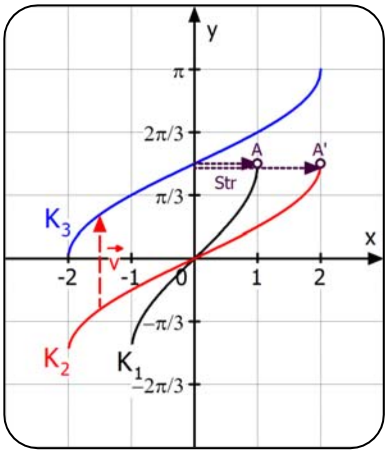
Bestimme den Definitionsbereich für die Funktion f und die zugehörige Wertmenge.
Skizziere den Graphen von f.

a) $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}x) + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(u)$ ist definiert für $-1 \le u \le 1$, d. h. $-1 \le \frac{1}{2}x \le 1 \;\Leftrightarrow\; -2 \le x \le 2$ bzw. $\mathbf{D} = [-2;2]$

Wertmenge von $\arcsin\left(\frac{1}{2}x\right)$: $\quad \mathbf{W} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Wertmenge von $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}$: $\quad \mathbf{W}_f = [0;\pi]$



Durch diese Folge von Abbildungen entsteht der Graph von f:

$\boxed{K_1:\; y = \arcsin(x)} \xrightarrow[\text{x–Richtung mit Faktor 2}]{\text{Streckung in}} \boxed{K_2:\; y = \arcsin(\frac{x}{2})}$

$\xrightarrow[\text{y–Richtung um } \pi/2]{\text{Verschiebung in}} \boxed{K_3:\; y = \arcsin(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2}}$

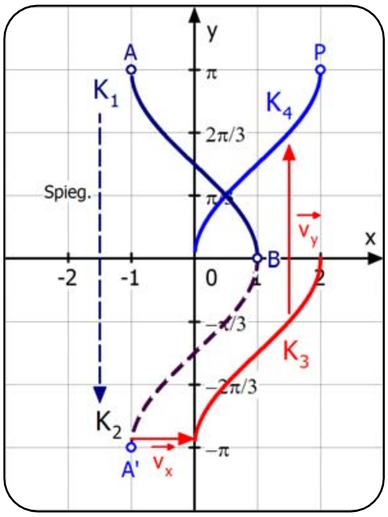
b) $f(x) = -\arccos(x-1) + \pi$

Durch diese Folge von Abbildungen entsteht der Graph von f:

$\boxed{K_1:\; y = \arccos(x)} \xrightarrow[\text{der x–Achse}]{\text{Spiegelung an}} \boxed{K_2:\; y = -\arccos(x)}$

$\xrightarrow[\text{nach rechts } (\vec{v}_x)]{\text{Verschiebung um 1}} \boxed{K_3:\; y = -\arccos(x-1)}$

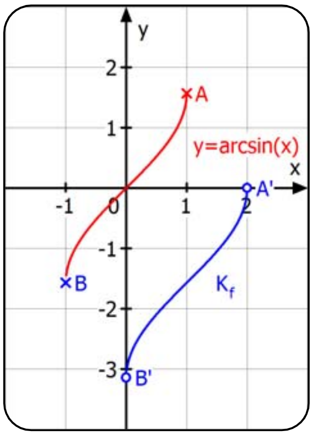
$\xrightarrow[\text{nach oben } (\vec{v}_y)]{\text{Verschiebung um } \pi} \boxed{K_4:\; y = -\arccos(x-1) + \pi}$



Damit wird aus dem Definitionsbereich $\mathbf{D}_1 = [-1;1]$ von arccos
der Definitionsbereich von f: $\quad \mathbf{D} = [0;2]$.
Oder so: Definitionsbereich für $y = \arccos(u)$: $-1 \le u \le 1$
Das heißt $-1 \le x-1 \le 1 \quad |+1 \quad$ ergibt $0 \le x \le 2$.
Wertebereiche:

$\mathbf{W}_1 = [0;\pi] \longrightarrow \mathbf{W}_2 = [-\pi;0] \longrightarrow \mathbf{W}_3 = [-\pi;0] \longrightarrow \mathbf{W}_4 = [0;\pi]$

c) $f(x) = \arcsin(x-1) - \frac{\pi}{2}$



Dir Kurve $y = \arcsin(x)$ wurde dabei um 1 nach rechts verschoben
und um $\frac{\pi}{2}$ nach unten.

Damit entstand aus $\quad \mathbf{D}_{\arcsin} = [-1;1] \quad \mathbf{D}_f = [0;2]$

und aus $\quad \mathbf{W}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \mathbf{W}_f = [-\pi;0]$

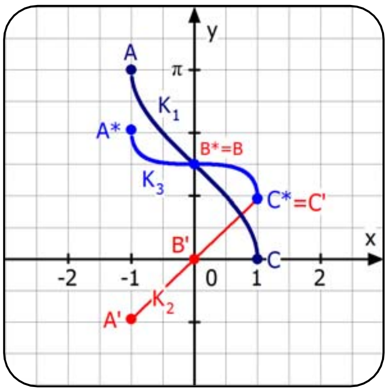
Oder so: Bed. für arcsin(u): $-1 \le u \le 1$ d. h. $-1 \le x-1 \le 1 \quad | +1$
Ergibt: $\quad 0 \le x \le 2 \;\Rightarrow\; \mathbf{D}_f = [0;2]$

d) $f(x) = x + \arccos(x)$ Bilderzeugung durch Ordinatenaddition:

Die Abb. enthält die dunkelblaue Kurve K_1 von $y = \arccos(x)$ durch die Punkte A, B und C.

Ferner die Ursprungsgerade $y = x$ von A' bis C'.

Addiert man an den Stellen -1, 0 und 1 die y-Koordinaten der roten Punkte, entstehen die blauen Punkte A*, B*, C* die zum Graphen von f gehören.



Es ist $\mathbf{D} = [-1;1]$ und $\mathbf{W} = [\pi - 1; 2]$

In B* hat K eine waagrechte Tangente,

Beweis durch die Ableitung: $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $f'(0) = 1 - 1 = 0$

B' ist sogar Terassenpunkt.

e) $f(x) = \arcsin(x) - \sqrt{x}$

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = [0;1]$.

Die Abbildung zeigt

K_1: $y = \arcsin(x)$

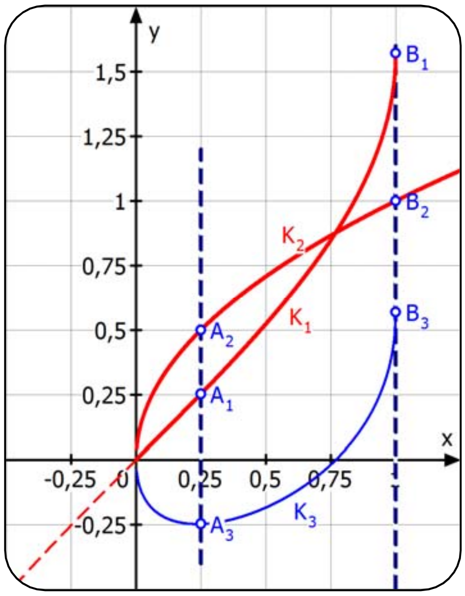
K_2: $y = \sqrt{x}$

K_3: $y = \arcsin(x) - \sqrt{x}$

Für K_3 ermittelt man einige Punkte durch Ordinatensubtraktion.

Beispiel: Die y-Koordinate von A_3 entsteht durch durch Subtraktion der y-Koordinaten von A_1 und A_2.

Dasselbe gilt für die B-Punkte.



Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$

Man erkennt, dass f' die Polstellen 0 und 1 hat. Der Graph von f hat also im Ursprung und in B_3 je eine senkrechte Tangente.

Berechnung des Extrempunktes mit waagrechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x} - \sqrt{1-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x} = \sqrt{1-x^2}$$

Quadrieren: $4x = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 1 = 0$

$$x_E = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Die Stelle $-2 - \sqrt{5}$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs.

Extremstelle ist also $x_E = -2 + \sqrt{5} \approx 0{,}236$

mit dem minimalen Funktionswert: $y_E \approx -0{,}24755$

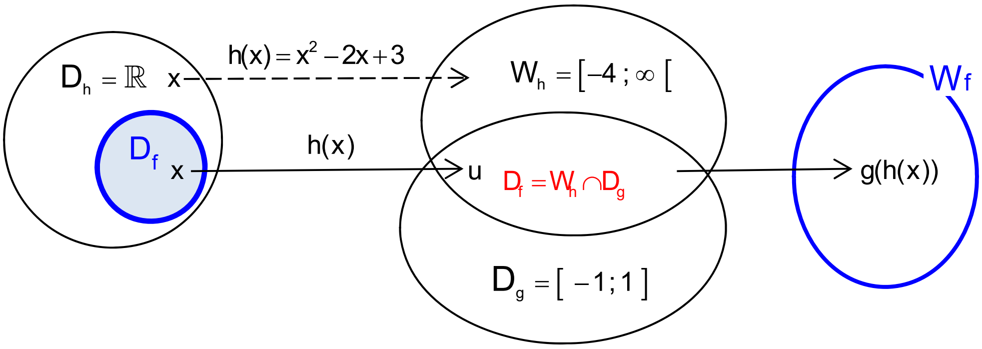
Damit kennt man die Wertmenge: $\mathbf{W} = \left[-0{,}24755\,;\, f(1) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}5708\right]$

f) $f(x) = \arcsin(x^2 - 2x - 3)$

Hier wird f als Verkettung von $u = h(x) = x^2 - 2x + 3$ und $y = g(u) = \arcsin(u)$ gebildet.

(1) h hat den Definitionsbereich $\mathbf{D}_h = \mathbb{R}$. Das Schaubild von h ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel (Tiefpunkt) $S(1 \mid -4)$. Also ist die Wertmenge $\mathbf{W}_h = [-4\,,\infty\,[$.

(2) $g(u) = \arcsin(u)$ stellt die Funktionswerte von f aus denen von h her und hat den Definitionsbereich $\mathbf{D_g} = [-1;1\,]$.



Die Funktion $g(u) = \arcsin(u)$ kann nur Zahlen verarbeiten, die einerseits in $\mathbf{D}_g$ liegen und andererseits von h geliefert werden, also aus $\mathbf{W}_h$ stammen und somit in der Schnittmenge $W_h \cap D_g$ liegen. Die Frage lautet nun: Für welche $x \in \mathbf{D}_h$ liefert h Werte, die in $[-1;1\,]$ liegen?

Bestimmung des Definitionsbereichs von f:

Für $g(u) = \arcsin(u)$ gilt:		$-1 \le u(x) \le 1$.
d. h.		$-1 \le x^2 - 2x - 3 \le 1$

Berechnung der Randwerte:

(1): $x^2 - 2x - 3 = -1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

(2) $x^2 - 2x - 3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{3,4} = \frac{2 \pm 16}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

Also gilt $-1 \le u(x) \le 1$ für $1 - \sqrt{5} \le x \le 1 - \sqrt{3}$ ODER für $1 + \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{5}$

Ergebnis: $\mathbf{D_f} = \left[1 - \sqrt{5}\,; 1 - \sqrt{3}\right] \cup \left[1 + \sqrt{3}\,; 1 + \sqrt{5}\right]$.

Berechnung der Randpunkte:

$x_4 = 1 - \sqrt{5} \approx -1{,}236$ mit $u\left(1 - \sqrt{5}\right) = 1$ und $f(x_4) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

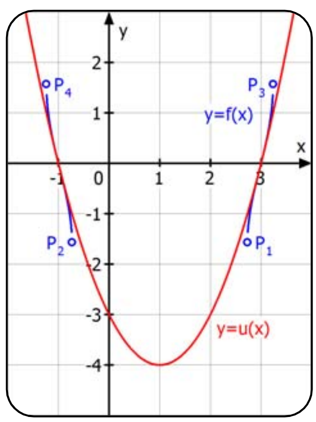
$x_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}732$ mit $u\left(1 - \sqrt{3}\right) = -1$ und $f(x_2) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$x_3 = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}236$ mit $u\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1$ und $f(x_3) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$x_1 = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}732$ mit $u\left(1 + \sqrt{3}\right) = -1$ und $f(x_1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

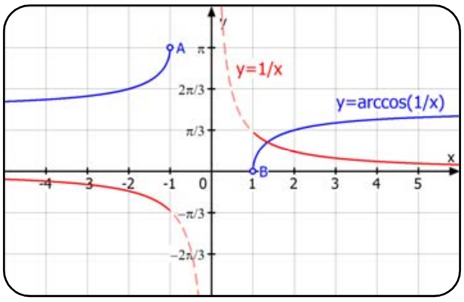
$P_4\left(1 - \sqrt{5} \mid \frac{1}{2}\pi\right)$ Hochpunkt $P_2\left(1 - \sqrt{3} \mid -\frac{1}{2}\pi\right)$ Tiefpunkt.

$P_3\left(1 + \sqrt{5} \mid \frac{1}{2}\pi\right)$ Hochpunkt $P_1\left(1 + \sqrt{3} \mid -\frac{1}{2}\pi\right)$ Tiefpunkt.



Der Graph besteht also aus den zwei leicht gekrümmten (blauen) Linien P_1P_3 und P_2P_4

Aufgabe 8 Bestimme die Definitionsbereiche:



a) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

Der Definitionsbereich von $\arccos(u)$ ist $\mathbf{D}_u = [-1;1]$

Damit $u(x) = \frac{1}{x}$ diese Werte erreicht, muss gelten:

$$-1 \le \frac{1}{x} \le 1$$

1. Fall: $-1 \le \frac{1}{x} < 0 \quad | \cdot x\,(<0) \quad -x \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -1$ (x ist hier negativ!)

2. Fall: $0 < \frac{1}{x} \le 1 \quad | \cdot x\ (>0) \quad 1 \le x \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 1$ (x ist hier positiv)

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \left]-\infty;-1\right] \cup \left[1;\infty\right[$ bzw. $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \left]-1;1\right[$

Zusatz:

1) Die Randextrempunkte sind $A(-1\,|\,\pi)$ und $B(1\,|\,0)$

Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote $y = \frac{\pi}{2}$ für $x \to \pm\infty$

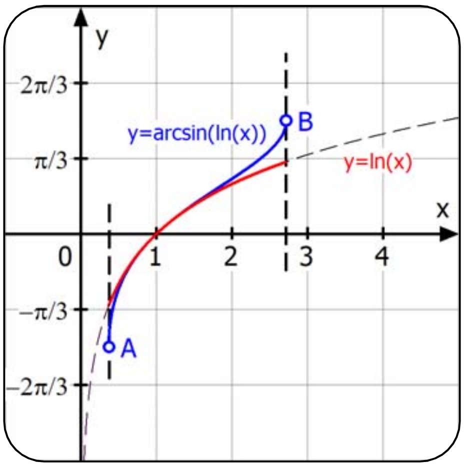
denn es gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \arccos(u) = \frac{\pi}{2}$

Also folgt: $\mathbf{W} = [0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

2) Ableitung: $f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

f' hat die Polstellen $x = \pm 1$. Das bedeutet, dass der Graph von f in A und B je eine **senkrechte Tangente** hat.

b) $f(x) = \arcsin(\ln x)$



Der Definitionsbereich von $\arcsin(u)$ ist $\mathbf{D}_u = [-1;1]$

Damit $u(x) = \ln(x)$ diese Werte erreicht, muss gelten:

$$-1 \le \ln x \le 1 \quad \text{d. h.} \quad e^{-1} \le x \le e^1$$

Also ist der Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \left[e^{-1};e\right]$

Die Randextrempunkte sind $A\left(e^{-1}\,|\,-\frac{\pi}{2}\right)$ und $B\left(e\,|\,\frac{\pi}{2}\right)$

Zusatz:

Ableitung: $f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln(x))^2}} = \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-(\ln(x))^2}}$

Da in D gilt $x > 0$, ist $f'(x) > 0$. Weil f in D stetig ist, wächst f dort streng monoton.

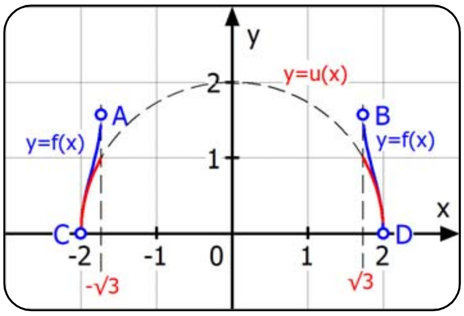
Also ist der Wertebereich $\mathbf{W} = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

In den Randpunkten hat der Graph jeweils eine **senkrechte Tangente**,

denn f' hat die Polstellen dort, wo gilt

$$1-(\ln(x))^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln(x))^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = e,\ x_2 = e^{-1}$$

c) $f(x) = \arcsin\sqrt{4-x^2}$



Der Definitionsbereich von $\arcsin(u)$ ist $\mathbf{D}_u = [-1;1]$

Damit $u(x) = \sqrt{4-x^2}$ diese Werte erreicht, muss gelten:

$-1 \le \sqrt{4-x^2} \le 1$ d. h. $4-x^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 \ge \sqrt{3}$

Das führt zu $x \le -\sqrt{3}$ und $x \ge \sqrt{3}$.

Zusätzlich muss man den Definitionsbereich von u berücksichtigen: $4-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$

Daraus ergibt sich der Definitionsbereich für f: $\mathbf{D}_f = \left[-2;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3};2\right]$

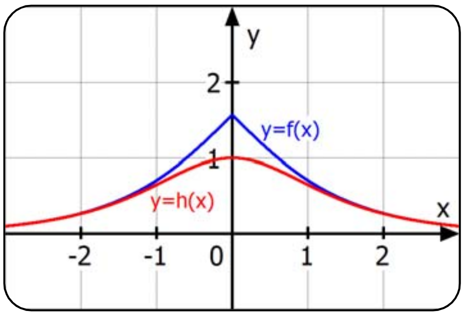
Die Randextrempunkte sind $A\left(-\sqrt{3}\,|\,\frac{\pi}{2}\right)$ und $B\left(\sqrt{3}\,|\,\frac{\pi}{2}\right)$

und außerdem die Punkte $C(-2\,|\,0)$, $D(2\,|\,0)$.

Die Wertmenge ist daher $\mathbf{W} = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Aus $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(4-x^2\right)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{4-x^2}}$ erkennt man, dass f' bei $x = \pm 2$ und bei $x = \pm\sqrt{3}$ Polstellen hat. In A, B, C und D hat also K senkrechte Tangenten

d) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)$



Der Definitionsbereich von $\arcsin(u)$ ist $\mathbf{D}_u = [-1;1]$

1. Methode:

Untersuchung der Hilfsfunktion

$u = h(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 2 \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)^{-1}$

$h'(x) = -2\left(e^x + e^{-x}\right)^{-2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = -2\frac{e^x - e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$

Extremwert: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \quad | \cdot e^x \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow x_E = 0$

mit $u(0) = \frac{2}{e^0 + e^{-0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

Für $x > 0$ ist $e^x > e^{-x} \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow$ u fällt streng monoton.

Für $x < 0$ ist $e^x < e^{-x} \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow$ u wächst streng monoton.

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 \cdot e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 \cdot e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2 \cdot 0}{1+0} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot e^{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{2x} + 1} = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0$

Damit erkennt man $W_h =]\,0;1\,]$, Die Werte von h passen alle zu D_u.

Das heißt $\mathbf{D}_f = \mathbf{D}_h = \mathbb{R}$

2. Methode: **Bedingung für den Definitionsbereich:** $-1 \le \frac{2}{e^x + e^{-x}} \le 1$

Da $\frac{2}{e^x + e^{-x}} > 0$, muss man nur $\frac{2}{e^x + e^{-x}} \le 1$ untersuchen.

Dies bedeutet:
$$2 \le e^x + e^{-x} \quad | \cdot e^x$$
$$2e^x \le \left(e^x\right)^2 + 1$$
$$0 \le \left(e^x\right)^2 - 2e^x + 1$$

Die rechte Seite ist $\left(e^x - 1\right)^2$ und daher stets 0.

Daher ist die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, d. h. $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}$

Berechnung der Wertmenge von f:

Dazu benötige ich die **Ableitungsfunktion:** ***(Es wird jetzt ganz schwer!)***

$f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)$ schreibe ich zuerst um in $f(x) = \arcsin(u)$ mit

$$u(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 2 \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)^{-1}$$

Die Kettenregel verlangt $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

Dabei ist $u'(x) = -2\left(e^x + e^{-x}\right)^{-2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = -2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$ (*)

Also folgt:

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}}} \cdot \frac{(-2) \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4}{(e^x + e^{-x})^2}}} \cdot \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(e^x + e^{-x})}{\sqrt{e^{2x} + 2 \cdot \boxed{e^x e^{-x}} + e^{-2x} - 4}} \cdot \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{-2 \cdot (e^x + e^{-x})}{\sqrt{e^{2x} + \boxed{2} + e^{-2x} - 4}} \cdot \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot (e^x + e^{-x})}{\sqrt{e^{2x} - \boxed{2} + e^{-2x}}} \cdot \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{-2}{\sqrt{e^{2x} - 2\boxed{e^x e^{-x}} + e^{-2x}}} \cdot \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}} \cdot \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{-2}{\left|e^x - e^{-x}\right|} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)}$$

Diese Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert, denn $e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$.

Zur weiteren Vereinfachung macht man eine Fallunterscheidung:

Ist x > 0, dann ist $e^x > e^{-x}$ und $e^x - e^{-x} > 0$, also $\left|e^x - e^{-x}\right| = e^x - e^{-x}$:

$$f'(x) == \frac{-2}{\left|e^x + e^{-x}\right|} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{-2}{\cancel{\left(e^x - e^{-x}\right)}} \frac{\cancel{\left(e^x - e^{-x}\right)}}{\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{-2}{e^x + e^{-x}} < 0$$

Also fällt f für x > 0 streng monoton.

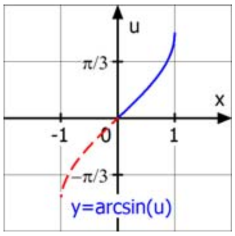
Ist x < 0, dann ist $e^x < e^{-x}$ und $e^x - e^{-x} < 0$, also $\left|e^x - e^{-x}\right| = -\left(e^x - e^{-x}\right)$:

$$f'(x) == \frac{-2}{\left|e^x + e^{-x}\right|} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{-2}{-\cancel{\left(e^x - e^{-x}\right)}} \frac{\cancel{\left(e^x - e^{-x}\right)}}{\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} > 0$$

Also steigt f für x < 0 streng monoton.

Berechnung von Grenzwerten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{u\to 0} \arcsin(u) = 0 \text{ und } f(0) = \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2} ,$$



Weil $W_h = \left]\, 0\,;1 \,\right]$ gilt, also $0 < u \le 1$ gilt, ist f(x) sicher psitiv.

Außerdem gilt:

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \frac{-2}{1+1} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = \frac{2}{1+1} = 1. \; ,$$

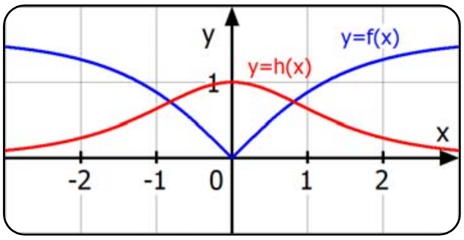
d. h. die Tangenten in der Spitze $S\left(0 \mid \tfrac{\pi}{2}\right)$ haben somit die Steigungen 1 und -1 und bilden damit einen rechten Winkel.

Damit hat bdas Schaubild von f be i x = 0 eine Spitze und somit den Maximalwert

$$f(0) = \arcsin(\frac{2}{1+1}) = \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2} \; .$$

Ergebnis: $\mathbf{W_f} = \left]\, 0\,; \tfrac{\pi}{2} \right]$.

e) $f(x) = \arccos\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)$



Der Definitionsbereich von $\arccos(u)$ ist $\mathbf{D}_u = [-1;1]$

Untersuchung der Hilfsfunktion

$$u = h(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 2 \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)^{-1}$$

$$h'(x) = -2\left(e^x + e^{-x}\right)^{-2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = -2 \frac{e^x - e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

Extremwert: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \mid \cdot e^x \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow x_E = 0$

mit $u(0) = \frac{2}{e^0 + e^{-0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

Für x > 0 ist $e^x > e^{-x} \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow$ u fällt streng monoton.

Für x < 0 ist $e^x < e^{-x} \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow$ u wächst streng monoton.

Grenzwerte:
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2 \cdot 0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{\left(e^x + e^{-x}\right) \cdot e^{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{2x} + 1} = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0$$

Damit erkennt man $W_h =]\,0;1\,]$, Die Werte von h passen alle zu D_u. Das heißt $\mathbf{D}_f = \mathbf{D}_h = \mathbb{R}$

Man kann auch so begründen:

$W_h =]\,0;1\,]$, denn der Graph von h ist symmetrisch zur y-Achse und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$.

Das Maximum liegt also bei x = 0 und ist h(0) = 1.

h liefert also Werte, die in $\mathbf{D}_u$ liegen. Also können für x alle reelle Zahlen verwendet werden:
$\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_f = \mathbb{R}$

Und es folgt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 0} \arccos(u) = \frac{\pi}{2}$ und $f(0) = \arccos(1) = 0$,

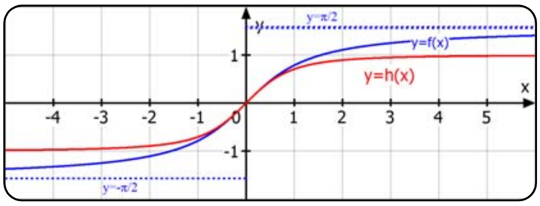
also $\mathbf{W}_f = \left[\,0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}}} \cdot \frac{(-2) \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \ldots = \frac{2}{\left|e^x - e^{-x}\right|} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)}$$

Es folgt: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \frac{2}{1+1} = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \frac{-2}{1+1} = -1$.

Die Tangenten in der Spitze $S(0\,|\,0)$ haben somit die Steigungen 1 und -1 und bilden damit einen rechten Winkel.

f) $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



1. Methode für den Definitionsbereich von f:

Der Definitionsbereich von $\arcsin(u)$ ist $\mathbf{D_u} = [-1;1]$

Wertebereich der Hilfsfunktion $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$:

Der **Definitionsbereich** von h ist $\mathbf{D_u} = \mathbb{R}$.

Grenzwerte von h: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Für x > 0 ist $|x| = x$, also: $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Für x < 0 ist $|x| = -x$, also $= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1-0}} = -1$

$$h'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{x^2+1} = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

Da f stetig ist und $h'(x) > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, steigt h streng monoton von -1 bis 1.

Daher ist die Wertmenge: $\mathbf{W_u} =]-1;1[$

Wir haben also: $\boxed{\mathbf{D_h} = \mathbb{R}} \xrightarrow{h} \boxed{\mathbf{W_h} =]-1;1[} \subset \boxed{D_g = [-1;1]} \xrightarrow{g} \boxed{W_g = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$

Weil folglich alle reellen Zahle Werte liefern, die im Definitionsbereich von g(u) = arcsin (u) liegen, gilt: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Möglichkeit: Bedingung: $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

Da der Graph von h punktsymmetrisch zu O ist, genügt die Untersuchung

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad x \le \sqrt{x^2+1}$$

Dies ist stets erfüllt, da $x^2+1 > x^2$ ist.

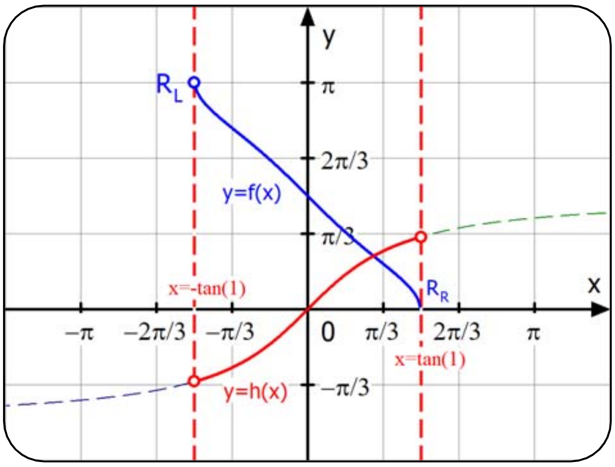
Also ist $D_f = \mathbb{R}$.

Aus $\mathbf{W_h} =]-1;1[$ folgt dann $\mathbf{W_f} = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

denn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to-1} f(u) = -\frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 1} f(u) = \frac{\pi}{2}$

Damit hat K_f die Asymptoten $y = \frac{\pi}{2}$ (für $x\to\infty$) und $y = -\frac{\pi}{2}$ (für $x\to-\infty$)

g) $f(x) = \arccos(\arctan(x))$



Die Hilfsfunktion $h(x) = \arctan(x)$ liefert nur dann Argumente für $y = \arcsin(u)$ solange gilt: $-1 \le \arctan(x) \le 1$

Wegen $\arctan(x) = 1 \iff x = \tan(1) \approx 1{,}557$ bedeutet das $-1{,}557 \le x \le 1{,}557$

Also ist $\mathbf{D}_f \approx [-1{,}557\,;\,1{,}557]$

und $\mathbf{W}_f = [0\,;\,\pi]$.

Ableitung:

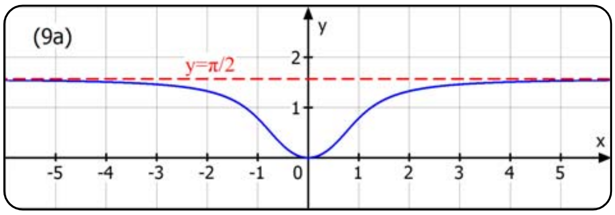
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = \frac{-1}{\sqrt{1-\arctan^2(x)}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-\arctan^2(x)}}$$

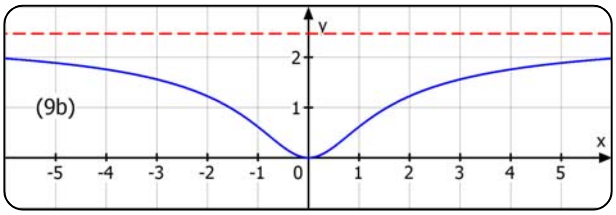
An den Stellen $x = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $\arctan^2(x) = 1$, so dass der Nenner von $f'(x)$ Null wird. Dort hat also der Graph je eine senkrechte Tangente.

Aufgabe 9 Berechne die Ableitung der Funktion und gib ihre Wertmenge an.

a) $f(x) = \arctan\left(x^2\right)$ $\qquad \arctan(u)' = \frac{u'}{1+u^2}$, also $\qquad f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

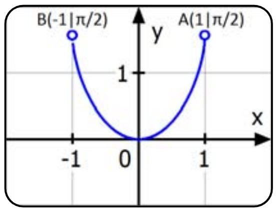
Wertmenge: $\qquad \mathbf{W} = \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$





b) $f(x) = \arctan^2(x)$ $\qquad f'(x) = 2\cdot\arctan(x)\cdot\frac{1}{1+x^2} = 2\cdot\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$, $\mathbf{W} = \left[0\,;\frac{\pi^2}{4}\right[$

c) $f(x) = x\cdot\arcsin(x)$ $\qquad f'(x) = 1\cdot\arcsin(x) + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$\mathbf{W}_{\text{arcsin}} = \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Durch Multiplikation mit x entsteht $\mathbf{W} = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

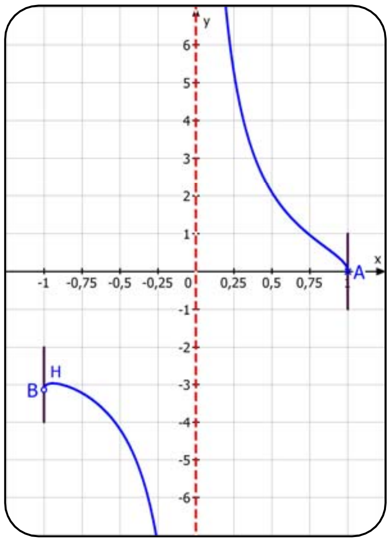
d) $f(x) = \frac{\arccos(x)}{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x - 1\cdot\arccos(x)}{x^2} = -\frac{x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos(x)}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$

$\mathbf{D} = [-1;1]\setminus\{0\}$, $\quad \mathbf{W} = \mathbb{R}\setminus\left]y_H\,;0\right[$

Die Funktion hat die Polstelle 0, der Graph also die senkrechte Asymptote y = 0. Die Funktion f' hat die Polstellen 1 und -1, d. h. dort hat K_f je eine senkrechte Tangente.

Da die Gleichung $f'(x) = 0$ nicht lösbar ist, kann nicht wissen, dass es einen Hochpunkt gibt.

Hier hilft z. B. eine Wertetafel (etwa mit CASIO ClassPad).

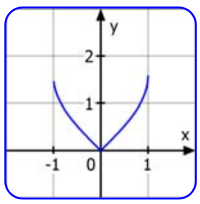


(Sehr ausführliche Lösung dieser Aufgabe im Anhang auf Seite 23 bis 26)

y1=cos⁻¹(x)/x

x	y1
−0.9250	−2.9750
−0.9300	−2.9733
−0.9350	−2.9723
−0.9400	−2.9717
−0.9450	−2.9718
−0.9500	−2.9727
−0.9550	−2.9743

e) $f(x) = \arccos\left[\sqrt{1-x^2}\right]$



$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Also gilt für x > 0; $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und für $x < 0$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

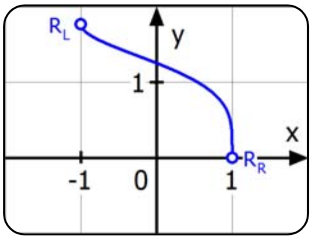
Definitionsbereich: $1-x^2 \geq \;\Leftrightarrow\; x^2 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; |x| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 1$

$\mathbf{D} = [-1;1]$

f) $f(x)=\sqrt{\arccos(x)}$

Für alle $x\in[-1;1]$ ist $\arccos(x)\geq 0$. Somit kann man auch aus jedem Wert die Wurzel ziehen.

Der Definitionsbereich für f ist also $\mathbf{D}=[-1;1]$.



$$f'(x)=\frac{\arccos(x)'}{2\sqrt{\arccos(x)}}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{\arccos(x)}}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\arccos(x)}}<0$$

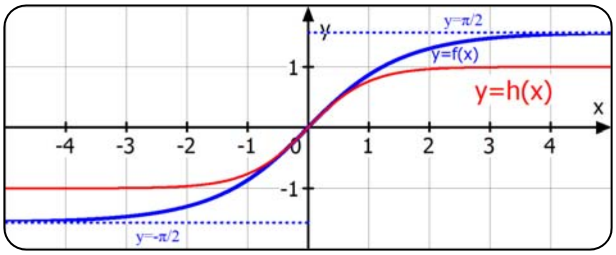
f fällt also streng monoton von $f(-1)=\sqrt{\arccos(-1)}=\sqrt{\pi}$ bis

$f(1)=\sqrt{\arccos(1)}=\sqrt{0}=0$.

Die Randpunkte sind $R_L\left(-1|\sqrt{\pi}\right)$ und $R_R(1|0)$

und die Wertmenge ist $\mathbf{W}=\left[0;\sqrt{\pi}\right]$.

g) $f(x)=\arcsin\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$,



Die Argumentfunktion $u=h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

hat $\mathbf{D}_h=\mathbb{R}$ und ist stetig in $\mathbb{R}$.

Randgrenzwerte: $$\lim_{x\to-\infty}u(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ \boxed{\substack{\text{mit } e^x\\ =\\ \text{erweitern}}}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}u(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ \boxed{\substack{\text{mit } e^{-x}\\ =\\ \text{erweitern}}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Wegen $$u'(x)=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{\left[e^{2x}+2+e^{-2x}\right]-\left[e^{2x}-2+e^{-2x}\right]}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}>0$$

wächst u streng monoton von -1 bis 1. Also ist die Wertmenge der Funktion h: $\mathbf{W}_h=\left]-1;1\right[$

Und das Schaubild von h hat zwei waagrechten Asymptoten:

Für $x\to-\infty$: $y=-1$ und für $x\to\infty$: $y=1$.

Die Wertmenge von h ist Teilmenge des Definitionsbereichs $[-1;1]$ von $g(u)=\arcsin(u)$.

Daher wird die Wertmenge von h zum Definitionsbereich von f: $D_f=\left]-1;1\right[$

Die Wertmenge von f ist $\mathbf{W}=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Begründung:

$$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}}{\sqrt{\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}}}=\frac{\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}}{\frac{2}{\left(e^x+e^{-x}\right)}}=\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}\cdot\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)}{2}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}>0$$

f wächst auch streng monoton, und zwar vom linken Randgrenzwert zum rechten:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(u(x))=\lim_{u\to1}\arcsin(u)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(u(x))=\lim_{u\to-1}\arcsin(u)=-\frac{\pi}{2}$$

Waagrechten Asymptoten Für $x\to-\infty$: $y=-\frac{\pi}{2}$, Für $x\to\infty$: $y=\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 10 Berechne zwei Ableitungen

a) $f_t(x) = t\cdot\arcsin\left(\frac{x}{t}\right)$, $\quad f_t'(x) = t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2-x^2}{t^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{t^2-x^2}}{|t|}} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2-x^2}}$

Für t> 0 ist dann $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{t^2-x^2}}$, für $t < 0$: $\quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{t^2-x^2}}$

Zur Berechnung von f'' schreibt man den Funktionsterm als Potenz, weil im Zähler kein x steht:

$$f_t'(x) = \mathrm{sgn}(t)\cdot\left(t^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_t''(x) = -\tfrac{1}{2}\cdot\mathrm{sgn}(t)\cdot\left(t^2-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) = \mathrm{sgn}(t)\frac{x}{\sqrt{t^2-x^2}^{\,3}}$$

b) $f(x) = 2\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{4-x^2}$ f

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Es gibt eine trickreiche weitere Umformung, wenn man den Nenner gemäß der 3. binomischen Formel ändert:

$$f'(x) = \frac{2+x}{\sqrt{(2+x)(2-x)}} = \frac{2+x}{\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}} = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$$

Zweite Ableitung mit der Quotienten-/Kettenregel berechnen:

Aus $f(x) = \sqrt{u} \quad\Rightarrow\quad f'(u) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ mit $u = \frac{2+x}{2-x} \quad\Rightarrow\quad u' = \frac{1(2-x)+1(2+x)}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}$

$$f''(x) = \frac{\frac{4}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}} = \frac{2\sqrt{2-x}}{(2-x)^2\sqrt{2+x}} = \frac{2}{\sqrt{2-x}^{\,3}\sqrt{2+x}}$$

c) $f(x) = \frac{t^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{t^2-x^2}$

$$f'(x) = \frac{t^2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{t^2-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{t^2-x^2}} = \frac{t}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}} + \frac{1}{2}\sqrt{t^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{t^2-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{t}{2\sqrt{\frac{t^2-x^2}{t^2}}} + \frac{1}{2}\sqrt{t^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{t^2-x^2}} = \frac{t}{\frac{2}{|t|}\sqrt{t^2-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{t^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{t^2-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{t\cdot|t|}{2\sqrt{t^2-x^2}} + \frac{\sqrt{t^2-x^2}^{\,2}}{2\sqrt{t^2-x^2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{t^2-x^2}} = \frac{t\cdot|t|+t^2-x^2-x^2}{2\sqrt{t^2-x^2}} = \frac{t\cdot|t|+t^2-2x^2}{2\sqrt{t^2-x^2}}$$

Die 2. Ableitung ist hier nur Schikane ….

d) $f(x) = \arccos(1-x) - \sqrt{2x-x^2}$

Zuerst: $\arccos(1-x)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-2x+x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

und $\sqrt{2x-x^2}\,' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

Daraus ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} \qquad (*)$$

Man kann diesen Term auch so schreiben: $f'(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ (*)

Oder den Nenner durch Erweitern mit $\sqrt{2-x}$ noch rational machen:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}{2-x} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{2-x}$$

Berechnung der 2. Ableitung aus $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$ mittels Quotientenregel.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{2-x} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}\cdot\sqrt{x}}{2-x}$$ Erweitern mit $2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{2-x}\cdot 2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}\cdot\sqrt{x}\cdot 2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}{(2-x)\cdot 2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(2-x) + x}{(2-x)\cdot 2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}} = \frac{2}{2(2-x)\sqrt{2-x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}^3\cdot\sqrt{x}}$$

e) $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ mit $f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ und $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

$$u'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+16} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\cdot x}{x^2+16} = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+16}\cdot\sqrt{x^2+16} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\cdot\sqrt{x^2+16}}{\left(x^2+16\right)\cdot\sqrt{x^2+16}}$$

$$u'(x) = \frac{\left(x^2+16\right)-x^2}{\sqrt{x^2+16}^3} = \frac{16}{\sqrt{x^2+16}^3}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{16}{\sqrt{x^2+16}^3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+16}}} = \frac{\frac{16}{\sqrt{x^2+16}^3}}{\sqrt{\frac{x^2+16-x^2}{x^2+16}}} = \frac{\frac{16}{\sqrt{x^2+16}^3}}{\sqrt{\frac{16}{x^2+16}}} = \frac{16}{\sqrt{x^2+16}^3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+16}}{4} = \frac{4}{x^2+16}$$

Zur Berechnung der zweiten Ableitung schreibe ich $f'(x) = 4\cdot\left(x^2+16\right)^{-1}$:

$$f''(x) = -4\cdot\left(x^2+16\right)^{-2}\cdot 2x = -\frac{8x}{\left(x^2+16\right)^2}$$

f) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ mit $u=\frac{2x}{1-x^2}$

$$u'(x)=\frac{2\cdot\left(1-x^2\right)-(-2x)\cdot 2x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2+4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\cdot\frac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{1}{\frac{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}{\cancel{\left(1-x^2\right)^2}}}\cdot\frac{1+x^2}{\cancel{\left(1-x^2\right)^2}}=\frac{1+x^2}{1-2x^2+x^4+4x^2}=\frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1}$$

Jetzt muss man erkennen, dass der Nenner durch die 1. binomische Formel vereinfacht werden kann:

$$f'(x)=\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x^2+1}$$

Für die Berechnung der 2. Ableitung schreibt man $f'(x)=\left(x^2+1\right)^{-1}$

$$f''(x)=-\left(x^2+1\right)^{-2}\cdot 2x=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\quad\text{oder}\quad f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

g) $f(x)=\underbrace{\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}}_{f_1(x)}-\underbrace{\sqrt{x-x^2}}_{f_2(x)}$ $\quad f_1'(x)=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ mit $u=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$$u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\cdot\frac{-1\cdot x-1\cdot(1-x)}{x^2}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}^3}$$

$$f_1'(x)=\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}^3}=-\frac{1}{\frac{x+1-x}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}^3}=-\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}^3}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$f_2'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$f'(x)=f_1'(x)-f_2'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}-\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Trickumformung: $\quad f'(x)=\frac{-2(1-x)\cdot\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x(1-x)}\cdot\sqrt{1-x}}=\frac{-\cancel{(1-x)}\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{1-x}^2}}=\boxed{-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}}=-\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

Zweite Ableitung (des umrahmten Terms):

$$f''(x)=-\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}}{x}\qquad\text{Erweitern mit } 2\sqrt{x}\sqrt{1-x}$$

$$f''(x)=-\frac{-x-(1-x)}{x\cdot 2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}}$$

h) $f(x)=\arctan\left(x\cdot\sqrt{x+1}\right)$ $\qquad f'(x)=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ mit $u=x\cdot\sqrt{x+1}$

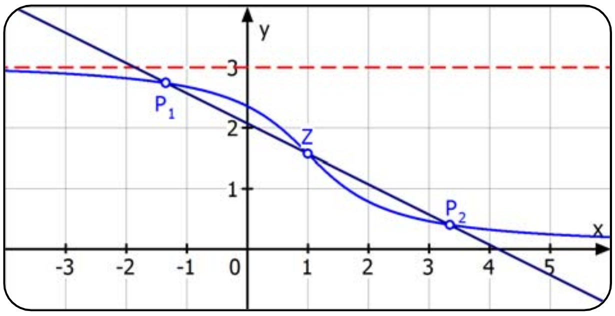
$$u'(x)=1\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}\cdot 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2(x+1)}\cdot\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}\cdot\left(x^3+x^2+1\right)}$$

Aufgabe 11

Beweise, dass der Graph von $f(x)=\arccos\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ punktsymmetrisch ist zu $Z(1\,|\,?)$.

Lösung:



Zunächst berechnet man den Punkt Z bei x = 1:

$$y_Z=f(1)=\arccos\frac{0}{\sqrt{1}}=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$$

Behauptung:

K ist punktsymmetrisch zu $Z\left(1\,|\,\frac{\pi}{2}\right)$.

Zum Beweis muss man zeigen, dass Z der

Mittelpunkt eines beliebigen Punktepaars $P_1\,P_2$ ist, wenn sie symmetrisch bzgl. Z liegen.

d. h. zu $P_1(1-h\,|\,f(1-h))$, $P_2(1+h\,|\,f(1+h))$ ist $\frac{f(1-h)+f(1+h)}{2}=\frac{\pi}{2}$ bzw. $f(1-h)+f(1+h)=\pi$

Nebenrechnungen:

$$f(1-h)=\arccos\frac{1-h+1}{\sqrt{(1-h)^2-2(1-h)+2}}=\arccos\frac{-h}{\sqrt{1-2h+h^2-2+2h+2}}=\arccos\frac{-h}{\sqrt{1+h^2}}$$

$$f(1+h)=\arccos\frac{1+h+1}{\sqrt{(1+h)^2-2(1+h)+2}}=\arccos\frac{h}{\sqrt{1+2h+h^2-2-2h+2}}=\arccos\frac{h}{\sqrt{1+h^2}}$$

$$f(1-h)+f(1+h)=\arccos\underbrace{\frac{-h}{\sqrt{1+h^2}}}_{-a}+\arccos\underbrace{\frac{h}{\sqrt{1+h^2}}}_{a}$$

Im Text 47391 wurde dargestellt, dass die Funktion arccos(x) punktsymmetrisch zu $Q\left(0\,|\,\frac{\pi}{2}\right)$ ist.

Daraus folgte die Beziehung: $\boxed{\arccos(-x)=\pi-\arccos(x)}$

Bei uns heißt es dann $\arccos(-a)=\pi-\arccos(a)$

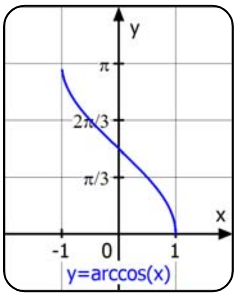
$$\arccos(-a)+\arccos(a)=\pi$$

Und das heißt ausführlicher $f(1-h)+f(1+h)=\pi$

was zu beweisen war.

Anhang: Sehr ausführliche Lösung der Aufgabe 9d

$$f(x) = \frac{\arccos(x)}{x}$$



Definitionsbereich: Für die Funktion u = g(x) = arccos(x) gilt $\mathbf{D}_g = [-1;1]$.
Also folgt für f: $\mathbf{D}_f = [-1;1] \setminus \{0\}$

Zähler = 0: $\arccos(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, denn cos(0) = 1.

Nenner = 0: x = 0.

Auswertung für die Funktion:

Nullstellen: (Zähler = 0 und Nenner $\neq 0$:) $x_N = 1$

Polstellen: (Nenner = 0 und Zähler $\neq 0$:) $x_P = 0$.

Auswertung für den Graphen K von f:

K „schneidet" die x-Achse bei x = 1, also in $N(1|0)$

K hat die senkrechte Asymptote y = 0.

Ableitung: Die Quotientenregel liefert: $f'(x) = \frac{\arccos'(x) \cdot x - 1 \cdot \arccos(x)}{x^2}$

Wegen $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt:

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arccos(x)}{x^2} \quad | \quad \text{Erweitern mit } \sqrt{1-x^2} \text{ ergibt:}$$

$$f'(x) = \frac{-x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = -\frac{x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Monotonieuntersuchung von f':

Zunächst gilt für alle $x \in \mathbf{D}$: $\arccos(x) \geq 0$ und $\sqrt{1-x^2} \geq 0$.

Für x>0 sind somit Zähler und Nenner positiv, also $f'(x) < 0$

Weil f in $]0;1]$ stetig ist, fällt somit in diesem Intervall f streng monoton.

Für x<0 ist das Verhalten des Zählers von f' nicht sofort zu erkennen.

Zunächst helfen zwei Ableitungswerte weiter:

$$f'(-0{,}9) \approx -0{,}773 \quad \text{und} \quad f'(-0{,}95) \approx 0{,}241$$

Wegen der Stetigkeit bedeutet dies, dass im Intervall $]-0{,}95; -0{,}9[$ eine Nullstelle von f' liegen muss. Für das Schaubild F bedeutet dies, dass f links davon steigt, rechts davon fällt. Also besitzt K in diesem Intervall einen **Hochpunkt.**

Die Berechnung der Extremstelle erfolgt auf jeden Fall mit einem Rechner. Wenn man „nur" einen einfachen wissenschaftlichen Rechner zur Verfügung, kann man das Newtonsche Iterationsverfahren verwenden, im Andern Falle z. B. einen CAS-Rechner.

(1) Berechnung dieser Extremstelle mit dem Newtonschen Näherungsverfahren:

Es sei $h(x) = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)$. h hat diese Ableitung:

$$h'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos(x) + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos(x) - 1 = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos(x).$$

Newtonsche Iterationsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \sqrt{1-x_n{}^2} \cdot \arccos(x_n)}{\frac{-x_n}{\sqrt{1-x_n{}^2}} \cdot \arccos(x_n)} = \frac{x_n \cdot \sqrt{1-x_n{}^2} + (1-x_n{}^2) \cdot \arccos(x_n)}{-x_n \cdot \arccos(x_n)}$$

Auf Grund von $f'(-0{,}9) \approx -0{,}773$ und $f'(-0{,}95) \approx 0{,}241$

wähle ich den Startwert $x_0 = -0{,}94$.

Nun folgt Taschenrechnerarbeit …

(2) Berechnung der Extremstelle mit einem CAS-Rechner:

Erg.: K hat den Hochpunkt $H(-0{,}942 \mid -2{,}972)$.

```
Solve(f1(x)=0)
                {x=-0.9416804582}
f(-0.942)
                    -2.971695214
```

Ohne Rechner geht als hier nichts

Wie verhalten sich die Tangentensteigungen bei Annäherung an dien Randpunkte?

Die Ableitung $f'(x) = -\frac{x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$ liefert für $x = \pm 1$ keinen Wert, weil der Nenner 0

wird. Schüler neigen dazu, so zu argumentieren: $f(1) = -\frac{1}{0} = \infty$ Das ist verboten.

Man kann jedoch sagen: f' hat bei $x = \pm 1$ eine Polstelle, weil der Nenner 0 wird, nicht aber der Zähler. Polstelle bedeutet: Bei Annäherung gehen die Werte gehen $\pm\infty$.

Für $x > 0$ ist $f'(x) < 0$, also folgt aus $x \to 1-$ $f'(x) \to -\infty$.

Da bei $x = 1$ der Randpunkt $N(1 \mid 0)$ liegt, hat K dort eine senkrechte Tangente, an die sich K von links kommend fallend annähert.

Für $x \to -1+$ kann man nicht sofort sagen, dass K im Intervall $[-1; x_H]$ steigt. Wir haben nur gezeigt, dass f' im Intervall $]-0{,}95; -0{,}9[$ eine Nullstelle hat und dass $f'(-0{,}95) \approx 0{,}241 > 0$ ist. Aber es besteht keine Erkenntnis darüber, was zwischen -1 und -0,95 passiert.

Hier hilft es, wenn man **x = -1 + h** verwendet: Für $h \to 0$ erreicht man dann $x \to -1$:

Untersuchung des Zählers:

$$Z = x + \sqrt{1-x^2}\cdot \arccos(x) = -1+h + \sqrt{1-(-1+h)^2}\cdot \arccos(-1+h)$$

$$Z = -1+h+\sqrt{1-(1-2h+h^2)}\cdot \arccos(-1+h)$$

$$Z = -1+h+\sqrt{2h-h^2}\cdot \arccos(-1+h)$$

$$\lim_{h\to 0} Z = -1+\boxed{0}+\lim_{h\to 0}\sqrt{2h-h^2}\cdot \lim_{h\to 0}\arccos(-1+h)$$

$$\lim_{h\to 0} Z = -1+0\cdot \arccos(-1) = -1+0\cdot\pi = -1$$

Daraus kann man schließen, dass bei $f'(x) = -\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos(x)}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$

für $h\to 0$ der Zähler gegen -1 geht, und für $x \neq -1$ der Nenner positiv ist, also

ist für $h\to 0$ aber $x > -1$ der Bruch negativ und somit $f'(x) > 0$.

Jetzt weiß man, dass K im linken Randpunkt $L(-1\,|\,-\pi)$ eine senkrechte Tangente hat (Polstelle von f') und ab da steigt.

Es ist noch nicht geklärt, wie sich K von links an die senkrechte Asymptote x = 0 annähert.

Weil in $f'(x) = -\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos(x)}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$ der Nenner immer positiv ist, untersucht man wieder nur den Zähler: $Z = x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos(x)$.

Lässt man x < 0 gegen 0 gehen, geht $\sqrt{1-x^2}\to 1$, und $\arccos(x)\to\frac{\pi}{2}$.

Also geht der Zähler gegen $0+1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ und ist positiv.

Damit nähert sich $f'(x)$ mit negativen Wert dem Wert $-\infty$ an.

K nähert sich also von links fallend der senkrechten Asymptote y-Achse an.

Und nun die Wertmenge

Wir wissen nicht, ob es dann vor der bekannten Extremstelle nochmals weitere Extrempunkte von K gibt, also Vorzeichenwechsel von f'.

Ich will das auch nicht weiter untersuchen.)

Unter der Annahme, dass das nicht der Fall ist, kann man dann die **Wertmenge von f** angeben:

$$\mathbf{W_f} = \mathbb{R}\setminus\,]\,y_H\,;0\,[\ \approx \mathbb{R}\setminus\,]-2{,}972\,;0\,[$$