Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus
Kosinus hyperbolicus
Tangens hyperbolicus

u. a.

Text Nr. 51101

Stand: 25. Mai 2018

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die sogenannten *hyperbolischen Funktionen* werden an Gymnasien in der Regel nicht (mehr) gezielt unterrichtet. Dabei sind sie lediglich spezielle Exponentialfunktionen und kommen in dieser Eigenschaft ohne Nennung ihrer spezifischen Namen durchaus vor.

Was sie so interessant macht, ist ihre Verwandtschaft mit den trigonometrischen Funktionen.
So gibt es diese Funktionen

hyperbolisch		**trigonometrisch**	
$y = \sinh(x)$	*Sinus hyperbolicus*	$y = \sin(x)$	*Sinus*
$y = \cosh(x)$	...	$y = \cos(x)$	Kosinus
$y = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$		$y = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	Tangens
$y = \coth(x) = \dfrac{1}{\tanh(x)}$		$y = \cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$	Kotangens
$y = \operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$		$y = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$	Sekans
$y = \operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)}$		$y = \csc(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$	Kosekans

Die Funktionen Kotangens, Sekans und Kosekans werden seltener verwendet.

In diesem Text werden die hyperbolischen Funktionen eingeführt und beschrieben.

Dazu gibt es den Tabellentext 51102 mit zwei großen Übersichten.

Inhalt

1 sinh und cosh

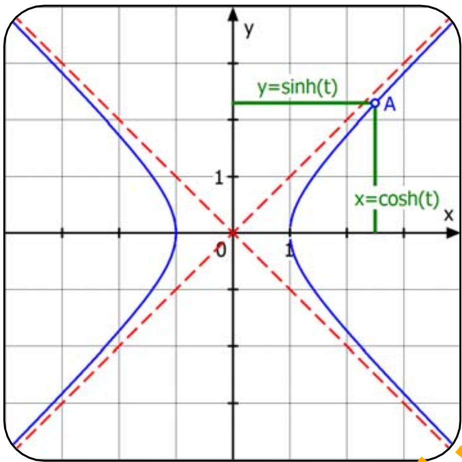
Die Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens nennt man auch **Kreisfunktionen**, weil sie Beziehungen zur Kreisgleichung aufweisen. Daneben gibt es die **hyperbolischen Funktionen,** die eine ähnliche Beziehung zu einer Hyperbelgleichung aufweisen.

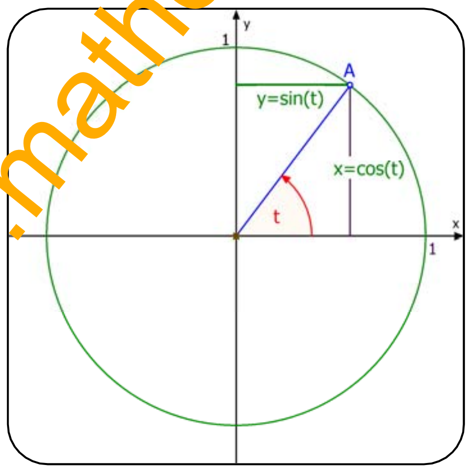
Definition 1 $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Man spricht sinh so aus „Sinus hyperbolicus“ und entsprechend „Kosinus hyperbolicus“.

Hyperbolische Funktionen ***Vergleich*** **Kreisfunktionen**

Zusammenhang mit einer Hyperbel **bzw. einem Kreis.**





A sei der Punkt $A(\cosh(t)\,|\,\sinh(t))$
Auf welcher Ortskurve liegt A?

A sei der Punkt $A(\cos(t)\,|\,\sin(t))$
Auf welcher Ortskurve liegt A?

Man rechnet:

$$x^2-y^2=\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=\frac{\left(e^t+e^{-t}\right)^2-\left(e^t-e^{-t}\right)^2}{4}$$
$$=\frac{\left(e^{2t}+2e^te^{-t}+e^{-2t}\right)-\left(e^{2t}-2e^te^{-t}+e^{-2t}\right)}{4}$$
$$=\frac{\left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)-\left(e^{2t}-2+e^{-2t}\right)}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Also liegt A auf der Kurve mit der Gleichung

$$x^2-y^2=1$$

Sie heißt Hyperbel.

Also liegt A auf der Kurve mit

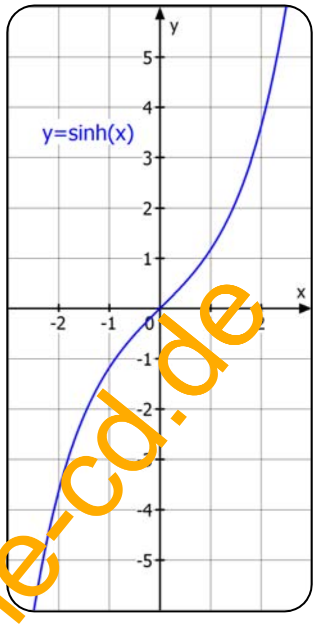
$$x^2+y^2=1$$

Sie ist ein Kreis.

Man merke sich diese Beziehungen:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1 \quad \text{und} \quad \sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Eigenschaften der Funktion sinh:



Symmetrie: Die sinh-Kurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung:

denn: $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$

Ableitung: $\sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

$\sinh'(x) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$\sinh'(x) = \cosh(x)$

Monotonie und Wertmenge:

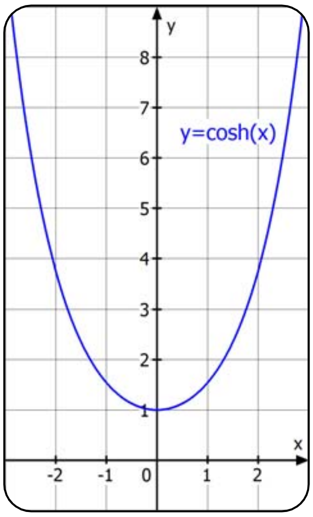
sinh ist stetig in $\mathbb{R}$ und es gilt $\sinh'(x) > 0$,

also wächst sinh streng monoton: $\mathbf{W} = \mathbb{R}$

Stammfunktion: $\int \sinh(x)dx = \tfrac{1}{2}\int\left(e^{x} - e^{-x}\right)dx = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right) + C$

$\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$

Eigenschaften der Funktion cosh:



Symmetrie: Die cosh-Kurve ist symmetrisch zur y-Achse.

denn: $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$

Ableitung: $\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$\cosh'(x) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

$\cosh'(x) = \sinh(x)$

Monotonie und Wertmenge:

cosh ist stetig in $\mathbb{R}$.

Für x > 0 gilt $\cosh'(x) > 0$, für x < 0: $\cosh'(x) < 0$
also fällt cosh für x < 0 und steigt für x > 0. Das Minimum ist

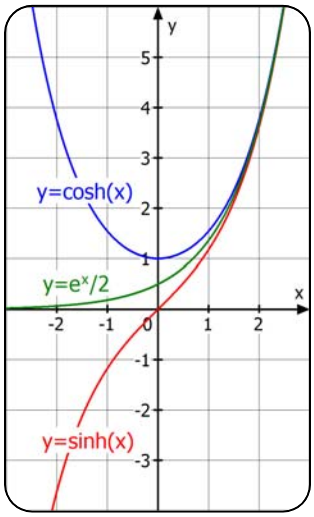
$\cosh(0) = \dfrac{e^{0} + e^{0}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$,

Wertmenge: $\mathbf{W} = [\,1; \infty\,[$.

Stammfunktion: $\int \cosh(x)dx = \tfrac{1}{2}\int\left(e^{x} + e^{-x}\right)dx = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right) + C$

$\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$

Näherungskurven für $x \to \infty$:



Für $x \to \infty$ ist bekanntlich $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$:

Also gilt für große x: $\sinh(x) \approx \dfrac{e^{x}}{2}$ und analog $\cosh(x) \approx \dfrac{e^{x}}{2}$

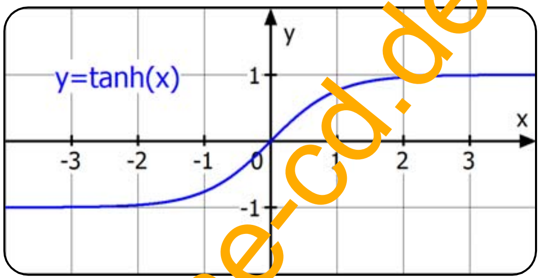
Man erkennt dies gut in folgender Abbildung:

2 tanh und coth

Definition 2 $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

und $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

Eigenschaften der Funktion tanh:



Definitionsbereich:

D $= \mathbb{R}$, denn der Nenner ist stets positiv.

Symmetrieverhalten:

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

Die tanh-Kurve also ist punktsymmetrisch zum Ursprung:

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{\text{durch } e^x}{\overset{\text{kürzen}}{=}} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ wegen der Punktsymmetrie.

Asymptoten Auf Grund dieser Grenzwerte hat die tanh-Kurve zwei waagrechte Asymptoten:
Für $x \to \infty$: $y = 1$, für $x \to -\infty$: $y = -1$.

Ableitung: $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ Nach der Quotientenregel folgt:

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \quad \textbf{oder:}$$

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \textbf{oder} \quad = \operatorname{sech}^2(x)$$

Ergebnis: $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)$

Monotonie und Wertemenge:

Da tanh in $\mathbb{R}$ stetig ist und dort gilt $\tanh'(x) > 0$, steigt die tanh-Funktion streng monoton von -1 bis 1. Also gilt: $|\tanh(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < \tanh(x) \le 1 \Leftrightarrow$ **D** $=]-1; 1[$

Stammfunktion:

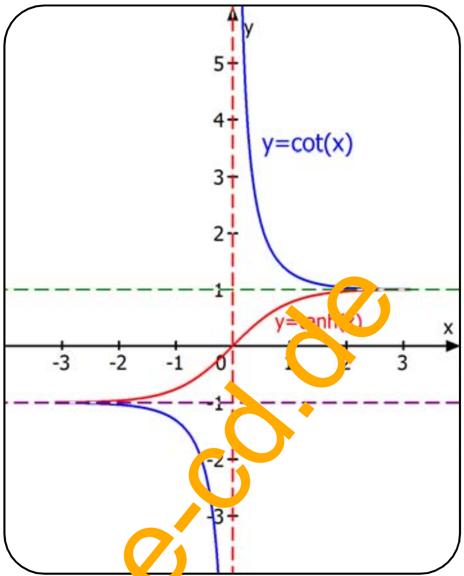
$\int \tanh(x)dx = \int \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}dx$ Substitution: $u = \cosh(x) \Rightarrow du = \sinh(x) \cdot dx$

$\int \tanh(x)dx = \int \dfrac{du}{u} = \ln|u|$ Rücksubstitution: $u = \cosh(x)$

$\int \tanh(x)dx = \ln|\cosh(x)|$ Da Funktion cosh keine negativen Werte hat, kann man den Betrag weglassen: $\int \tanh(x)dx = \ln(\cosh(x)) + C$

Eigenschaften der Funktion coth:

Die Kotangens-Funktion ist die Kehrwertfunktion zur Tangensfunktion:



$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

Es ist $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ und $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$

Definitionsbereich:

Der Nenner hat eine Nullstelle: $e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

$f(x) = \coth(x)$ besitzt die Polstelle x = 0. $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wertmenge: $\mathbf{W} =]-\infty; -1[\cup]1; \infty[= \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$

denn: $|\tanh(x)| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|\tanh(x)|} > 1 \iff |\coth(x)| > 1 \iff \coth(x) < -1$ oder $\coth(x) > 1$

Symmetrie: Die coth-Kurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn es gilt:

$$\coth(-x) = \frac{1}{\tanh(-x)} = -\frac{1}{\tanh(x)} = -\coth(x)$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \coth(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \underset{\text{durch } e^x}{\overset{\text{kürzen}}{=}} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$\lim_{x\to-\infty} \coth(x) = -1$ wegen der Punktsymmetrie.

Asymptoten Auf Grund dieser Grenzwerte hat die tanh-Kurve zwei waagrechte Asymptoten:

Für $x \to \infty$: $y = 1$, für $x \to -\infty$: $y = -1$.

Ableitung: $\cot(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ Nach der Quotientenregel folgt:

$$\coth'(x) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh^2(x)}{\sinh^2(x)} - \frac{\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = 1 - \cot^2(x)$$ **oder;**

$$\coth'(x) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$ **oder** $= -\operatorname{csch}^2(x)$

Ergebnis: $\coth'(x) = 1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)} = -\operatorname{csch}^2(x)$

Monotonie:

Da coth für x < 0 stetig ist und dort gilt $\coth'(x) < 0$, fällt die coth-Funktion streng monoton von −1 bis $-\infty$. Entsprechend fällt sie für x > 0 von ∞ bis gegen 1.

Stammfunktionen:

$\int \coth(x)dx = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}dx$ Substitution: $u = \sinh(x) \Rightarrow du = \cosh(x) \cdot dx$

$\int \coth(x)dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u|$ Rücksubstitution: $u = \sinh(x)$

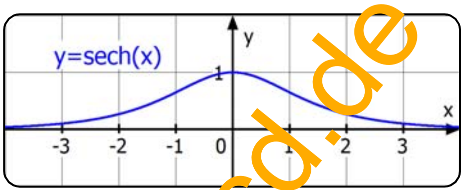
$$\int \coth(x)dx = \ln|\sinh(x)| = \ln(\sinh|x|) \Rightarrow \int \coth(x)dx = \ln(\sinh(|x|)) + C$$

3 sech und csch

Definition 3 $\text{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$ Sekans hyperbolicus

und $\text{csch}(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$ Kosekans hyperbolicus

Eigenschaften der Funktion sech:



Definitionsbereich:

$\mathbf{D} = \mathbb{R}$, denn der Nenner ist stets positiv.

Wertmenge: Für cosh gilt: $\cosh \geq 1$. Für den Kehrwert folgt daraus: $\text{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} \leq 1$

$\mathbf{W} =]\,0\,;1]$

Symmetrie: Die sech-Kurve also ist symmetrisch zur y-Achse, denn

$$\text{sech}(-x) = \frac{1}{\cosh(-x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \text{sech}(x)$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} \text{sech}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \underset{\text{mit } e^{-x}}{\overset{\text{erweitern}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sech}(x) = 0$ wegen der Symmetrie.

Asymptoten Auf Grund dieser Grenzwerte hat die sech-Kurve die x-Achse als waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$.

Ableitung: $\text{sech}(x) = \cosh^{-1}(x) \Rightarrow \text{sech}'(x) = -\cosh^{-2}(x)\cdot\cosh'(x) = -\dfrac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$

Oder $\text{sech}'(x) = -\dfrac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = -\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\cdot\dfrac{1}{\cosh(x)} = -\tanh(x)\cdot\text{sech}(x)$

Monotonie: Für x > 0 ist sinh(x) > 0 $\Rightarrow$ $\text{sech}'(x) < 0$:

Für x < 0 ist sinh(x) < 0 $\Rightarrow$ $\text{sech}'(x) > 0$:

Da die Funktion sech in $\mathbb{R}$ stetig ist bedeutet das, dass die „Sekansh-Kurve“ für x > 0 fällt und für x < 0 steigt.

Stammfunktion: Man schreibt die Funktion um in:

$$\int \text{sech}(x)dx = \int \frac{1}{\cosh(x)}dx \underset{\text{mit } \cosh(x)}{\overset{\text{erweitern}}{=}} \int \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}dx = \int \frac{\cosh(x)}{1+\sinh^2(x)}dx \quad \text{denn}$$

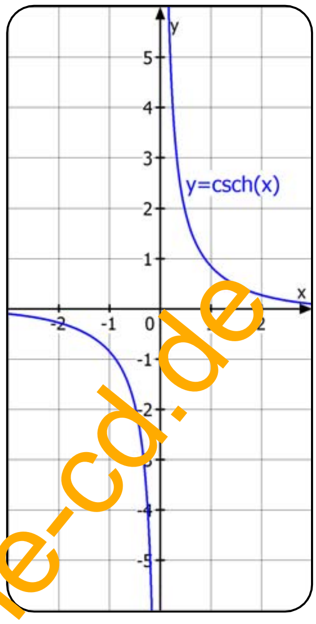
wegen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$

Vereinfachung durch die Substitution $u = \sinh(x) \Leftrightarrow du = \cosh(x)\cdot dx$

$$= \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + C = \arctan(\sinh(x)) + C$$

Ergebnis: $\int \text{sech}(x)dx = \arctan(\sinh(x)) + C$

Eigenschaften der Funktion csch:



$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Definitionsbereich:

Nullstelle des Nenners: $e^x = e^{-x} \mid \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

0 ist also eine Polstelle der Kosekans-Funktion: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie: Die csch-Kurve also ist punktsymmetrisch zu O

: $$\operatorname{csch}(-x) = \frac{1}{\sinh(-x)} = \frac{1}{-\sinh(x)} = -\operatorname{csch}(x)$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} \underset{\text{mit } e^{-x}}{\overset{\text{erweitern}}{=}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{csch}(x) = 0$ wegen der Punktsymmetrie.

Asymptoten Auf Grund dieser Grenzwerte hat die csch-Kurve die x-Achse als waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$.

Ableitung: $\operatorname{csch}(x) = \sinh^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{csch}'(x) = -\sinh^{-2}(x) \cdot \sinh'(x) = -\dfrac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$

oder $$\cosh'(x) = -\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \cdot \frac{1}{\sinh(x)} = -\coth(x) \cdot \operatorname{csch}(x)$$

Monotonie: Da cosh(x) > 0 für alle $x \in \mathbf{D}$, ist $\operatorname{csch}'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbf{D}$

Da csch für x<0 und für x>0 stetig ist, fällt diese Funktion in beiden Teilbereichen streng monoton und zwar: Für $-\infty < x < 0 \Rightarrow$ von 0 bis $-\infty$, für $0 < x < \infty$ von ∞ bis 0.

Wertebereich daher: $\mathbf{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Stammfunktion: 1. Berechnungsmethode:

$$\int \operatorname{csch}(x)\,dx = \int \frac{1}{\sinh(x)}\,dx \underset{\substack{\text{erw. mit}\\ \sinh(x)}}{=} \int \frac{\sinh(x)}{\sinh^2(x)}\,dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)-1}\,dx = \int \frac{du}{u^2-1} \quad \text{denn}$$

wegen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1$

Vereinfachung durch die Substitution $u = \cosh(x) \quad \Leftrightarrow \quad du = \sinh(x) \cdot dx$

Berechnung des Integrals $\int \frac{1}{u^2-1}\,du$ durch Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{A}{u+1} + \dfrac{B}{u-1}$ ....$\mid \cdot (u^2-1)$ ergibt $1 = A(u-1) + B(u+1)$

Für u = 1: $1 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$ und für u = -1: $1 = A \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$

Ergebnis: $\dfrac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{u+1} + \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{u-1}$ Damit folgt:

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = -\tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u+1}\,du + \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u-1}\,du = -\tfrac{1}{2} \cdot \ln|u+1| + \tfrac{1}{2} \cdot \ln|u-1| + C = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

Rücksubstitution: $$\boxed{\int \operatorname{csch}(x)\,dx = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}\right| + C} \qquad (*)$$

Zusatz:

Auf Seite 12 wird diese Umrechnungsformel besprochen:

$$\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}}$$

Daraus folgt: $$\ln\left(\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) = \ln\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}} = \ln\left(\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}\right)$$

Damit kann man (*) umformen in

$$\int \operatorname{csch}(x)dx = \ln\left[\tanh\left(\frac{|x|}{2}\right)\right] + C$$

Stammfunktion: 2. Berechnungsmethode:

Zunächst wird die Funktion sehr trickreich erweitert.

$$\int \operatorname{csch}(x)dx = \int \operatorname{csch}(x)\cdot\frac{\operatorname{csch}(x)+\coth(x)}{\operatorname{csch}(x)+\coth(x)}dx = \int \frac{\operatorname{csch}^2(x)+\coth(x)\operatorname{csch}(x)}{\operatorname{csch}(x)+\coth(x)}dx =$$

Jetzt kann man mit dieser Substitution vereinfachen:

$$u = \operatorname{csch}(x)+\coth(x) \quad\Rightarrow\quad du = u'\cdot dx = \left(\operatorname{csch}'(x)+\coth'(x)\right)dx$$

NR.: $\operatorname{csch}'(x) = -\coth(x)\cdot\operatorname{csch}(x)$

und $\coth'(x) = \dfrac{-1}{\sinh^2(x)} = -\operatorname{csch}^2(x)$

$$du = \left(-\coth(x)\cdot\operatorname{csch}(x)-\operatorname{csch}^2(x)\right)\cdot dx = -\left(\operatorname{csch}^2(x)+\coth(x)\cdot\operatorname{csch}(x)\right)dx$$

Damit wird das Integral zu: $= -\int\frac{du}{u} = -\ln|u| + C$

Rücksubstitution $\int \operatorname{csch}(x)dx = -\ln\left|\operatorname{csch}(x)+\coth(x)\right| + C$

Dies ist eine andere Darstellung derselben Stammfunktion.

(Wer weiß denn sowas?)

4 Zusammenhänge zwischen diesen Funktionen

1. Nach Seite 2 gilt: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

2. Aus den Definitionen erhält man sofort diese Beziehungen:

(1) $$\sinh(x)+\cosh(x)=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)+\left(e^x+e^{-x}\right)}{2}=\frac{2e^x}{2}=e^x$$

(2) $$\cosh(x)-\sinh(x)=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2}=\frac{2e^{-x}}{2}=e^{-x}$$

(3) $$\sinh(x)\cdot\cosh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}=\tfrac{1}{2}\cdot\sinh(2x),$$ siehe (11).

3. Wie bei den trigonometrischen Funktionen gibt es hier **Additionstheoreme:**

(4) $\sinh(u+v)=\sinh(u)\cdot\cosh(v)+\cosh(u)\cdot\sinh(v)$

(5) $\sinh(u-v)=\sinh(u)\cdot\cosh(v)-\cosh(u)\cdot\sinh(v)$

(6) $\cosh(u+v)=\cosh(u)\cdot\cosh(v)+\sinh(u)\cdot\sinh(v)$

(7) $\cosh(u-v)=\cosh(u)\cdot\cosh(v)-\sinh(u)\cdot\sinh(v)$

(8) $$\tanh(u+v)=\frac{\tanh(u)+\tanh(v)}{1+\tanh(u)\cdot\tanh(v)}$$

(9) $$\tanh(u-v)=\frac{\tanh(u)-\tanh(v)}{1-\tanh(u)\cdot\tanh(v)}$$

Beweis von (4):

Linke Seite: $\sinh(u+v)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[e^{u+v}-e^{-u-v}\right]$

Rechte Seite: $$\sinh(u)\cdot\cosh(v)+\cosh(u)\cdot\sinh(v)=\frac{e^u-e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2}+\frac{e^u+e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}$$

$$=\frac{e^{u+v}-\cancel{e^{-u+v}}+\cancel{e^{u-v}}-e^{-u-v}}{4}+\frac{e^{u+v}+\cancel{e^{-u+v}}-\cancel{e^{u-v}}-e^{-u-v}}{4}$$

$$=\frac{2e^{u+v}-2e^{-u-v}}{4}=\tfrac{1}{2}\left(e^{u+v}-e^{-u-v}\right)$$

Die Formeln (5), (6) und (7) lassen sich analog beweisen.

Beweis von (8):

Linke Seite: $$\tan(u+v)=\frac{\sinh(u+v)}{\cosh(u+v)}=\frac{\sinh(u)\cdot\cosh(v)+\cosh(u)\cdot\sinh(v)}{\cosh(u)\cdot\cosh(v)+\sinh(u)\cdot\sinh(v)}$$

Jetzt kürzt man den Bruch durch cosh(u) und durch cosh(v):

$$\tan(u+v)=\frac{\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}+\frac{\sinh(v)}{\cosh(v)}}{1+\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}\frac{\sinh(v)}{\cosh(v)}}=\frac{\tanh(u)+\tanh(v)}{1+\tanh(u)\cdot\tanh(v)}$$

Die Formel (9) lässt sich analog beweisen.

4. Formeln zum doppelten Argument: Für u = v = x folgen aus (4), (6) und (8):

(10) $\sinh(2x) = 2\cdot\sinh(x)\cdot\cosh(x)$

(11) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ Mit $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ folgt

$\cosh(2x) = 2\cdot\sinh^2(x) + 1$ und auch noch

$\cosh(2x) = 2\cdot\cosh^2(x) - 1$

(12) $\tanh(2x) = \dfrac{2\cdot\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$

5. Formeln zum dreifachen Argument:

(13) $\sinh(3x) = 4\sinh^3(x) + 3\sinh(x)$

Denn für v = 2x und u = x folgt aus $\sinh(u+v) = \sinh(u)\cdot\cosh(v) + \cosh(u)\cdot\sinh(v)$:

$$\begin{aligned}\sinh(3x) &= \sinh(x)\cdot\cosh(2x) + \cosh(x)\cdot\sinh(2x)\\ &= \sinh(x)\cdot\left[2\sinh^2(x)+1\right] + \cosh(x)\cdot\left[2\sinh(x)\cdot\cosh(x)\right]\\ &= 2\sinh^3(x) + \sinh(x) + 2\cdot\sinh(x)\cdot\cosh^2(x)\\ &= 2\sinh^3(x) + \sinh(x) + 2\cdot\sinh(x)\cdot\overbrace{\left[1+\sinh^2(x)\right]}\\ \ldots &= 2\sinh^3(x) + \sinh(x) + 2\cdot\sinh(x) + 2\cdot\sinh^3(x)\end{aligned}$$

(14) $\cosh(3x) = 4\cosh^3(x) - 3\cosh(x)$

Denn für v = 2x und u = x folgt aus (6): $\cosh(u+v) = \cosh(u)\cdot\cosh(v) + \sinh(u)\cdot\sinh(v)$

$$\begin{aligned}\cosh(3x) &= \cosh(x)\cdot\cosh(2x) + \sinh(x)\cdot\sinh(2x)\\ &= \cosh(x)\cdot\left[2\cosh^2 - 1\right] + \sinh(x)\cdot\left[2\cdot\sinh(x)\cdot\cosh(x)\right]\\ &= 2\cosh^3(x) - \cosh(x) + 2\sinh^2(x)\cdot\cosh(x)\\ &= 2\cosh^3(x) - \cosh(x) + 2\left[\cosh^2(x) - 1\right]\cdot\cosh(x)\\ &= 2\cosh^3(x) - \cosh(x) + 2\cosh^3(x) - 2\cosh(x)\end{aligned}$$

(15) $\tanh(3x) = \dfrac{\tanh^3(x) + 3\cdot\tanh(x)}{3\cdot\tanh^2(x)+1}$ (Hier ohne Beweis)

6. Formeln zum halben Argument:

(16) $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh(x)-1}{2}}$

(17) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh(x)+1}{2}}$

(18) $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1} = \dfrac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)} = \coth(x) - \operatorname{csch}(x)$

(19) $\coth\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)-1} = \dfrac{\cosh(x)+1}{\sinh(x)} = \coth(x) + \operatorname{csch}(x)$

Beweis zu (16) und (17):

Aus der Formel (11) $\cosh(2x) = 2\sinh^2(x)+1$ folgt, wenn man x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt:

$$\cosh(x) = 2\sinh^2\left(\tfrac{x}{2}\right)+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sinh^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \cosh(x)-1 \quad \text{und daraus:}$$

$$\sinh(\tfrac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$$

Analog dazu erhält man aus $\cosh(2x) = 2\cdot\cosh^2(x)-1$:

$$\cosh(x) = 2\cdot\cosh^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\cosh^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \cosh(x)+1 \quad \text{und daraus:}$$

$$\cosh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}$$

Beweis zu (18):

$$\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}}{\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}} = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}} = \sqrt{\frac{(\cosh(x)-1)\cdot(\cosh(x)-1)}{(\cosh(x)+1)\cdot(\cosh(x)-1)}}$$

$$\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\cosh(x)-1)^2}{\cosh^2(x)-1}} = \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}$$

Man kann den Bruch unter der Wurzel auch anders erweitern und erhält dann:

$$\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}}{\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}} = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}} = \sqrt{\frac{(\cosh(x)-1)\cdot(\cosh(x)+1)}{(\cosh(x)+1)\cdot(\cosh(x)+1)}}$$

$$\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh^2(x)-1}{(\cosh(x)+1)^2}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1}$$

7. Summenformeln (ohne Beweis)

(20) $\sinh(u)+\sinh(v) = 2\cdot\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)$

(21) $\sinh(u)-\sinh(v) = 2\cdot\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)$

(22) $\cosh(u)+\cosh(v) = 2\cdot\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)$

(23) $\cosh(u)-\cosh(v) = 2\cdot\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)$

8. Viele weitere Umrechnungsformeln (Siehe Text 51102 mit großer Tabelle).

(24) $\sinh(x) = \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\cosh^2(x)-1} = \dfrac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} = \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{\coth^2(x)-1}} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}{\operatorname{sech}(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{csch}(x)}$

(25) $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} = \dfrac{|\coth(x)|}{\sqrt{\cot^2(x)-1}} = \dfrac{1}{\operatorname{sech}(x)} = \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}}{|\operatorname{csch}(x)|}$

(26) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\dfrac{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{\cosh(x)} = \dfrac{1}{\coth(x)} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)} = \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}}$

(27) $\coth(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}{\sinh(x)} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\dfrac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}} = \dfrac{1}{\tanh(x)} = \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}$

(28) $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \sqrt{1-\tanh^2(x)} = \dfrac{\sqrt{\cot^2(x)-1}}{|\coth(x)|} = \dfrac{|\operatorname{csch}(x)|}{\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}}$

(29) $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)} = \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}} = \dfrac{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}{\tanh(x)} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\coth^2(x)-1} = \operatorname{sgn}(x)\cdot\dfrac{\operatorname{sech}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}$

Beweis zu (24):

a) $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1 \;\Rightarrow\; \sinh^2(x)=\cosh^2(x)-1 \;\Leftrightarrow\; \sinh(x)=\pm\sqrt{\cosh^2(x)-1}$

Ist $x \geq 0 \;\Rightarrow\; \sinh(x)\geq 0$, ist $x\leq 0 \;\Rightarrow\; \sinh(x)\leq 0$.
Das Vorzeichen der Wurzel ist also das Vorzeichen von x, also sgn(x).

b) $\tanh(x)=\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\dfrac{\sinh(x)}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} \;\Rightarrow\; \tanh(x)\cdot\sqrt{1+\sinh^2(x)}=\sinh(x)$ Quadrieren:

$\tanh^2(x)\cdot\left(1+\sin^2(x)\right)=\sinh^2(x) \;\Leftrightarrow\; \tanh^2(x)+\tanh^2(x)\cdot\sinh^2(x)=\sinh^2(x)$

$\tanh^2(x)=\sinh^2(x)-\tanh^2(x)\cdot\sinh^2(x) \;\Leftrightarrow\; \tanh^2(x)=\left(1-\tanh^2(x)\right)\cdot\sinh^2(x)$

$\sinh^2(x)=\dfrac{\tanh^2(x)}{1-\tanh^2(x)} \;\Rightarrow\; \sinh(x)=\dfrac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$

bei gleichen Vorzeichen links und rechts.

c) $\coth(x)=\dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\dfrac{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}{\sinh(x)} \;\Leftrightarrow\; \coth(x)\cdot\sinh(x)=\sqrt{1+\sinh^2(x)}$

Quadrieren: $\coth^2(x)\cdot\sinh^2(x)=1+\sinh^2(x) \;\Leftrightarrow\; \coth^2(x)\cdot\sinh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

$\sinh^2(x)\cdot\left(\coth^2(x)-1\right)=1 \;\Rightarrow\; \sinh(x)=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$

Für positives x benötigt man +, für negatives x das Minuszeichen.
Also verwendet man besser dafür sgn(x): $\sinh(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$

d) $\sinh^2(x)=\cosh^2(x)-1=\dfrac{1}{\operatorname{sech}^2(x)}-1=\dfrac{1-\operatorname{sech}^2(x)}{\operatorname{sech}^2(x)}$

denn nach Definition ist $\cosh(x)=\dfrac{1}{\sec(x)}$. Es folgt:

$\sinh(x)=\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}{|\operatorname{sech}(x)|}=\operatorname{sgn}(x)\cdot\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}{\operatorname{sech}(x)}$

5 Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen mit komplexen Zahlen

Im Text 50012 „Komplexe Zahlen Teil 2“ wird die Eulersche Formel $\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}$ angegeben und mehrfach bewiesen (ab Seite 19).

Aus dieser Gleichung kann man diese Folgerungen ziehen:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \qquad (1)$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) = \cos x - i \cdot \sin x \qquad (2)$$

denn $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$.

Durch Addition (1) + (2) folgt: $e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \cdot \sin x) + (\cos x - i \cdot \sin x)$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cdot \cos x$$

Folgerung: $$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \qquad (A)$$

und wegen $$\cos(ix) = \frac{e^{i^2x} + e^{-i^2x}}{2}$$

gilt: $$\boxed{\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}} \qquad (B)$$

Durch Subtraktion (1) – (2) erhält man:

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \cdot \sin x$$

Folgerung: $$\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} \qquad (C)$$

und wegen $$\sin(ix) = \frac{e^{i^2x} - e^{-i^2x}}{2i}$$

gilt: $$\boxed{\sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i}} \qquad (D)$$

Man erkennt den Zusammenhang zu den hyperbolischen Funktionen so:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow i \cdot \sinh(x) = \frac{i \cdot (e^x - e^{-x})}{2} \underset{\text{mit } i}{\overset{\text{erweitern}}{=}} \frac{i^2 \cdot (e^x - e^{-x})}{2i} = \frac{e^{-x} - e^x}{2i}$$

und das ist identisch mit sin(ix):

Ergebnis: $\boxed{i \cdot \sinh(x) = \sin(ix)}$ bzw. $\boxed{\sinh(x) = \frac{1}{i} \cdot \sin(ix) = -i \cdot \sin(ix)}$ (E)

Daher folgt: $\sinh(ix) = -i \cdot \sin(i^2x) = -i \cdot \sin(-x) = i \cdot \sin(x)$ d. h. $\boxed{\sinh(ix) = i \cdot \sin(x)}$ (F)

Außerdem ist: $$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(ix)} \qquad (G)$$

Daher folgt: $\cosh(ix) = \cos(i^2x) = \cos(-x) = \cos(x)$ also: $\boxed{\cosh(ix) = \cos(x)}$ (H)

Funktionen mit komplexen Argumenten

Wir benötigen: $\sinh(ix) = i \cdot \sin(x)$ und $\cosh(ix) = \cos(x)$

Aus $\sinh(u+v) = \sinh(u) \cdot \cosh(v) + \cosh(u) \cdot \sinh(v)$

folgt $\sinh(x+iy) = \sinh(x) \cdot \cosh(iy) + \cosh(x) \cdot \sinh(iy)$

d. h. $\sinh(x+iy) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + i \cdot \cosh(x) \cdot \sin(y)$

Aus $\cosh(u+v) = \cosh(u) \cdot \cosh(v) + \sinh(u) \cdot \sinh(v)$ folgt

folgt $\cosh(x+iy) = \cosh(x) \cdot \cosh(iy) + \sinh(x) \cdot \sinh(iy)$

d. h. $\cosh(x+iy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + i \cdot \sinh(x) \cdot \sin(y)$

Für die folgende Formel aus dem Text 16130 benötigen wir

$\sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$ und $\cos(ix) = \cosh(x)$

Aus $\sin(u+v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$

folgt $\sin(x+iy) = \sin(x) \cdot \cos(iy) + \cos(x) \cdot \sin(iy)$

d. h. $\sin(x+iy) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + i \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y)$

Aus $\cos(u+v) = \cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v)$

folgt $\cos(x+iy) = \cos(x) \cdot \cos(iy) - \sin(x) \cdot \sin(iy)$

d. h. $\cos(x+iy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \cdot \sin(x) \cdot \sinh(y)$

6 Aufgaben

1 Berechne

a) $\cosh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$

b) $\sinh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$

c) $\tanh\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

d) $\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

Lösung 1

a) Die Anwendung von $\cosh(u)=\frac{1}{2}\left(e^{u}+e^{-u}\right)$ führt zu:

$$\cosh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}+e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}+\frac{1}{e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}}\right)$$

Nun benötigt man die Formel $e^{\ln u}=u$ und erhält damit:

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Man bringt den Klammerinhalt auf einen gemeinsamen Nenner:

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

Die 1. binomische Formel wird angewandt:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+\left(x^2-1\right)+1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x\cancel{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}}{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}}=x$$

Ergebnis: $\boxed{\cosh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)=x}$

b) $$\sinh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-\frac{1}{e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=x$$

Hier ist die Berechnung anlog zu a) durchgeführt worden.

Ergebnis: $\boxed{\sinh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)=x}$

c) Hier wird die Formel $\tanh(u)=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$ von Seite 5 benötigt:

$$\tanh\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=\tanh\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}}_{u}\Big)=\frac{e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}-1}{e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}+1}=\frac{\boxed{e^{\ln\frac{1+x}{1-x}}}-1}{\boxed{e^{\ln\frac{1+x}{1-x}}}+1}$$

Nun benötigt man die Formel $e^{\ln u}=u$ und erhält damit: $=\frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1}$

Dieser Doppelbruch wird mit (1-x) erweitert:

$$=\frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)}=\frac{2x}{2}=x$$

Ergebnis: $\tanh\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=x$

d) Wir benötigen die Definitionsgleichungen $\operatorname{sech}(u)=\frac{1}{\cosh(u)}$ und $\cosh(u)=\frac{1}{2}\left(e^u+e^{-u}\right)$:

$$\operatorname{sech}\Big(\underbrace{\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}_{u}\Big)=\frac{1}{\cosh\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)}=\frac{2}{e^{\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}+e^{-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}}$$

$$=\frac{2}{e^{\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}+\frac{1}{e^{\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}}}$$

Nun benötigt man die Formel $e^{\ln u}=u$ und erhält damit: $=\frac{2}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}}$

Algebraische Umformungen der Doppelbrüche: $=\frac{2}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}$

Die Nennerbrüche erhalten einen gemeinsamen Nenner: $=\frac{2}{\frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2+x^2}{x\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}}$

Mit dem Kehrwert des Nennerbruches multiplizieren, zusammenfassen und kürzen:

$$=\frac{2x\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{1+2\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)+x^2}=\frac{2x\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{2+2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=x$$

Ergebnis: $\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=x$