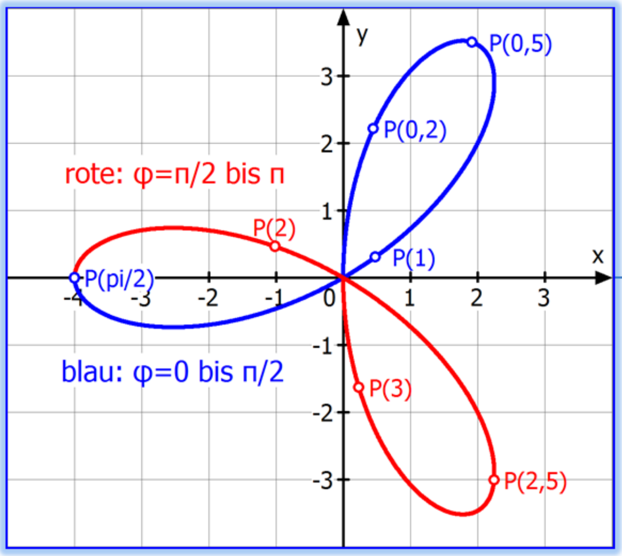


Kleeblatt-Kurven

Text Nummer 54103

11. Mai 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Kleeblatt-Kurven werden gerne als „hübsche“ Kurven vorgezeigt. Hier findet man einen Einblick in deren Mathematik.

Die Integralrechnungen sind sehr schwer und für Studenten dringend zu empfehlen.

Die Theorie zu den angewandten Berechnungsverfahren findet man im
Text 54011 Differentialgeometrie

Inhalt

Kleeblatt-Kurven (n-blättrige Rose)

1 Vorschau

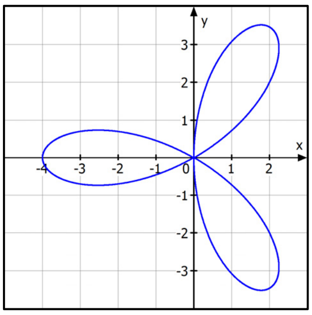
Für Kleeblatt-Kurven gibt es je nach Ausrichtung und Größe unterschiedliche Gleichungsformen.

Parametergleichungen: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \sin(b \cdot t) \cdot \sin(t) \\ a \cdot \sin(b \cdot t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$

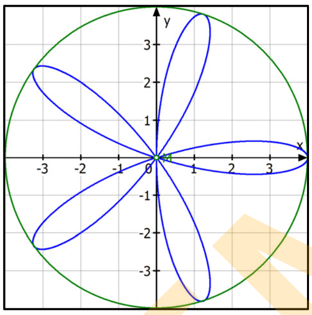
Bei ungeradem b ist $t \in [0\,;\,\pi[$, dann ist b die Anzahl der Blätter.
Bei geraden b ist $t \in [0\,;\,2\pi[$, dann ist 2b die Anzahl der Blätter.
a gibt den Radius des Ursprungskreises an, den die Blätter von innen berühren.

Beispiele: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(b \cdot t) \cdot \sin(t) \\ 4 \cdot \sin(b \cdot t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$

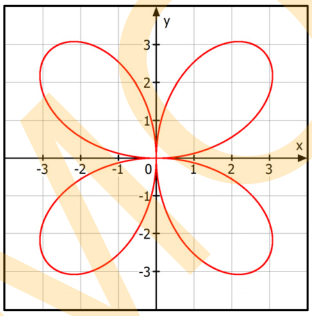
b = 3



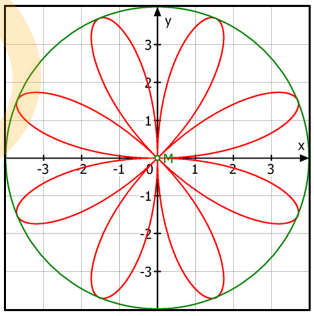
b = 5



b = 2



b = 4

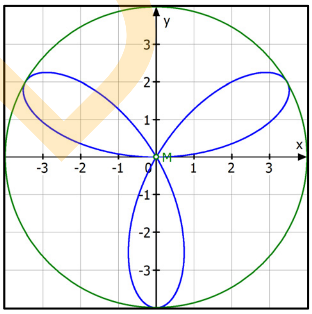


Gleichung in Polarkoordinaten: $r = a \cdot \sin(b \cdot \varphi + \alpha)$

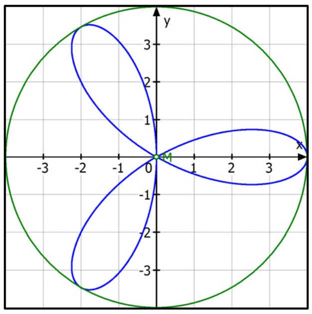
Beispiele für b = 3:

$r = 4 \cdot \sin(3\varphi + \frac{1}{2}\pi)$ entspricht $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot \sin(t) \\ 4 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$ (1. Abbildung oben)

$r = 4 \cdot \sin(3\varphi)$

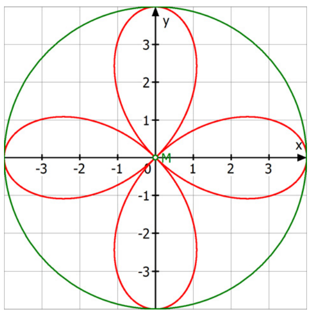


$r = 4 \cdot \cos(3\varphi)$



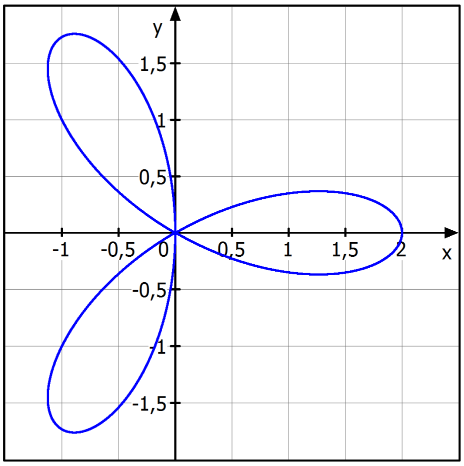
Andere Parametergleichungen sind: $\vec{x}(t) = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) + \cos(2t) \\ \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$

$\vec{x}(t) = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) + \cos(3t) \\ \sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix}$:



2. Berechnung der <u>Extrempunkte in x-Richtung</u> bei einer dreiblättrigen Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \cos(2t) \\ \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0; 2\pi[.$$



Ableitungen: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) - 2\cdot\sin(2t) \\ \cos(t) - 2\cdot\cos(2t) \end{pmatrix}$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) - 4\cdot\cos(2t) \\ -\sin(t) + 4\cdot\sin(2t) \end{pmatrix}$$

Für Rechtspunkte/Linkspunkte gilt die

<u>Bedingung:</u> $\dot{x}(t) = 0$

$$-\sin(t) - 2\cdot\sin(2t) = 0$$
$$\sin(t) + 2\sin(2t) = 0$$
$$\sin(t) + 2\cdot 2\sin(t)\cdot\cos(t) = 0$$
$$\sin(t)(1 + 4\cdot\cos(t)) = 0$$

Es liegt ein Nullprodukt vor. Dieses wird Null, wenn ein Faktor Null ist.

1. Faktor: $\sin(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = \pi$

2. Faktor: $1 + 4\cdot\cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow t_3 \approx 1{,}82;\ t_4 = 2\pi - 1{,}82 \approx 4{,}46$

Kontrollen: $\ddot{x}(0) = -\cos(0) - 4\cdot\cos(0) = -5 < 0 \Rightarrow$ Maximum für x(t) bei t = 0

$\ddot{x}(\pi) = -\cos(\pi) - 4\cdot\cos(2\pi) = -(-1) - 4\cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$ Maximum für x(t) bei t = π

$\ddot{x}(1{,}82) = -\cos(1{,}82) - 4\cdot\cos(2\cdot 1{,}82) \approx 3{,}76 > 0 \Rightarrow$ Minimum für x(t) bei t = 1,82

$\ddot{x}(4{,}46) = -\cos(4{,}46) - 4\cdot\cos(2\cdot 4{,}46) \approx 3{,}77 > 0 \Rightarrow$ Minimum für x(t) bei t = 4,46

Berechnung der beiden „x-Maxima-Punkte":

$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) + \cos(0) \\ \sin(0) - \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow R_1(2|0)$ „Rechtspunkt"

$\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos(\pi) + \cos(2\pi) \\ \sin(\pi) - \sin(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow R_2(0|0)$ „Rechtspunkt"

Berechnung der beiden „x-Minima-Punkte":

$\vec{x}(1{,}82) = \begin{pmatrix} \cos(1{,}82) + \cos(2\cdot 1{,}82) \\ \sin(1{,}82) - \sin(2\cdot 1{,}82) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}12 \\ 1{,}45 \end{pmatrix} \Leftrightarrow L_1(-1{,}12|1{,}45)$ „Linkspunkt"

$\vec{x}(4{,}46) = \begin{pmatrix} \cos(4{,}46) + \cos(2\cdot 4{,}46) \\ \sin(4{,}46) - \sin(2\cdot 4{,}46) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}12 \\ -1{,}45 \end{pmatrix} \Leftrightarrow L_2(-1{,}12|-1{,}45)$ „Linkspunkt"

In diesen vier Randpunkten gibt es **senkrechte Tangenten.** Nachweis durch $\dot{x}(t) = 0$:

$t = 0$: $\dot{x}(0) = -\sin(0) - 2\cdot\sin(0) = 0$

$t = \pi$: $\dot{x}(\pi) = -\sin(\pi) - 2\cdot\sin(\pi) = 0$

$t = 1{,}82$: $\dot{x}(1{,}82) = -\sin(1{,}82) - 2\cdot\sin(2\cdot 1{,}82) \approx 0{,}013$

Wegen der Rundung ist dieser Wert ungleich 0.

Rechnet man genauer, erhält man

$\dot{x}(1{,}8235) = -\sin(1{,}8235) - 2\cdot\sin(2\cdot 1{,}8235) \approx 0{,}00008782$

t = 4,46 $\dot{x}(4{,}46) \approx 0$ analog.

3. Berechnung der Extremwerte in y-Richtung (Hochpunkte/Tiefpunkte)

Bedingung: $\dot{y}(t) = \cos(t) - 2 \cdot \cos(2t) = 0$

Wegen $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - \left(1 - \cos^2(t)\right) = 2\cos^2(t) - 1$

gilt: $\cos(t) - 2 \cdot \left(2\cos^2(t) - 1\right) = 0$

Ordnen: $-4 \cdot \cos^2(t) + \cos(t) + 2 = 0$

$4 \cdot \cos^2(t) - \cos(t) - 2 = 0$

Substitution: z = cos (t): $4z^2 - z + 2 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \approx \begin{cases} 0{,}8431 \\ -0{,}5931 \end{cases}$$

1. Rücksubstitution: $\cos t = 0{,}8431 \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx \cos^{-1}(0{,}8431) \approx 0{,}5678$

Die Kosinusfunktion hat positive Werte im 1. und 4. Feld: $t_2 = 2\pi - t_1 \approx 5{,}7154$

2. Rücksubstitution: $\cos t = -0{,}5931 \quad \Rightarrow \quad t_3 \approx \cos^{-1}(-0{,}5931) \approx 2{,}2057$

Die Kosinusfunktion hat negative Werte im 2. und 3. Feld: $t_4 = 2\pi - t_3 \approx 4{,}0775$

Kontrollen:

$\ddot{y}(0{,}5678) = -\sin(0{,}5678) + 4 \cdot \sin(2 \cdot 0{,}5678) \approx 3{,}1 > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum für y(t) bei $t = 0{,}5678$.

$\ddot{y}(5{,}7154) = -\sin(5{,}7154) + 4 \cdot \sin(2 \cdot 5{,}7154) \approx -3{,}1 < 0 \Rightarrow$ Maximum für y(t) bei $t = 5{,}7154$

$\ddot{y}(2{,}2057) = -\sin(2{,}2057) + 4 \cdot \sin(2 \cdot 2{,}2057) \approx -4{,}6 < 0 \Rightarrow$ Maximum für y(t) bei $t = 2{,}2057$

$\ddot{y}(4{,}0775) = -\sin(4{,}0775) + 4 \cdot \sin(2 \cdot 4{,}0775) \approx 4{,}6 > 0 \Rightarrow$ Minimum für y(t) bei $t = 4{,}0775$

Berechnung der beiden y-Maxima-Punkte:

$$\vec{x}(0{,}5678) = \begin{pmatrix} \cos(0{,}5678) + \cos(2 \cdot 0{,}5678) \\ \sin(0{,}5678) - \sin(2 \cdot 0{,}5678) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}26 \\ -0{,}37 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad T_1(1{,}26 \mid -0{,}37)$$

$$\vec{x}(2{,}2057) = \begin{pmatrix} \cos(2{,}2057) + \cos(2 \cdot 2{,}2057) \\ \sin(2{,}2057) - \sin(2 \cdot 2{,}2057) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}89 \\ 1{,}76 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad H_2(-0{,}89 \mid 1{,}76)$$

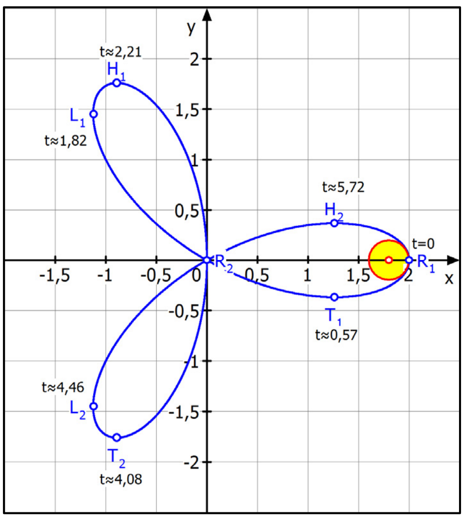
Berechnung der beiden y-Minima-Punkte:

$$\vec{x}(5{,}7154) = \begin{pmatrix} \cos(5{,}7154) + \cos(2 \cdot 5{,}7154) \\ \sin(5{,}7154) - \sin(2 \cdot 5{,}7154) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}26 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad H_2(1{,}26 \mid 0{,}37)$$

$$\vec{x}(4{,}0775) = \begin{pmatrix} \cos(4{,}0775) + \cos(2 \cdot 4{,}0775) \\ \sin(4{,}0775) - \sin(2 \cdot 4{,}0775) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}89 \\ -1{,}76 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad T_2(-0{,}89 \mid -1{,}76)$$

Die Abbildung zeigt die 7 Extrempunkte der Kurve, nämlich 2 Hochpunkte, 2 Tiefpunkte, zwei Linkspunkte und einen Rechtspunkt.

Außerdem wurde bereits ein Krümmungskreis eingezeichnet, der auf der nächsten Seite berechnet wird.



4. Berechnung der Krümmung und des Krümmungskreises

Für die Krümmung gilt: $$k = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

wobei gilt: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) - 2\cdot\sin(2t) \\ \cos(t) - 2\cdot\cos(2t) \end{pmatrix}$ und $\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) - 4\cdot\cos(2t) \\ -\sin(t) + 4\cdot\sin(2t) \end{pmatrix}$

Also: $$k = \frac{\left(-\sin(t) + 4\cdot\sin(2t)\right)\cdot\left(-\sin(t) - 2\cdot\sin(2t)\right) - \left(-\cos(t) - 4\cdot\cos(2t)\right)\cdot\left(\cos(t) - 2\cdot\cos(2t)\right)}{\left[\left(-\sin(t) - 2\cdot\sin(2t)\right)^2 + \left(\cos(t) - 2\cdot\cos(2t)\right)^2\right]^{3/2}}$$

Ich erspare es mir, dies zusammenzufassen.

Dennoch kann man hieraus die **Krümmung für die Stelle t = 0** (Punkt R_1) berechnen:

$$k = \frac{(0+4\cdot 0)\cdot(-0-2\cdot 0) - (-1-4\cdot 1)\cdot(1-2\cdot 1)}{\left[(0-2\cdot 0)^2 + (1-2\cdot 1)^2\right]^{3/2}} = \frac{5}{1} = 5$$

Folgerung: Der Krümmungskreis hat dort den Radius $r = \frac{1}{k} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Wegen $R(2\,|\,0)$ liegt der Mittelpunkt des Krümmungskreises bei $M_{KK}(1{,}8\,|\,0)$, siehe Abbildung Seite zuvor.

Gleichung des Krümmungskreises: $(x-1{,}8)^2 + y^2 = 0{,}04$

5. Welche Tangenten gibt es im Ursprung? $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \cos(2t) \\ \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;2\pi[$

Für die **Tangentensteigungen gilt:** $y'(x) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \dfrac{\cos(t) - 2\cos(2t)}{-\sin(t) - 2\sin(2t)}$

Jetzt muss man die Parameterwerte für die Ursprung-Durchgänge kennen.

Wann ist $x = \cos(t) + \cos(2t) = 0$?

Trigonometrische Formel: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$

Also lautet die Gleicxh günstiger: $\cos(t) + 2 \cdot \cos^2(t) - 1 = 0$

Geordnet: $2 \cdot \cos^2(t) + \cos(t) - 1 = 0$

Das ist eine quadratische Gleichung für cos(t):

$$\cos(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Im Intervall $[0\,;2\pi[$ gilt: $\cos(t) = \frac{1}{2}$ für $t_1 = \frac{1}{3}\pi$ und $t_2 = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$

und: $\cos(t) = -1$ für $t = \pi$.

Tangentensteigungen dazu:

$$y'(t = \tfrac{1}{3}\pi) = \frac{\cos(\frac{1}{3}\pi) - 2\cos(\frac{2}{3}\pi)}{-\sin(\frac{1}{3}\pi) - 2\sin(\frac{2}{3}\pi)} = \frac{\frac{1}{2} - 2 \cdot (-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{-\frac{3}{2}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$y'(t = \tfrac{5}{3}\pi) = \frac{\cos(\frac{5}{3}\pi) - 2\cos(\frac{10}{3}\pi)}{-\sin(\frac{5}{3}\pi) - 2\sin(\frac{10}{3}\pi)} = \frac{\frac{1}{2} - 2 \cdot (-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$y'(t = \pi) = \frac{\cos(\pi) - 2\cos(2\pi)}{-\sin(\pi) - 2\sin(2\pi)} = \cancel{\frac{-1 - 2 \cdot 1}{0 - 2 \cdot 0}}$$ Nicht definiert.

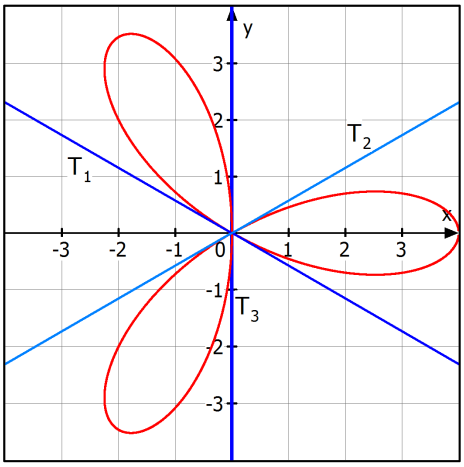
Da $\dot{x}(\pi) = 0$ ist, gibt es jetzt eine senkrechte Tangente.

Gleichungen der Tangenten im Dreifachpunkt O:

T_1: $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$

T_2: $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$

T_3; $x = 0$



6 Flächeninhalt eines Blattes mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} a\cdot\sin(3t)\cdot\sin(t)\\ a\cdot\sin(3t)\cdot\cos(t)\end{pmatrix}\quad \text{für } t\in[0\,;\pi],\qquad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 3a\cdot\cos(3t)\cdot\sin(t)+a\cdot\sin(3t)\cdot\cos(t)\\ 3a\cdot\cos(3t)\cdot\cos(t)-a\cdot\sin(3t)\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$$

Die Formel für den Flächeninhalt lautet: $\boxed{A=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/3}\left(y\cdot\dot{x}-x\cdot\dot{y}\right)dt}$

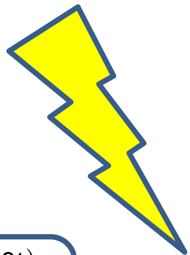
$$A=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\Big[a\cdot\sin(3t)\cdot\cos(t)\cdot\big(3a\cdot\cos(3t)\cdot\sin(t)+a\cdot\sin(3t)\cdot\cos(t)\big)-\ldots\Big]$$

$$\Big[\ldots-a\cdot\sin(3t)\cdot\cos(t)\cdot\big(3a\cdot\cos(3t)\cdot\sin(t)-a\cdot\sin(3t)\cdot\sin(t)\big)\Big]\,dt$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/3}\Big[\cancel{3a^2\sin(3t)\cos(3t)\sin(t)\cos(t)}+a^2\sin^2(3t)\cos^2(t)-\ldots.\Big]$$

$$\Big[\ldots-\cancel{3a^2\sin(3t)\cos(3t)\cos(t)\sin(t)}+a^2\sin^2(3t)\sin^2(t)\Big]dt$$

$$=\tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/3}\sin^2(3t)\cdot\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)dt=\tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/3}\sin^2(3t)\,dt=$$



Nebenrechnung:

Partielle Integration für $\int\sin^2(3t)\,dt=\int\underbrace{\sin(3t)}_{u'}\cdot\underbrace{\sin(3t)}_{v}dt=$

$$\boxed{\begin{array}{lll} u'=\sin(3t) & \Rightarrow & u=-\tfrac{1}{3}\cos(3t)\\ v=\sin(3t) & \Rightarrow & v'=3\cdot\cos(3t)\end{array}}$$

Daraus folgt dann: $\int\sin^2(3t)\,dt=u\cdot v-\int v'u\,dt$

d. h.

$$\int\sin^2(3t)\,dt=-\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t)+\int\cos^2(3t)dt$$

$$\int\sin^2(3t)\,dt=-\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t)+\int\left(1-\sin^2(3t)\right)dt$$

$$\int\sin^2(3t)\,dt=-\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t)+t-\int\sin^2(3t)\,dt\qquad\Big|+\int\sin^2(3t)dt$$

$$2\cdot\int\sin^2(3t)\,dt=-\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t)+t\qquad\Big|:2$$

$$\int\sin^2(3t)\,dt=-\tfrac{1}{6}\sin(3t)\cdot\cos(3t)+\tfrac{1}{2}t$$

Zurück zum Flächeninhalt:

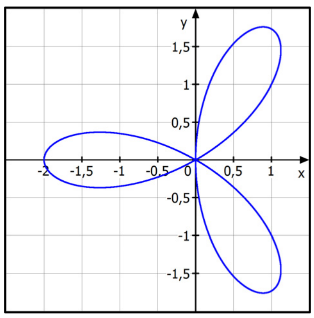
$$A=\tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/3}\sin^2(3t)dt=\tfrac{1}{2}a^2\cdot\left[-\tfrac{1}{6}\sin(3t)\cdot\cos(3t)+\tfrac{1}{2}t\right]_0^{\pi/3}$$

$$A=\tfrac{1}{2}a^2\cdot\left[-\tfrac{1}{6}\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{0}\cdot\cos(\pi)+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\pi+\tfrac{1}{6}\underbrace{\sin(0)}_{0}\cdot\cos(0)-0\right]=\tfrac{1}{2}a^2\cdot\tfrac{1}{6}\pi$$

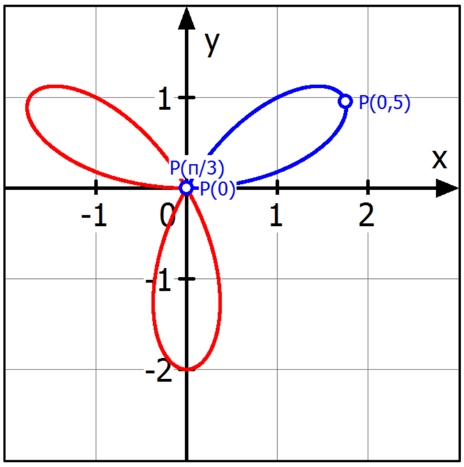
Ergebnis: $A=\frac{1}{12}\pi a^2$

Dazu eine Abbildung: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin(3t)\cdot\sin(t)\\ 2\cdot\sin(3t)\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$ (a = 2)

Inhalt: $A=\frac{1}{3}\pi$ (FE)



7 Flächeninhalt eines Blattes mit der Polarkoordinatenform



1. Variante: Kurvengleichung: $r(t) = 2 \cdot \sin(3\varphi)$

Das „blaue" Blatt entsteht für $\varphi \in \left[0\,;\tfrac{1}{3}\pi\right]$

Flächenformel. $F = \int\limits_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2} \cdot r^2(\varphi)\,d\varphi$

Hier: $F = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} 4 \cdot \sin^2(3\varphi)\,d\varphi = 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/3} \sin^2(3t)\,dt$

(Ob die Integrationsvariable φ oder t heißt, ist egal, denn am Ende braucht man sie nur, um einzusetzen.)

1. Lösungsweg mit partieller Integration

Zerlegung: $\int \sin^2(3t)\,dt = \int \underbrace{\sin(3t)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(3t)}_{v}\,dt$

Partielle Integration mit: $u' = \sin(3t) \;\Rightarrow\; u = -\tfrac{1}{3}\cos(3t)$

und: $v = \sin(3t) \;\Rightarrow\; v' = 3\cos(3t)$

Formel dazu: $\int u' \cdot v \cdot dx = [u \cdot v] - \int v' \cdot u \cdot dx$

$$\int \sin^2(3t)\,dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + \int \cos^2(3t)\,dt \qquad \mid \quad \cos^2(3t) = 1 - \sin^2(3t)$$

$$\int \sin^2(3t)\,dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + \int \left(1 - \sin^2(3t)\right)dt$$

$$\int \sin^2(3t)\,dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + t - \int \sin^2(3t)\,dt$$

Jetzt behandelt man diese Zeile wie eine zu lösende Gleichung und addiert auf beiden Seiten das Integral $\int \sin^2(3t)\,dt$. Dann fällt es rechts weg und links steht es doppelt:

$$2 \cdot \int \sin^2(3t)\,dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + t \quad \text{also} \quad \int \sin^2(3t)\,dt = -\tfrac{1}{6}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + \tfrac{1}{2}t$$

Nun kann man das bestimmte Integral für den Inhalt zu Ende rechnen:

$$F = 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/3} \sin^2(3t)\,dt = 2 \cdot \left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{6}\sin(3t)\cdot\cos(3t)\right]_0^{\pi/3} = \left[t - \tfrac{1}{3}\cdot\sin(3t)\cdot\cos(3t)\right]_0^{\pi/3}$$

$$F = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{3}\cdot\sin(\pi)\cdot\cos(\pi) - \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot\sin(0)\cdot\cos(0) = \tfrac{1}{3}\pi$$

2. Lösungsweg mit trigonometrischer Umformung:

Es gibt die Formel $\cos(2\alpha) = 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1 \;\Rightarrow\; \cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}\cos(2\alpha) + \tfrac{1}{2}$

Ersetzt man darin $\alpha = 3t$, folgt: $\cos^2(3t) = \tfrac{1}{2}\cos(6t) + \tfrac{1}{2}$

Damit vereinfacht sich das zu berechnende Integral so:

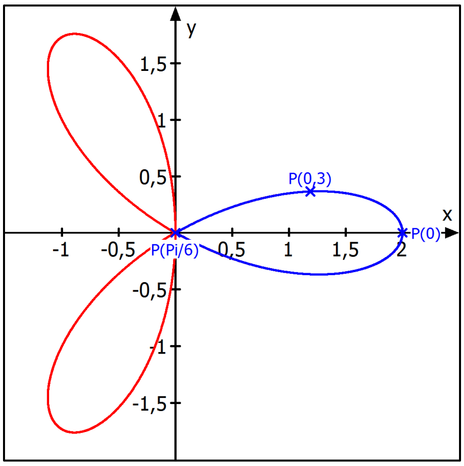
$$F = 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/3} \sin^2(3t)\,dt = 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/3} \left(1 - \cos^2(3t)\right)dt = 2\int\limits_0^{\pi/3} \left(1 - \tfrac{1}{2}\cos(6t) - \tfrac{1}{2}\right)dt = 2 \cdot \left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{12}\sin(6t)\right]_0^{\pi/3}$$

$$F = \left[t - \tfrac{1}{6}\sin(6t)\right]_0^{\pi/3} = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\cdot\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0 = \tfrac{1}{3}\pi$$

2. Variante:

Kurvengleichung: $r(t) = 2 \cdot \cos(3\varphi)$

Das „blaue“ Blatt entsteht für $\varphi \in \left[-\frac{1}{6}\pi ; \frac{1}{6}\pi\right]$.



Flächenformel. $F = 2 \cdot \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} \cdot r^2(\varphi)\, d\varphi$

Hier: $F = 2 \cdot \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos^2(3\varphi)\, d\varphi = 4 \cdot \int_0^{\pi/6} \cos^2(3t)\, dt$

(Ob die Integrationsvariable φ oder t heißt, ist egal, denn am Ende braucht man sie nur, um einzusetzen.)
Für die Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ erhält man nur die halbe Fläche, was dann durch den Faktor 2 kompensiert wird. Aber man hat 0 also günstige Grenze!

1. Lösungsweg mit partieller Integration

Zerlegung: $\int \cos^2(3t)\, dt = \int \underbrace{\cos(3t)}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(3t)}_{v}\, dt$

Partielle Integration mit: $u' = \cos(3t) \Rightarrow u = \frac{1}{3}\sin(3t)$

und: $v = \cos(3t) \Rightarrow v' = -3\sin(3t)$

Formel dazu: $\int u' \cdot v \cdot dx = [u \cdot v] - \int v' \cdot u \cdot dx$

$$\int \cos^2(3t)\, dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + \int \sin^2(3t)\, dt \qquad | \quad \sin^2(3t) = 1 - \cos^2(3t)$$
$$\int \cos^2(3t)\, dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + \int \left(1 - \cos^2(3t)\right) dt$$
$$\int \cos^2(3t)\, dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + t - \int \cos^2(3t)\, dt$$

Jetzt behandelt man diese Zeile wie eine zu lösende Gleichung und addiert auf beiden Seiten das Integral $\int \cos^2(3t)\, dt$. Dann fällt es rechts weg und links steht es doppelt:

$$2 \cdot \int \cos^2(3t)\, dt = -\tfrac{1}{3}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + t \quad \text{also} \quad \int \cos^2(3t)\, dt = -\tfrac{1}{6}\sin(3t)\cdot\cos(3t) + \tfrac{1}{2}t$$

Nun kann man das bestimmte Integral für den Inhalt zu Ende rechnen:

$$F = 4 \cdot \int_0^{\pi/6} \cos^2(3t)\, dt = 4 \cdot \left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{6}\sin(3t)\cdot\cos(3t)\right]_0^{\pi/6} = \left[2t - \tfrac{2}{3}\cdot\sin(3t)\cdot\cos(3t)\right]_0^{\pi/6}$$

$$F = \left[\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{2}{3}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\cdot\underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{=0}\right] - \left[0 + \tfrac{2}{3}\cdot\sin(0)\cdot\cos(0)\right] = \tfrac{1}{3}\pi$$

2. Lösungsweg mit trigonometrischer Umformung:

Es gibt die Formel $\cos(2\alpha) = 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{1}{2}$

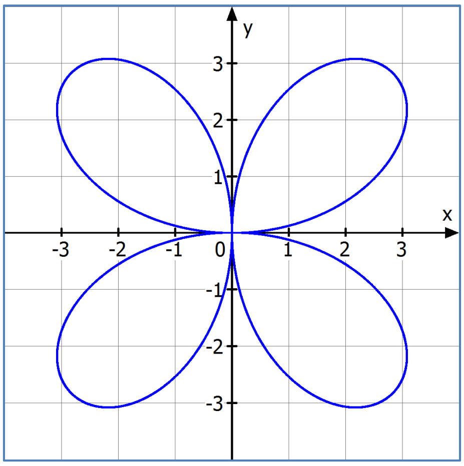
Ersetzt man darin $\alpha = 3t$, folgt: $\cos^2(3t) = \frac{1}{2}\cos(6t) + \frac{1}{2}$

Damit vereinfacht sich das zu berechnende Integral so:

$$F = 4 \cdot \int_0^{\pi/6} \cos^2(3t)\, dt = 4 \cdot \int_0^{\pi/6} \left(\tfrac{1}{2}\cos(6t) + \tfrac{1}{2}\right) dt = \int_0^{\pi/6} \left(2\cos(6t) + 2\right) dt = \left[-\tfrac{1}{12}\sin(6t) + 2t\right]_0^{\pi/6}$$

$$F = -\tfrac{1}{12}\cdot\sin(\pi) + \tfrac{1}{3}\pi - 0 = \tfrac{1}{3}\pi$$

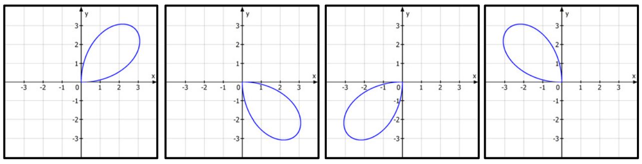
8. Noch etwas zu vierblättrigen Kleeblättern



$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} a\cdot\sin(bt)\cdot\cos(t)\\ a\cdot\sin(bt)\cdot\sin(t)\end{pmatrix}\qquad t\in[0\,;2\pi].$$

Für a = 4, b = 2 erhält man diese Kurve:

Interessant sind die Teilabbildungen, die man mit MatheGrafix erstellen kann:



$t\in\left[0\,;\tfrac{1}{2}\pi\right]\ \rightarrow\ \left[\tfrac{1}{2}\pi\,;\pi\right]\ \rightarrow\ \left[\pi\,;1{,}5\,\pi\right]\ \rightarrow\ \left[1{,}5\pi\,;2\pi\right]$

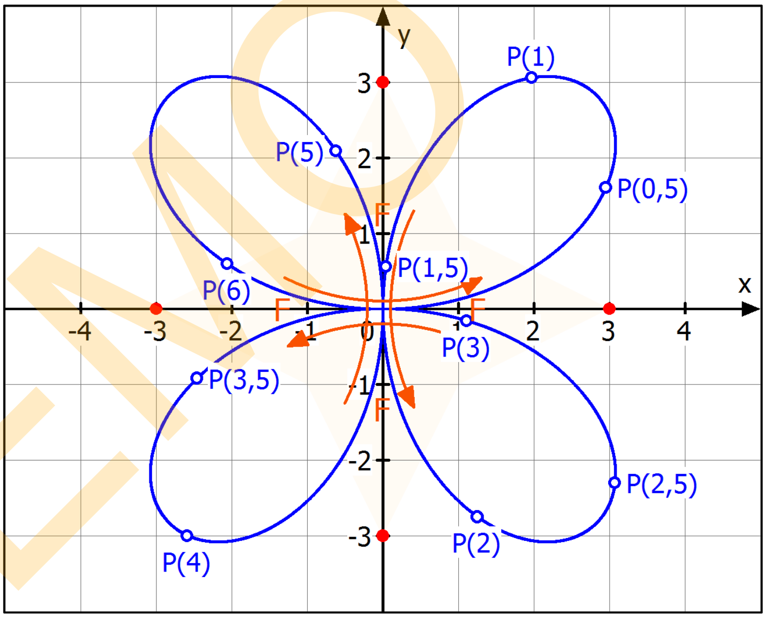
Die nächste Abbildung zeigt einige Kurvenpunkte mit den zugehörenden t-Werten.

P(0) ist der Ursprung.

Von da aus durchläuft man die Kurve nach rechts oben-

Die roten Kreisbogenpfeile zeigen die Durchlaufrichtung der Kurve an,

für t von 0 bis 2π .

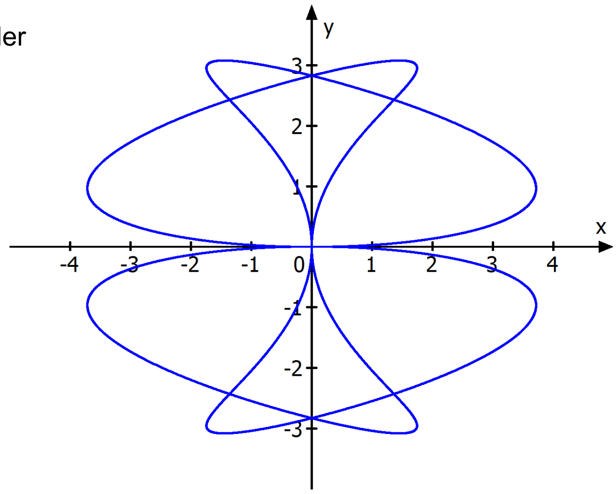


9 Merkwürdigkeiten

Bei dieser Kleeblattkurve hatte ich mich zunächst in der Gleichung vertippt:

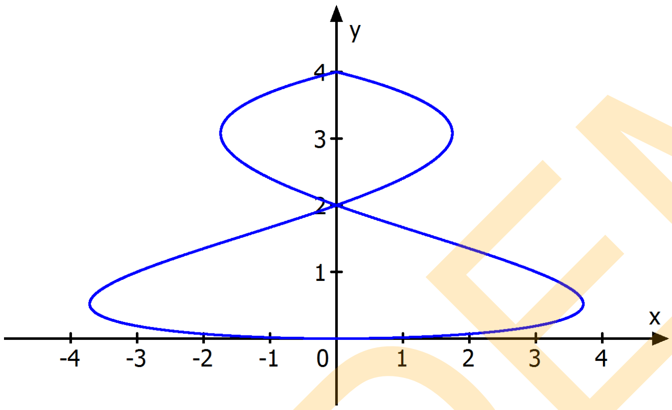
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(4t) \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(2t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

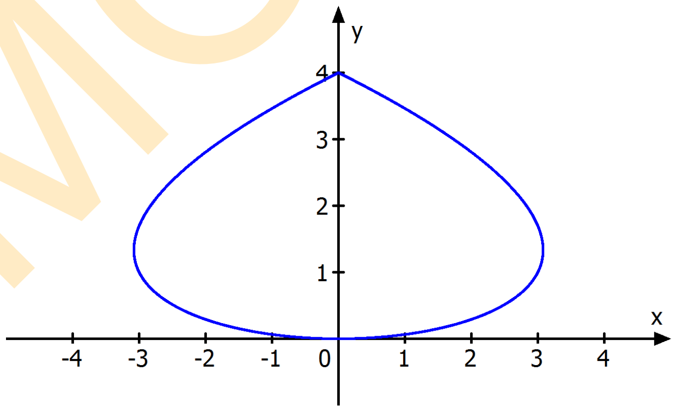
In y(t) sollte das Sinus-Argument 4t statt 2t lauten. Man staunt immer wieder, was für Formen dabei entstehen.



Ja und dann kann man weiterzaubern:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(4t) \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$ bzw. $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(2t) \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$





Ich verfolge diese Kurven hier nicht weiter. Vielleicht regen sie an, selbst mit MatheGrafix zu zaubern.

Die Unterschrift eines Arztes hat diese Gleichung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(3t) \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(2t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$ für $t \in [0\,;\pi[$: