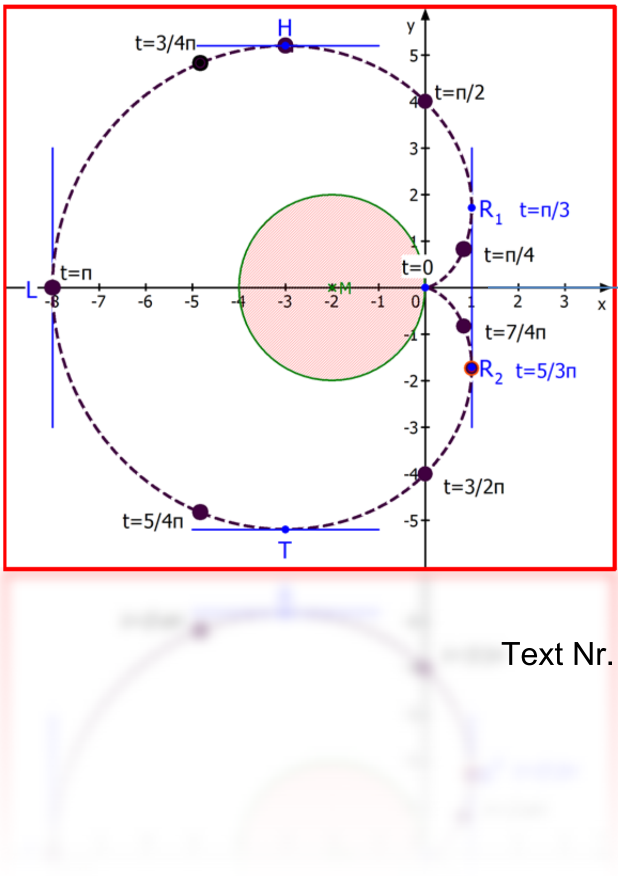


Kardioiden

Text Nr. 54112

Stand 11. Mai 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Kardioide ist aus mehreren Gründen berühmt. Da gibt es zuerst die physikalische Erscheinung der Katakaustik, die bei der Lichtreflexion an einer Zylinderfläche entsteht. Dann aber sind diese kurven auch Rollkurven, vergleichbar mit den Zykloiden, nur dass hier ein Kreis auf einem anderen abrollt.

Es gibt spannende geometrische Herleitungen für die Gleichungen und natürlich allerlei Berechnungen, deren Methoden man im Text 54011 Differentialgeometrie findet.

Die Integrale sind nicht ganz so schwer, wie bei vielen anderen Kurven …

Inhalt

Die Kardioide (Herzkurve)

1 Vorschau

Die Gleichungen variieren je nach Lage der Kurve.

Parametergleichungen:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (1-\cos(t)) \cdot \cos(t) \\ a \cdot (1-\cos(t)) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (1+\cos(t)) \cdot \cos(t) \\ a \cdot (1+\cos(t)) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (1-\cos(t)) \cdot \cos(t) \\ a \cdot (1-\cos(t)) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Oft wird statt a der Faktor 2a verwendet.

Mit Polarkoordinaten:

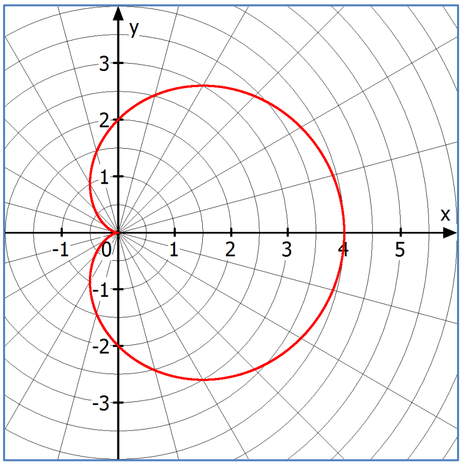
$r(\varphi) = a \cdot (1-\cos(\varphi))$ oder $r(\varphi) = a \cdot (1+\cos(\varphi))$ (auch mit sin statt cos)

Koordinatengleichung: (Es ist eine algebraische Kurve 4. Ordnung)

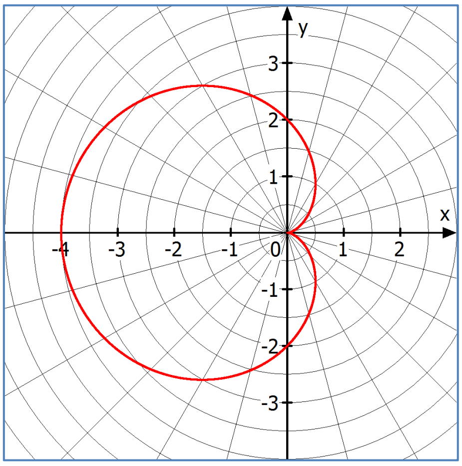
$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2ax \cdot \left(x^2+y^2\right) - a^2y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \left(x^2+y^2\right)^2 + 4ax\left(x^2+y^2\right) - 4a^2y^2 = 0$$

Beispiele:

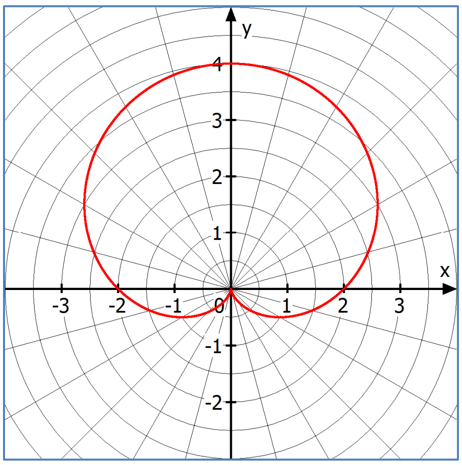
$r(\varphi) = 2 \cdot (1+\cos(\varphi))$,



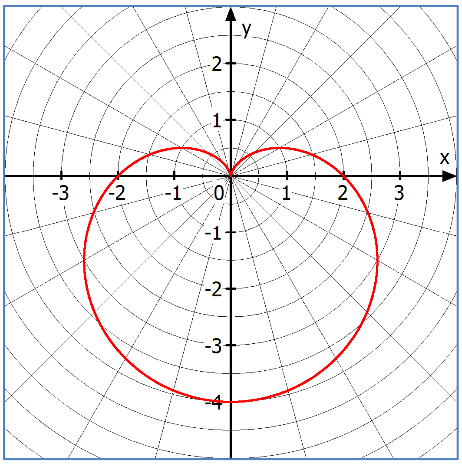
$r(\varphi) = 2 \cdot (1-\cos(\varphi))$



$r(\varphi) = 2 \cdot (1+\sin(\varphi))$



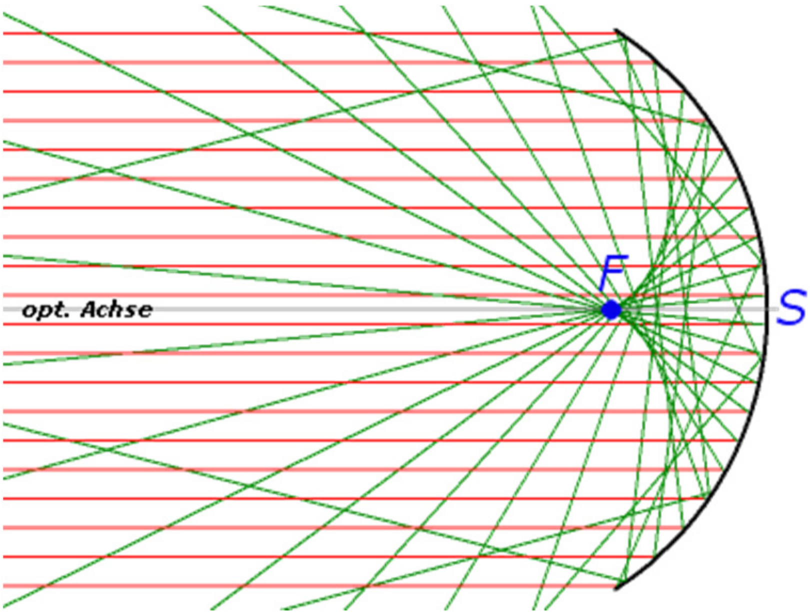
$r(\varphi) = 2 \cdot (1-\sin(\varphi))$



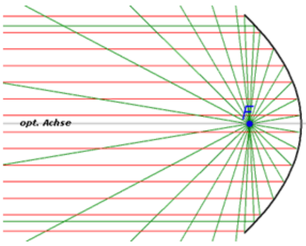
2 Geometrische Eigenschaft der Kardioide

Diese Kurve ist schon sehr lange bekannt: 1691 wird sie in einem mathematischen Lexikon von Ockham erwähnt. Sie tritt in der Physik als „Katakaustik" auf, eine Erscheinung, die dann entsteht, wenn sich paralleles Licht in einem Zylinder in einem Zylinder spiegelt.
(Abb. von https://de.wikipedia.org/wiki/Kaustik_(Optik))

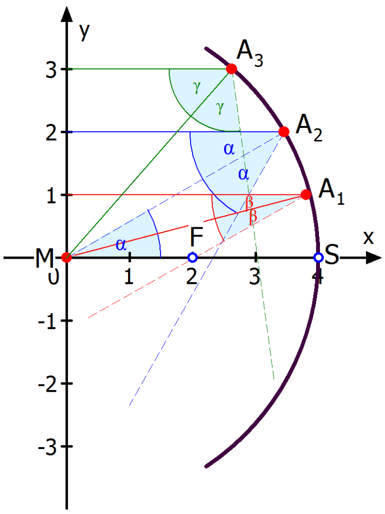
Die Webseite http://www.chemgapedia.de/ genauer http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/geooptik/reflexion2.vlu/Page/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/geooptik/reflexionsgesetz_gekruemmt2.vscml.html



zeigt *diese* Konstruktion der Reflexion von Lichtstrahlen an einem Kreisbogen. Die **Katakaustik** oder Herzkurve ist die Einhüllende der reflektierten Lichtstrahlen.
Verwendet man als Reflexions"fläche" eine *Parabel*, gehen alle reflektierten Strahlen durch den Brennpunkt:

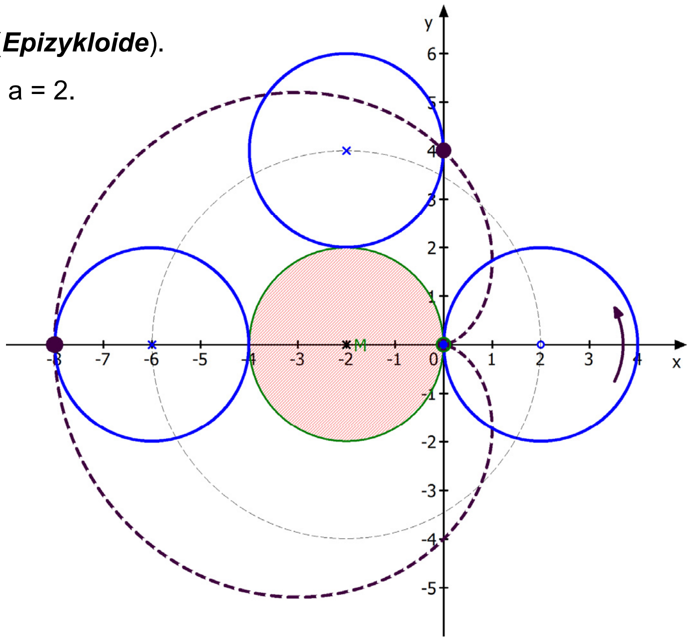


Zur Berechnung des Brennpunkts bei einem sphärischen Spiegel (Kreisform):
Der parallel zur optischen Achse einfallende Strahl treffe in A auf.
Der reflektierte Strahl „hinterlässt" dabei einen gleich großen Winkel α.
Die ***Einhüllende*** dieser reflektierten Strahlen ist die Herzkurve.



3 Einführung der Kurve als Rollkurve

Lässt man auf der Außenseite eines gegebenen festen Kreises mit Mittelpunkt M und Radius a einen weiteren Kreis mit dem gleichen Radius abrollen und betrachtet dabei einen bestimmten Punkt P auf dem abrollenden Kreis, so beschreibt dieser Punkt eine Kardioide.



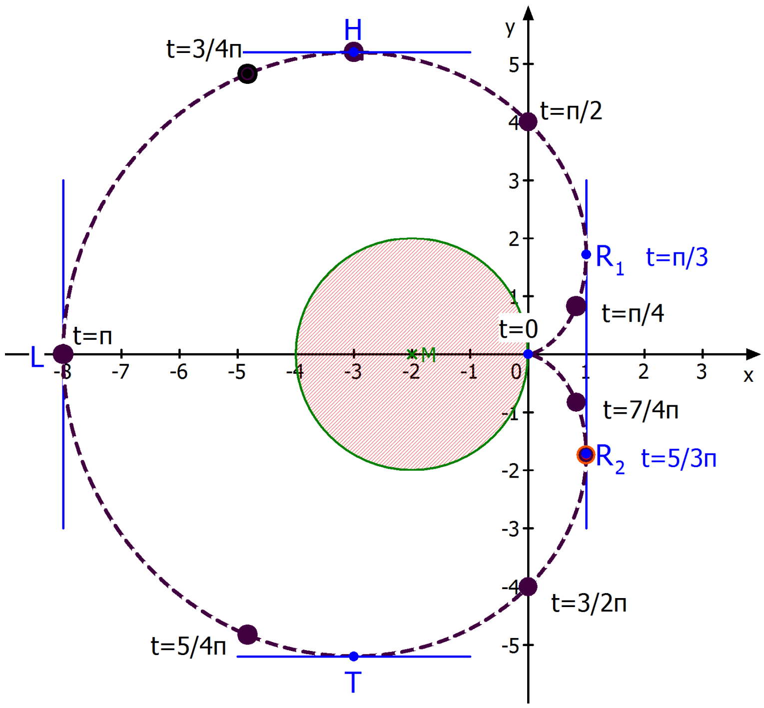
Eine Kardioide ist also eine spezielle Rollkurve (***Epizykloide***).
Der zentrale Kreis um $M(-2\,|\,0)$ hat den Radius a = 2.
Ein gleich großer Kreis beginnt mit $M_1(2\,|\,0)$ so den zentralen Kreis zu umlaufen, dass M_1 auf dem Kreis um $M(-2\,|\,0)$ mit Radius 2a = 4 umläuft.
Der anfängliche Berührpunkt $P_o(0\,|\,0)$ bewegt sich dabei auf der Kardioide, die hier schwarz gestrichelt ist.

Die Gleichungen der Bahnkurve sind:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2a\cdot(1-\cos(t))\cdot\cos(t) \\ 2a\cdot(1-\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0\,;2\pi[\,.$$

Da $\vec{x}(0) = \vec{x}(2\pi)$ ist die Kurve geschlossen. Man lässt also 2π weg.

Die Abbildung zeigt die Lage der Punkte in Abhängigkeit von t:

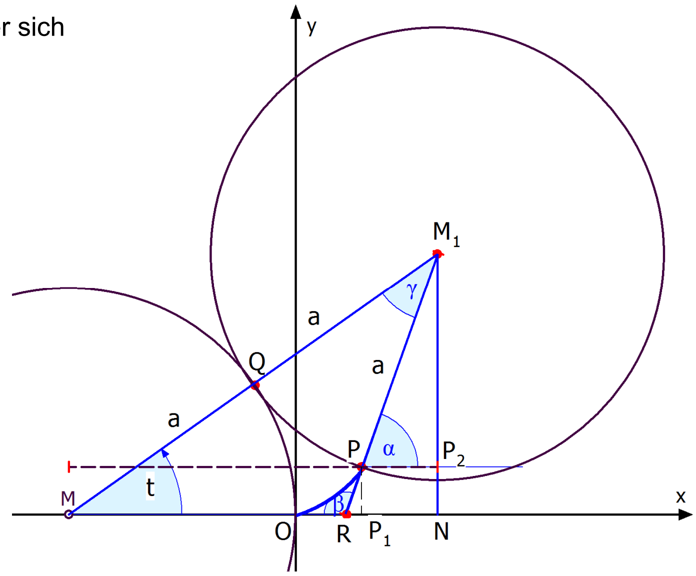


Define $f(t)=\begin{bmatrix}4\cdot(1-\cos(t))\cdot\cos(t)\\4\cdot(1-\cos(t))\cdot\sin(t)\end{bmatrix}$	*Fertig*
$f(0)$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\begin{bmatrix}0.828427\\0.828427\end{bmatrix}$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$
$f(0.75\cdot\pi)$	$\begin{bmatrix}-4.82843\\4.82843\end{bmatrix}$
$f(\pi)$	$\begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}$
$f(1.25\cdot\pi)$	$\begin{bmatrix}-4.82843\\-4.82843\end{bmatrix}$
$f\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right)$	$\begin{bmatrix}-3\\3\cdot\sqrt{3}\end{bmatrix}$
$f\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$	$\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$

Diese Abbildung enthält die Lage von Punkten zu bestimmten t-Werten, ferner in blau die fünf Extrempunkte: Hochpunkt und Tiefpunkt mit waagrechter Tangente sowie zwei Rechtspunkte und einen Linkspunkt mit senkrechter Tangente.
Die Berechnung dieser Punkte folgt zwei Seiten später.

4 Herleitung der Parametergleichungen

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2a\cdot(1-\cos(t))\cdot\cos(t)\\ 2a\cdot(1-\cos(t))\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$$



Der auf der Kardioide laufende Punkt ist P, der sich hier bereits von O aus nach P bewegt hat. Durch das Abrollen des äußeren Kreises am zentralen Kreis um M hat sich der anfängliche Berührpunkt O nach Q bewegt.

Der Bogen $\overset{\frown}{OQ}$ und der Bogen $\overset{\frown}{QP}$ sind daher gleich lang.

Berechnung der x-Koordinate von P:

$$x=\overline{OP_1}=\overline{MN}-\overline{OM}-\overline{P_1N}$$

Die Strecke MN kann man im Dreieck MNM_1 mit den Kosinus des Winkels t berechnen:

$$\cos(t)=\frac{\overline{MN}}{\overline{MM_1}}=\frac{\overline{MN}}{2a}\quad\Rightarrow\quad\overline{MN}=2a\cdot\cos(t).$$

Die Strecke P_1N ist gleichlang wie PP_2, die man im Dreieck PP_2M_2 mit dem Kosinus von α berechnen kann:

$$\cos(\alpha)=\frac{\overline{PP_2}}{a}\quad\Rightarrow\quad\overline{PP_2}=a\cdot\cos(\alpha).$$ Das Problem ist nun der Winkel α.

Da wir unsere Winkel im Bogenmaß messen, gilt für die gleich langen Bögen $\overset{\frown}{OQ}$ und $\overset{\frown}{QP}$:

$\overset{\frown}{OQ}=a\cdot t$ und $\overset{\frown}{QP}=a\cdot\gamma$, also $a\cdot t=a\cdot\gamma$, woraus folgt $\gamma=t$

Im Dreieck MRM_1 ist die Winkelsumme natürlich 180^O bzw. π: $t+\gamma+\beta=\pi$, also ist $\beta=\pi-2t$

Andererseits gilt für α und β: $\alpha+\beta=\pi \Rightarrow \alpha=\pi-\beta$.

Ersetzt man hierin β, erhält man: $\alpha=\pi-(\pi-2t)=2t$.

Also ist β doppelt so groß wie der „Umlaufwinkel" t bei M.

Zurück zur Berechnung von x: $x=\overline{MN}-\overline{OM}-\overline{P_1M}$

$x=2a\cdot\cos(t)-a-a\cdot\cos(2t)$

d. h. $x=2a\cdot\cos(t)-a\cdot(1+\cos(2t))$

Ersetzt man $\cos(2t)=2\cdot\cos^2(t)-1$, folgt: $x=2a\cdot\cos(t)-a\cdot(1+2\cdot\cos^2(t)-1)$

d. h. $x=2a\cdot\cos(t)-2a\cdot\cos^2(t)$

$$x=2a\cdot\cos(t)\cdot(1-\cos(t))$$

Berechnung der y-Koordinate von P: $y=\overline{PP}=\overline{P_2N}=\overline{M_1N}-\overline{M_1P_2}$

M_1N berechnet man im Dreieck MNM_1: $\sin(t)=\frac{\overline{M_1N}}{\overline{MM_1}}=\frac{\overline{M_1N}}{2a}\Rightarrow\overline{M_1N}=2a\cdot\sin(t)$

M_1P_2 berechnet man im Dreieck PP_2M_1: $\sin(\alpha)=\frac{\overline{M_1P_2}}{a}\Rightarrow\overline{M_1P_2}=a\cdot\sin(\alpha)=a\cdot\sin(2t)$

Also erhält man $y=2a\cdot\sin(t)-a\cdot\sin(2t)$

Mit $\sin(2t)=2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)$ folgt: $y=2a\cdot\sin(t)-2a\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)$

$$y=2a\cdot\sin(t)(1-\cos(t)),$$

was zu beweisen war ….

5 Ableitungen der Gleichungen und Extrempunkte

$$\vec{x}(t) = 2a\begin{pmatrix}(1-\cos(t))\cdot\cos(t)\\(1-\cos(t))\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = 2a\begin{pmatrix}\sin(t)\cdot\cos(t)+(1-\cos(t)\cdot(-\sin(t)))\\\sin(t)\cdot\sin(t)+(1-\cos(t)\cdot\cos(t))\end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix}\sin(t)\cdot\cos(t)-\sin(t)+\sin(t)\cdot\cos(t)\\\sin(t)\cdot\sin(t)+\cos(t)-\cos^2(t)\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = 2a\begin{pmatrix}2\sin(t)\cdot\cos(t)-\sin(t)\\\sin^2(t)-\cos^2(t)+\cos(t)\end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix}\sin(2t)-\sin(t)\\-\cos(2t)+\cos(t)\end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = 2a\begin{pmatrix}2\cdot\cos(2t)-\cos(t)\\\sin(2t)-\sin(t)\end{pmatrix}$$

Wo hat die Kurve eine <u>senkrechte</u> Tangente? Bedingung: $\dot{x}(t)=0$ aber $\dot{y}(t)\neq 0$

Bedingung: $\dot{x}(t)=0 \Leftrightarrow 2\sin(t)\cdot\cos(t)-\sin(t)=0 \Leftrightarrow \sin(t)\cdot(2\cos(t)-1)=0$

Das Nullprodukt liefert $\sin(t)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ oder } \pi \text{ oder } 2\pi$

oder aber $2\cdot\cos(t)=1 \Leftrightarrow \cos(t)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\pi \text{ oder } \frac{5}{3}\pi$

Punktkoordinaten und Kontrollen:

$t=\frac{1}{3}\pi$: $\vec{x}\left(\frac{1}{3}\pi\right)=4\cdot\begin{pmatrix}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\\\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \Leftrightarrow R_1\left(1|\sqrt{3}\right)$

$\dot{y}\left(\frac{1}{3}\pi\right)=4\cdot\left(-\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4\neq 0$

$\ddot{x}\left(\frac{1}{3}\pi\right)=4\cdot\left(2\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)-\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-6<0$

d. h. bei $t=\frac{1}{3}\pi$ hat x(t) ein Maximum, also ist R_1 ein **Rechtspunkt.**

$t=\frac{5}{3}\pi$: $\vec{x}\left(\frac{5}{3}\pi\right)=4\cdot\begin{pmatrix}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\\\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} \Leftrightarrow R_2\left(1|-\sqrt{3}\right)$

$\dot{y}\left(\frac{5}{3}\pi\right)=4\cdot\left(-\cos\left(\frac{10}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4\neq 0$

$\ddot{x}\left(\frac{5}{3}\pi\right)=4\cdot\left(2\cdot\cos\left(\frac{10}{3}\pi\right)-\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-6<0$

d. h. bei $t=\frac{5}{3}\pi$ hat x(t) ein Maximum, also ist R_2 ein **Rechtspunkt.**

$t=0$: $\vec{x}(0)=4\cdot\begin{pmatrix}(1-\cos(0))\cdot\cos(0)\\(1-\cos(0))\cdot\sin(0)\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}(1-1)\cdot 1\\(1-1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow O(0|0)$

$\dot{y}(0)=4\left(-\cos(0)+\cos(0)\right)=4\cdot(-1+1)=0$ Also hier keine senkrechte Tangente.

Da für t = 0 gilt $\dot{\vec{x}}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist der Ursprung ein singulärer Punkt (Spitze).

$t=\pi$: $\vec{x}(\pi)=4\cdot\begin{pmatrix}(1-\cos(\pi))\cdot\cos(\pi)\\(1-\cos(\pi))\cdot\sin(\pi)\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}(1+1)\cdot(-1)\\(1+1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow L(-8|0)$

$\dot{y}(\pi)=4\left(-\cos(2\pi)+\cos(\pi)\right)=4\cdot(-1-1)\neq 0$ Also hier eine senkrechte Tangente.

$\ddot{x}(\pi)=4\cdot\left(2\cdot\cos(2\pi)-\cos(\pi)\right)=4\cdot\left(2\cdot 1-(-1)\right)=4\cdot 3>0$

d. h. bei $t=\pi$ hat x(t) ein Minimum, also ist L ein **Linkspunkt.**

Wo hat die Kurve eine <u>waagrechte</u> Tangente? Bedingung: $\dot{y}(t)=0$ aber $\dot{x}(t)\neq 0$

Bedingung: $\dot{y}(t)=0$ d. h. $-\cos(2t)+\cos(t)=0$

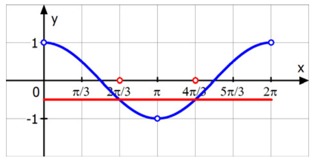
Formel: $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$: $-2\cos^2(t)+1+\cos(t)=0$

Ordnen: $2\cos^2(t)-\cos(t)-1=0$

Quadratische Gleichung für cos(t): $\cos(t)=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$

$\cos(t)=-\frac{1}{2}$ führt zu $t=\frac{2}{3}\pi$ oder $t=\frac{4}{3}\pi$

$\cos(t)=1$ führt zu $t=0$.



Punktkoordinaten und Kontrollen:

$t=\frac{2}{3}\pi$: $\vec{x}\left(\frac{2}{3}\pi\right)=4\cdot\begin{pmatrix}\left(1-\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\\ \left(1-\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 3\sqrt{3}\end{pmatrix}\Leftrightarrow H\left(-3\,|\,3\sqrt{3}\right)$

1. Kontrolle mit $\dot{x}(t)=4\cdot(\sin(2t)-\sin(t))$:

$$\dot{x}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)=4\left(\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)-\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\neq 0$$

2. Kontrolle mit $\ddot{y}(t)=4(\sin(2t)-\sin(t))$:

$$\ddot{y}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)=4\left(\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)-\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)<0\quad\Rightarrow\quad\text{Maximum}$$

d. h. bei $t=\frac{2}{3}\pi$ hat x(t) ein Maximum, also ist H ein **Hochpunkt.**

$t=\frac{4}{3}\pi$: $\vec{x}\left(\frac{2}{3}\pi\right)=4\cdot\begin{pmatrix}\left(1-\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\\ \left(1-\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix}\Leftrightarrow T\left(-3\,|\,3\sqrt{3}\right)$

$$\dot{x}\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)=4\left(\sin\left(\tfrac{8}{3}\pi\right)-\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right)\neq 0$$

$$\ddot{y}\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)=4\left(\sin\left(\tfrac{8}{3}\pi\right)-\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)=4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)>0\quad\Rightarrow\quad\text{Minimum}$$

d. h. bei $t=\frac{4}{3}\pi$ hat x(t) ein Minimum, also ist T ein **Tiefpunkt.**

$t=0$: $\vec{x}(0)=4\cdot\begin{pmatrix}(1-\cos(0))\cdot\cos(0)\\ (1-\cos(0))\cdot\sin(0)\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}(1-1)\cdot 1\\ (1-1)\cdot 0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow P(0\,|\,0)$

$$\dot{x}(0)=4(\sin(0)-\sin(0))=0$$

d. h. für die Tangentensteigung ergibt sich $y'=\frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}=\frac{0}{0}$ unbestimmter Ausdruck.

Dann hilft der **Satz von de L'Hospital** weiter:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos(2t)+\cos(t)}{\sin(2t)-\sin(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\sin(2t)-\sin(t)}{2\cdot\cos(2t)-\cos(t)}=\frac{2\cdot 0-0}{2\cdot 1-1}=\frac{0}{2}=0$$

(Dabei wurde für den neuen Grenzwertbruch Zähler und Nenner getrennt abgeleitet, also ohne Verwendung der Quotientenregel).

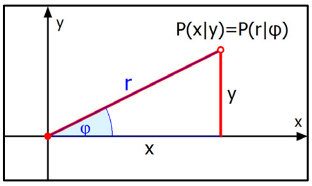
Man erhält dadurch die Aussage, dass es im Ursprung eine waagrechte Tangente erhält. Allerdings handelt es sich weder um einen Hochpunkt noch um einen Tiefpunkt, sondern um eine Spitze.

6 Gleichungen von Kardioiden in Polarkoordinaten.

Die Polarkoordinaten eines Punktes bestehen aus einem Winkel φ gegen die positive x-Achse und dem zugehörigen Radius r (Entfernung vom Ursprung in Richtung φ: $P(r\,|\,\varphi)$.

Es ist $\sin(\varphi)=\frac{y}{r} \;\Rightarrow\; y=r\cdot\sin(\varphi)$

Und $\cos(\varphi)=\frac{x}{r} \;\Rightarrow\; x=r\cdot\cos(\varphi)$



Die Gleichung einer Kardioide lautet $\vec{x}(t)=2a\begin{pmatrix}(1-\cos(t))\cdot\cos(t)\\(1-\cos(t))\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$

bzw. $x=\underbrace{2a\cdot(1-\cos(\varphi))}_{r}\cdot\cos(\varphi)$ und $y=\underbrace{2a\cdot(1-\cos(\varphi))}_{r}\cdot\sin(\varphi)$

Man erkennt, dass man durch den Ansatz $r=2a\cdot(1-\cos(\varphi))$ bereits eine Gleichung in Polarkoordinaten vorliegen hat. Meistens lässt man den Streckfaktor 2 weg und erhält dann als einfachste Kardioide: $r(\varphi)=a\cdot(1-\cos(\varphi))$ Möglich ist auch $r(\varphi)=a\cdot(1+\cos(\varphi))$

Es gibt verschiedene Lagen für die Kardioide:

Abb. 12: $r(\varphi)=2\cdot(1+\cos(\varphi))$,

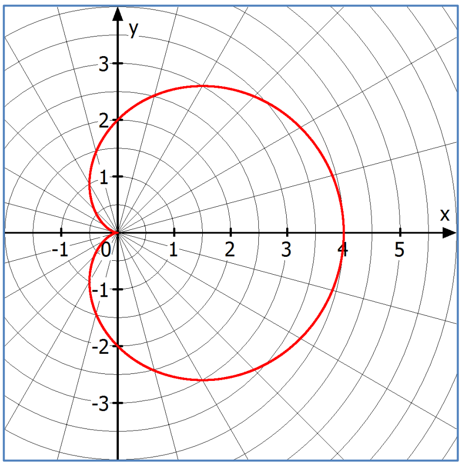


Abb. 13: $r(\varphi)=2\cdot(1-\cos(\varphi))$

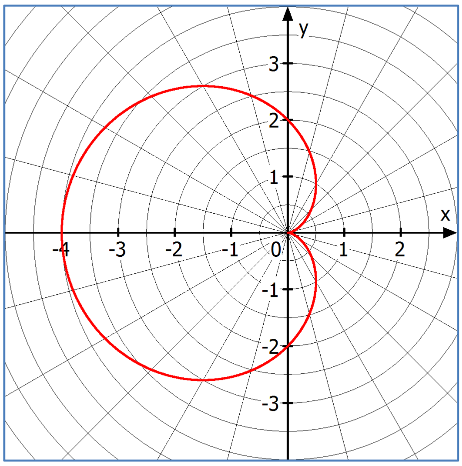


Abb. 14: $r(\varphi)=2\cdot(1+\sin(\varphi))$

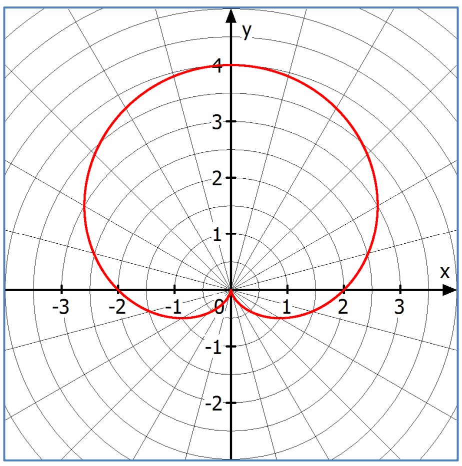
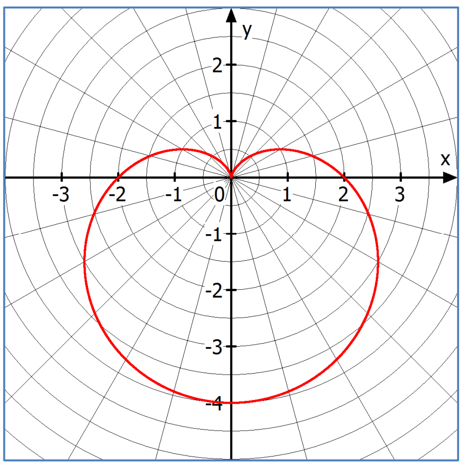


Abb. 15: $r(\varphi)=2\cdot(1-\sin(\varphi))$



7 Herleitung der Koordinatengleichung

Ausganggleichung ist $r = a \cdot (1 + \cos(\varphi))$

$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$: $r = a \cdot \left(1 + \frac{x}{r}\right)$

$r = \frac{a \cdot (r + x)}{r}$

$r^2 = ar + ax$

$r^2 = x^2 + y^2$: $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2} + ax$

$(x^2 + y^2) - ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$

Quadrieren: $(x^2 + y^2)^2 - 2ax \cdot (x^2 + y^2) + \cancel{a^2 x^2} = a^2 (\cancel{x^2} + y^2)$

$(x^2 + y^2)^2 - 2ax \cdot (x^2 + y^2) - a^2 y^2 = 0$

Oder auch so: $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$

Geht man aus von $r = 2a \cdot (1 + \cos(\varphi))$,

dann folgt: $(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2 y^2 = 0$

bzw. $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4ax) - 4a^2 y^2 = 0$

8 Berechnung der Bogenlänge der Kardioide

Für die Bogenlänge einer Kurve mit Polarkoordinaten kennen wir aus 543011 die Formel

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

Dazu brauchen wir eine Gleichung der Kardioide mit Polarkoordinaten:

$$r = 1 + \cos(\varphi) \text{ für } \varphi \in [0;\pi[\text{ mit } r'(\varphi) = -\sin(\varphi)$$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cdot\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cdot\cos(\varphi)}\, d\varphi =$$

$$s = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(\varphi)}\, d\varphi =$$

1. Möglichkeit Substitution: $z = 1 + \cos(\varphi) \Rightarrow dz = z' \cdot d\varphi = -\sin(\varphi)\cdot d\varphi \quad (1)$

Man muss nun $\sin(\varphi)$ ersetzen: $\sin(\varphi) = \sqrt{1-\cos^2(\varphi)} = \sqrt{(1+\cos(\varphi))(1-\cos(\varphi))}$

Die erste Klammer ist identisch mit z, für die 2. Klammer stellt man $z = 1 - \cos(\varphi)$ um: $\cos(\varphi) = z - 1$

Das ergibt denn $\sin(\varphi) = \sqrt{z\cdot(1-(z-1))} = \sqrt{z\cdot(2-z)}$

Das führt dann endlich von (1) zu $dz = -\sqrt{z}\cdot\sqrt{2-z}\cdot d\varphi \Rightarrow d\varphi = -\dfrac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{2-z}}$

Noch die Grunzen umrechnen: $\varphi_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 2$ und $\varphi_2 = \pi \Rightarrow z_2 = 0$

Jetzt kann man endlich einsetzen:

$$s = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos(\varphi)}\, d\varphi = -\sqrt{2}\int_2^0 \sqrt{z}\cdot\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{2-z}} = -\sqrt{2}\int_0^2 (2-z)^{-1/2} dz = -\sqrt{2}\cdot\left[\frac{(2-z)^{1/2}}{-1\cdot\frac{1}{2}}\right]_2^0 = 2\sqrt{2}\cdot\left[\sqrt{2-z}\right]_2^0 =$$

$$s = 2\sqrt{2}\cdot\left[\sqrt{2}-\sqrt{0}\right] = 4 \text{ (LE)}$$

Wer die Grenzen nicht umrechnen will, muss rücksubstituieren: $s = -2\sqrt{2}\cdot\left[\sqrt{2-(1+\cos(\varphi))}\right]_0^{\pi} = \ldots$

2. Möglichkeit **mit Hilfe der trigonometrischen Formel** $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\varphi)}{2}}$

erhält man $\sqrt{1+\cos(\varphi)} = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Damit folgt:

$$s = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos(\varphi)}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\cdot\left[\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = 4\cdot\left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{ (LE)}$$

Allgemein: Umfang U = 4a bzw. 8a je nach Kurvengleichung.

Hinweis: Die allgemeine Kardioide wird noch durch den Faktor a gestreckt: $r = a(1+\cos(\varphi))$.
Dann wird die Bogenlänge a-mal so groß:

9 Berechnung der Fläche im Innern der Kardioide

Es gilt diese Formel: $A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi$

Ich verwende diese Gleichung: $r = a(1+\cos(\varphi))$

$$A = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos(\varphi))^2\, d\varphi = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right)d\varphi$$

Wegen $\cos(2\varphi) = 2\cdot\cos^2(\varphi)-1$ wird $\cos^2(\varphi) = \tfrac{1}{2}(\cos(2\varphi)+1)$ und daher folgt

$$A = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos(\varphi)+\tfrac{1}{2}\cdot\cos(2\varphi)+\tfrac{1}{2}\right)d\varphi = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\left[\frac{3}{2}\varphi+2\cdot\sin(\varphi)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$A = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\left[3\pi+2\cdot 0+\tfrac{1}{4}\cdot 0\right]-\tfrac{1}{2}a^2\cdot[0] = \tfrac{3}{2}a^2\cdot\pi$$

10 Die Kardioide ist eine spezielle Pascalsche Schnecke.

Diese wird im Text 54165 besprochen. Deren allgemeine Koordinatengleichung lautet:

$$\left(x^2+y^2-ax\right)^2-b^2\left(x^2+y^2\right)=0$$

Für b = a wird daraus $\left(x^2+y^2-ax\right)^2-a^2\left(x^2+y^2\right)=0$

bzw. $\left(x^2+y^2-ax\right)^2-a^2x^2-a^2y^2=0$

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot ax+\cancel{a^2x^2-a^2x^2}-a^2y^2=0$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2ax\cdot\left(x^2+y^2\right)-a^2y^2=0$$

Und dies ist die Gleichung einer Kardioide.