Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 1a

Lehrgang über Pfeilvektoren

Ganz einfache Erklärung der Grundlagen:

Viele grundlegende Aufgaben

Datei Nr. 63005

Stand 29. Juli 2021

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort !!!

Dieser Text ist entstanden, weil die Schulmathematik aus Zeitgründen immer mehr zusammengestrichen wird. Die Herleitungen und logischen Begründungen entfallen immer mehr. Stattdessen stehen Anwendungen auf dem Programm. Da nur wenige Mathematik studieren, verzichtet man offenbar immer mehr auf Theorie und versucht, durch Anwendungsaufgaben mehr die Motivation zu wecken und die Mathematik weniger trocken zu gestalten.

In diesem mehr praxisorientierten Text versuche ich zu veranschaulichen, warum man mit Pfeilklassen, die geometrische Vektoren sind, Geometrie betreiben kann. Dann werden die wichtigsten Aufgaben dieser Anfangsphase der Vektorgeometrie ausführlich erklärt.

Inhalt

1. Der Trick mit den Pfeilklassen

1.1 Das schlimme Wort „Vektor" – was steckt dahinter?

In der Algebra lernt man, wie man rechnet, mit Zahlen, Brüchen Wurzeln, Potenzen, Logarithmen usw.
Bei der Addition bildet man zu zwei Zahlen eine dritte Zahl und nennt sie Summe.
Bei der Multiplikation tut man das auch, nur eben anders, das Ergebnis nennt man Produkt.
Man kann aber auch andere Objekte „addieren", also zwei Objekten eine „Summe" zuordnen. Das müssen nun keine Zahlen mehr sein.

Wir stellen uns also vor, wir hätten eine Menge V. Ihre Elemente bezeichnet man mit Buchstaben und einem Pfeil darüber, also: $V = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ,,,\}$. Für sie gibt es zwei Rechenoperationen Die eine heißt ***Addition***: Nach einer bestimmten (uns im Moment noch nicht bekannten) Vorschrift ordnet man zwei Elementen von V ein drittes zu und nennt es Summe: $\vec{a} + \vec{b} \in V$. Diese Summe ist wieder ein Element von V. Damit dies ordnungsgemäß abläuft, gibt es für diese Addition bestimmte Rechenregeln, die wir uns später ansehen.
Die zweite Rechenoperation ist die ***Multiplikation mit einer reellen Zahl***: $r \cdot \vec{a} \in V$. Das Ergebnis nennen wir Vielfaches, und das Vielfache liegt wieder in V. Auch hierzu gibt es einige Rechenregeln, an die man sich halten muss. Diese Berechnung nennt man auch ***S-Multiplikation***.

So, nun sind wir fast fertig: Eine solche Menge V mit einer Addition und einer S-Multiplikation nennt man einen **Vektorraum** und ihre Elemente heißen **Vektoren**. Wir sehen also:

Vektoren sind die Elemente einer Menge V (diese Menge nennt man den Vektorraum), mit denen man nach *„bestimmten"* Regeln rechnen kann.

1.2 Zahlenpaare (und Zahlentripel usw.) sind Vektoren

Im Text 61101 wurde mit Zahlenpaaren und Tripeln gearbeitet. Dort wurde gezeigt, dass man sie addieren kann, sogar Vielfache kann man bilden. Und wir haben Rechengesetze untersucht.
Hier eine kurze Wiederholung:

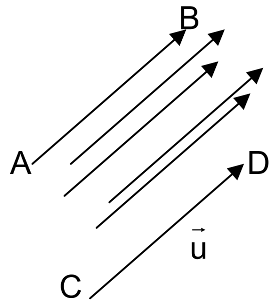
Satz 1
Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet einen Vektorraum mit diesen Verknüpfungen
Addition: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \mid a_2) + (b_1 \mid b_2) := (a_1 + b_1 \mid a_2 + b_2)$
S-Multiplikation: $r \cdot \vec{a} = r \cdot (a_1 \mid a_2) = (ra_1 \mid ra_2)$

Satz 2
Die Menge $\mathbb{R}^3$ bildet einen Vektorraum mit diesen Verknüpfungen
Addition: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3) + (b_1 \mid b_2 \mid b_3) := (a_1 + b_1 \mid a_2 + b_2 \mid a_3 + b_3)$
S-Multiplikation: $r \cdot \vec{a} = r \cdot (a_1 \mid a_2 \mid a_3) = (ra_1 \mid ra_2 \mid ra_3)$

Beispiele: $(3 \mid 5) + (2 \mid -3) = (3+2 \mid 5-3) = (5 \mid 2)$ und $4 \cdot (3 \mid 2) = (12 \mid 8)$

$(1 \mid 2 \mid 3) + (4 \mid 5 \mid -6) = (5 \mid 7 \mid -3)$ und $\frac{1}{2} \cdot (4 \mid 5 \mid -\frac{1}{4}) = (2 \mid \frac{5}{2} \mid -\frac{1}{8})$
Die Vektorraumregeln findet man in 61101 Seite 4 bis 6

1.3 Pfeilklassen sind <u>auch</u> Vektoren, Pfeile aber nicht.



Rechts sind 6 Pfeile abgebildet. Sie haben alle exakt dieselbe Richtung und dieselbe Länge. Von dieser Sorte gibt es unendlich viele.

Die Menge <u>all</u> dieser Pfeile (die alle dieselbe Richtung und Länge besitzen) nennt man eine **Pfeilklasse** oder einen **Pfeilvektor**.

Meistens bezeichnet man sie mit einem Buchstaben mit einem mit einem Pfeil, etwa $\vec{u}$.

Merke: Die abgebildeten Pfeile sind "**parallelgleich**" und gehören somit alle zur selben Pfeilklasse. Jeder einzelne dieser Pfeile ist ein Repräsentant dieser Pfeilklasse (wir sagen künftig einfach Vektor dazu). Man könnte diesen Vektor (als Pfeilmenge) dann so schreiben: $\vec{u} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, ...\right\}$ Dennoch findet man ständig diese Schreibweise: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

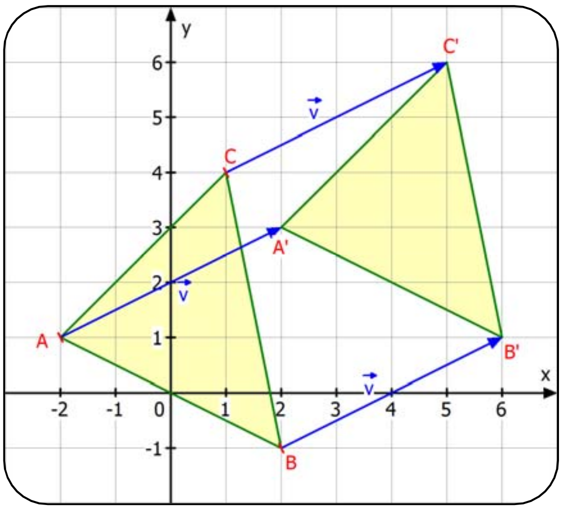
Achtung: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ **<u>heißt nicht</u>:** Der Vektor $\vec{u}$ ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$.
Denn $\overrightarrow{AB}$ ist nur ein einziger Pfeil, also kein Vektor.
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ bedeutet**:** $\overrightarrow{AB}$ **ist ein Pfeil des Vektors** $\vec{u}$ **.**

Die richtige Schreibweise wäre eigentlich $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$. Aber diese ist *leider* nicht üblich.

Warum ist dies schlampig? Weil sehr schnell Schüler meinen, dass Vektoren *immer* etwas mit Pfeilen zu tun haben. Dagegen sollte man sich merken, dass Pfeilklassen nur eine Sorte von Vektoren sind. Es gibt andere, die keine solche geometrische Bedeutung haben.

Und noch etwas: Wenn ich einen Pfeil an die Tafel zeichne und frage einen Schüler: „Ist das ein Vektor?“ Dann kommt meistens die Antwort „ja“. Und ich sage dann „nein“!
Das ist ein einzelner feil eines Vektors …..

1.4 Pfeile deuten Verschiebungen an



Eine Verschiebung soll laut Vorschrift <u>alle</u> Punkte der Zeichenebene bewegen. Und zwar alle um die gleiche Strecke in dieselbe Richtung.

Dies kann man durch Pfeile kennzeichnen.
Rechts wurde ein Dreieck verschoben.
Die zu den drei Eckpunkten gehörenden Pfeile sind eingezeichnet.

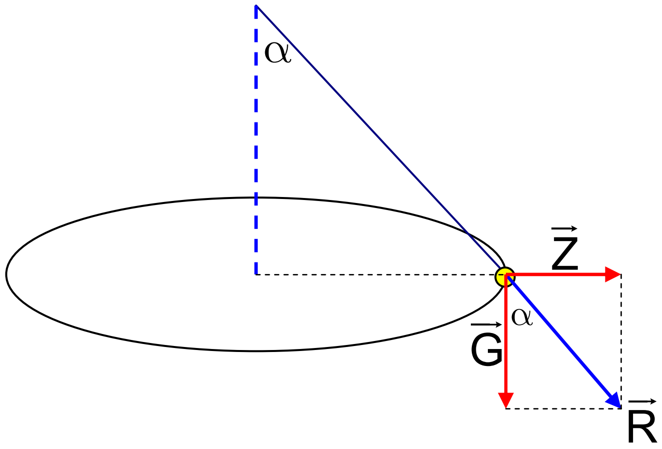
Alle drei Pfeile gehören zum Vektor $\vec{\mathbf{v}}$.

Diesen Vektor kann man zahlenmäßig so erfassen:
$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.Das soll bedeuten: Alle seine Pfeile zeigen um 4 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung.

2. Addition von Pfeilklassenvektoren

2.1 Zwei Beispiele aus der Physik, bei denen Vektoren vorkommen. Wahrscheinlich kennt sie jeder!

BEISPIEL 1 Überlagerung von Kräften am Fadenpendel



Eine punktförmige Masse bewegt sich an einem masselosen Faden auf einer Kreisbahn. Zwei Kräfte beeinflussen den ganzen Bewegungsablauf. Zum einen wirkt durch die Kreisbewegung die Zentrifugalkraft Z auf den Körper (sie zieht ihn nach außen) - zum andern wirkt natürlich die Gravitationskraft und erzeugt die Gewichtskraft G nach unten. Beide Kräfte überlagern sich so, dass sich die **resultierende Kraft** R ergibt. Diese hat die Richtung der Diagonalen im Kräfteparallelogramm aus Z und G, das in diesem Fall ein Rechteck ist. R zieht die Pendelmasse (gelb) unter dem Winkel α nach schräg rechts unten. Daher stellt sich das ganze Fadenpendel unter diesem Winkel ein, d.h. der Winkel α tritt oben an der Aufhängung noch einmal auf.

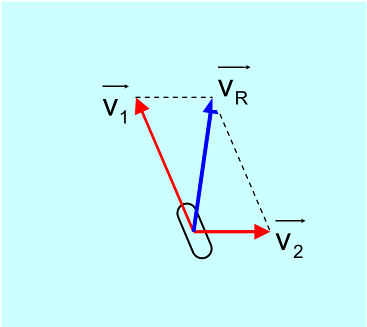
Die Physiker sprechen nicht nur von der Überlagerung der Kräfte, sondern nennen es Kräfteaddition und schreiben: $\vec{R} = \vec{G} + \vec{Z}$. Dass es sich hier nicht einfach um eine Addition im herkömmlichen Sinne, sondern um etwas ganz Neues handelt, das nur diesen Namen trägt, ist erkennbar.

Den Summenvektor $\vec{R}$ kann man als Diagonale im Rechteck konstruieren.

Man kann den Winkel α trigonometrisch berechnen und die Größe (Betrag) dieser Kraft über den Satz des Pythagoras:

$$\tan\alpha = \frac{Z}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr} \quad \text{und} \quad R = \sqrt{Z^2 + G^2}\,.$$

BEISPIEL 2 Überlagerung von Geschwindigkeiten

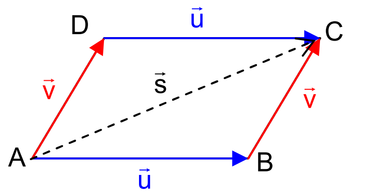


Ein Boot fährt mit der Geschwindigkeit v_1 über einen Fluss. Die Richtung wird durch den Pfeil festgelegt. Der Fluss hat eine Strömungsgeschwindigkeit v_2. Beide überlagern sich zur resultierenden Geschwindigkeit v_R. Seine Richtung wird durch die Diagonale des Parallelogramms definiert, und seine Länge durch die Länge der Diagonalen. Durch Größe und Richtung wird die Geschwindigkeit in der Physik auch zu einer Art Vektor, und man schreibt:

$$\vec{v_R} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

Auch hier kann man mit der Trigonometrie die Winkel und Pfeillängen (also Geschwindigkeitsbeträge) berechnen.

2.2 Addition von Vektoren durch Verschiebungen



Der erste Vektor $\vec{u}$ verschiebt den Punkt A nach B.
Der zweite Vektor $\vec{v}$ verschiebt B nach C.
Ersetzt man diese beiden nacheinander ausgeführten Verschiebungen durch eine einzige, die A direkt nach C verschiebt, dann benötigt man dazu den dritten Vektor $\vec{s}$. Dieser stellt die Gesamtverschiebung dar, weshalb man $\vec{s}$ auch den **Summenvektor** aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nennt:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

Dieser Figur entnimmt man jetzt **dreierlei Konstruktionsmöglichkeiten für einen Summenvektor**:

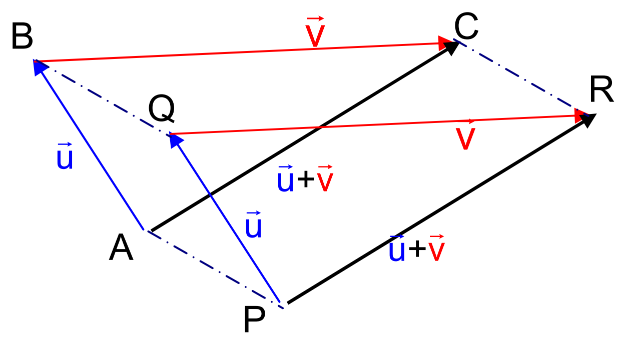
1. **„Pfeile aneinander hängen":** Um einen Pfeil des Vektors $\vec{u}+\vec{v}$ zu zeichnen, beginnt man mit einem beliebigen Pfeil des Vektors $\vec{u}$ und hängt an seinen Endpunkt den Pfeil des Vektors $\vec{v}$ an, der dort seinen Anfangspunkt besitzt.

2. **Bei der Addition ist die Reihenfolge egal.** Man erkennt in der Abbildung, dass man die Reihenfolge der beiden Summanden vertauschen kann: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
Also kann man auch mit irgendeinem Pfeil von $\vec{v}$ beginnen, hängt dann den passenden Pfeil von $\vec{u}$ an seinen Endpunkt und erhält so einen Pfeil des Summenvektors $\vec{u}+\vec{v}$.

3. Die **Parallelogramm-Methode** ist ebenfalls sehr gebräuchlich. Dazu wählt man zwei Pfeile von $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die denselben Anfangspunkt besitzen (hier war es A). Die beiden Pfeile ergänzt man zu einem Parallelogramm. Der Pfeil, der zu der Diagonalen gehört, die beim gemeinsamen Anfangspunkt der Pfeile von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beginnt, gehört zum Summenvektor $\vec{u}+\vec{v}$

Wichtig: *Die Addition zweier Vektoren kann man an jedem Startpunkt ausführen.*
Mit anderen Worten: *Das Ergebnis hängt nicht davon ab, welchen Startpfeil man wählt.*

Man kann das so erkennen:



Beginnt man die Additionskonstruktion bei A, dann wird $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Beginnt man die Addition beim Startpunkt P, dann wird $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

Nun hat man zwei verschiedene Ergebnispfeile.
Diese sind aber parallelgleich, gehören also zum gleichen Ergebnisvektor.

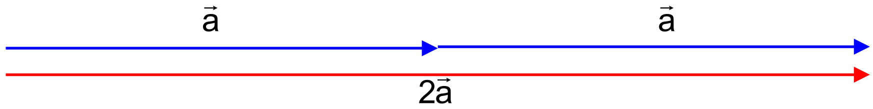
3 S-Multiplikation (Vielfache von Vektoren)

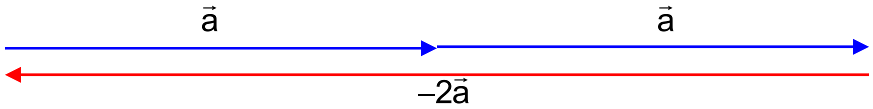
Beim Rechnen mit Zahlen kennt jeder die Möglichkeit, die Addition mehrerer gleicher Zahlen dadurch abzukürzen, dass man Vielfache bildet: $7+7+7+7+7+7+7+7=8\cdot 7$

Eine Summe aus 8 gleichen Zahlen ist das 8-fache dieser Zahl.

Dasselbe hat man für Vektoren eingeführt: $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=8\cdot\vec{a}$ oder kurz $8\vec{a}$.

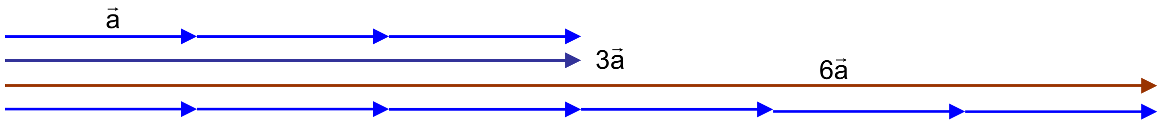
Ein gravierender Unterschied besteht zwischen diesen beiden Methoden: Vielfache von Zahlen sind ein Produkt zwischen Zahlen, während Vielfache von Vektoren ein Produkt aus einer Zahl und einem Vektor ist. Es geht hier also nicht um ein Produkt oder eine Multiplikation von Vektoren miteinander. Hier einige Darstellungen von Vielfachen von Pfeilklassenvektoren:





Das Minuszeichen hat zusätzlich die Richtung des Pfeils geändert.

Als nächstes wird aus $\vec{a}$ der Vektor $3\vec{a}$ und dann $6\vec{a}$ erzeugt.

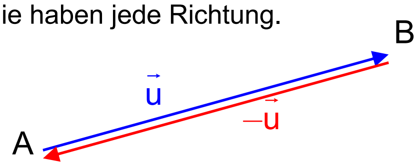


Günstig ist, dass dabei die bekannten Rechenregeln gelten. Das alles ist erlaubt:

$$2\cdot\left(3\vec{a}\right)=\left(2\cdot 3\right)\cdot\vec{a}=6\vec{a}$$
$$3\vec{a}+5\vec{a}=\left(3+5\right)\vec{a}=8\vec{a}$$
$$5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=5\vec{a}+5\vec{b}$$
$$-3\cdot\left(4\vec{a}+6\vec{b}\right)=-12\vec{a}-18\vec{b}$$
$$\left(4\vec{a}-2\vec{b}\right)-\left(3\vec{a}+5\vec{b}\right)=4\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-5\vec{b}=1\vec{a}-7\vec{b}=\vec{a}-7\vec{b}$$

Es gibt einen Nullvektor und inverse Vektoren

Der Nullvektor $\vec{o}=0\cdot\vec{a}$ hat „fiktive“ Pfeile mit der Länge Null. Sie haben jede Richtung.



Der Vektor $-\vec{u}=\text{-}1\cdot\vec{u}$ heißt Gegenvektor (= inverser Vektor) zu. Er hat dieselbe Länge wie $\vec{u}$, ab er die entgegengesetzte Richtung: Gehört $\overrightarrow{AB}$ zum Vektor $\vec{u}$, dann gehört der Pfeil $\overrightarrow{BA}$ zum Vektor $-\vec{u}$

Die Summe beider Vektoren ist der **Nullvektor:**

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{o} \qquad \text{oder so geschrieben} \qquad \vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{o}.$$

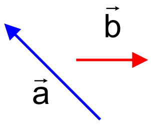
4 Linearkombinationen von Vektoren.

Unter einer Linearkombination versteht man eine Summe von Vielfachen.

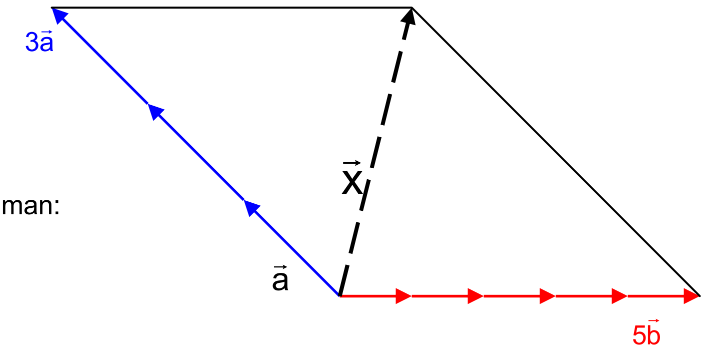
Beispiel 1: $\vec{x} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$

Die Konstruktion ist einfach:

Aus

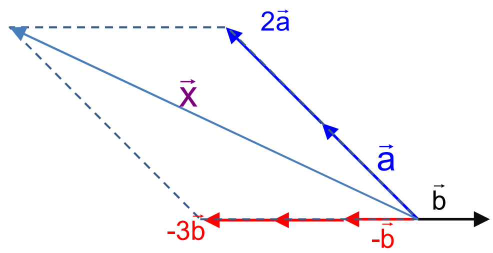


bildet man:



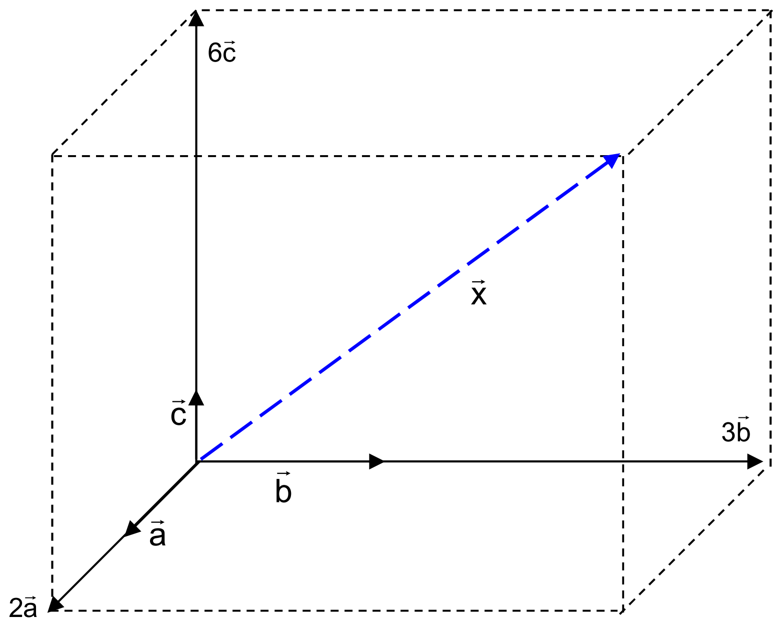
Beispiel 2: $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ zeichne ich als

$\vec{x} = 2\vec{a} + (-3)\vec{b}$



Beispiel 3: Es gibt auch Linearkombinationen, die im Raum gebildet werden, aber dann natürlich in der Zeichenebene als Schrägbild gezeichnet werden.

Hier ist dargestellt: $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$



Diese Figur hat die Gestalt eines Quaders, weil der Eindruck vermittelt wird, als ob die Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ rechte Winkel bilden.

5 Subtraktion von Pfeilklassenvektoren.

Jeder kennt vom Zahlenrechnen, dass man die Addition zu einer Subtraktion umkehren kann:

Aus der Addition $5+3=8 \quad | \ -3$

folgt durch Umstellung: $5 \quad = 8-3$

Dasselbe tun wir jetzt mit Vektoren:

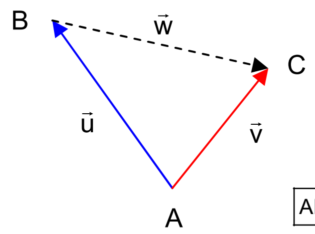
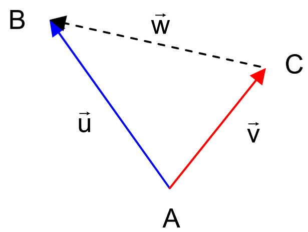


Abb. 2

Abb. 1

Wenn man die Abbildung genau studiert, erkennt man, dass die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ durch eine Summe miteinander verknüpft sind: Es gilt: $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$.

Durch Umstellung folgt daraus: $\boxed{\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}}$



In der nächsten Abbildung hat der Vektor $\vec{w}$ die entgegen gesetzte Richtung. Jetzt kann man diese Summe entdecken: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$.

Durch Umstellung folgt daraus: $\boxed{\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}}$

In den beiden Abbildungen erscheinen verschiedene Differenzen:
In Abb. 1 ist es $\boxed{\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}}$ und in Abb. 2 $\boxed{\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}}$.

Wie konstruiert man diese Differenzvektoren?

1. Schritt: Für die zu subtrahierenden Vektoren verwendet man zwei Pfeile mit gemeinsamem Anfangspunkt (A).

2. Schritt: Dann verbindet man die Spitzen der beiden Pfeile

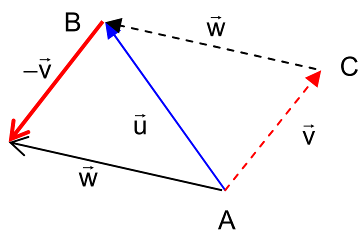
3. Schritt: Die Pfeilspitze zeigt zu dem Pfeil, der in der Differenz zuerst genannt wird.

In Abb. 1 entsteht $\vec{v}-\vec{u}$, also zeigt die Spitze des Differenzpfeils nach $\vec{v}$.
In Abb. 2 entsteht $\vec{u}-\vec{v}$, also zeigt die Spitze des Differenzpfeils nach $\vec{u}$.

Es gibt noch eine ganz andere Möglichkeit:

Jede Differenz ist auch eine Summe: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

Also kann man auch die Summe aus $\vec{u}$ und $-\vec{v}$ konstruieren, indem man deren Pfeile aneinander hängt.
An den blauen Pfeil von $\vec{u}$ habe ich den roten Pfeil $-\vec{v}$ angehängt. Das Ergebnis ist der untere $\vec{w}$ – Pfeil.



Jetzt folgen Konstruktionsbeispiele.

6. Konstruktionsübungen zu Summen und Differenzen

Abb. 1: $\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{CA} =$ $\overrightarrow{DC} =$

Abb. 2: $\overrightarrow{BD} =$ $\overrightarrow{AE} =$ $\overrightarrow{EC} =$

Abb. 3: $\overrightarrow{CD} =$ $\overrightarrow{DB} =$ $\overrightarrow{DB} =$

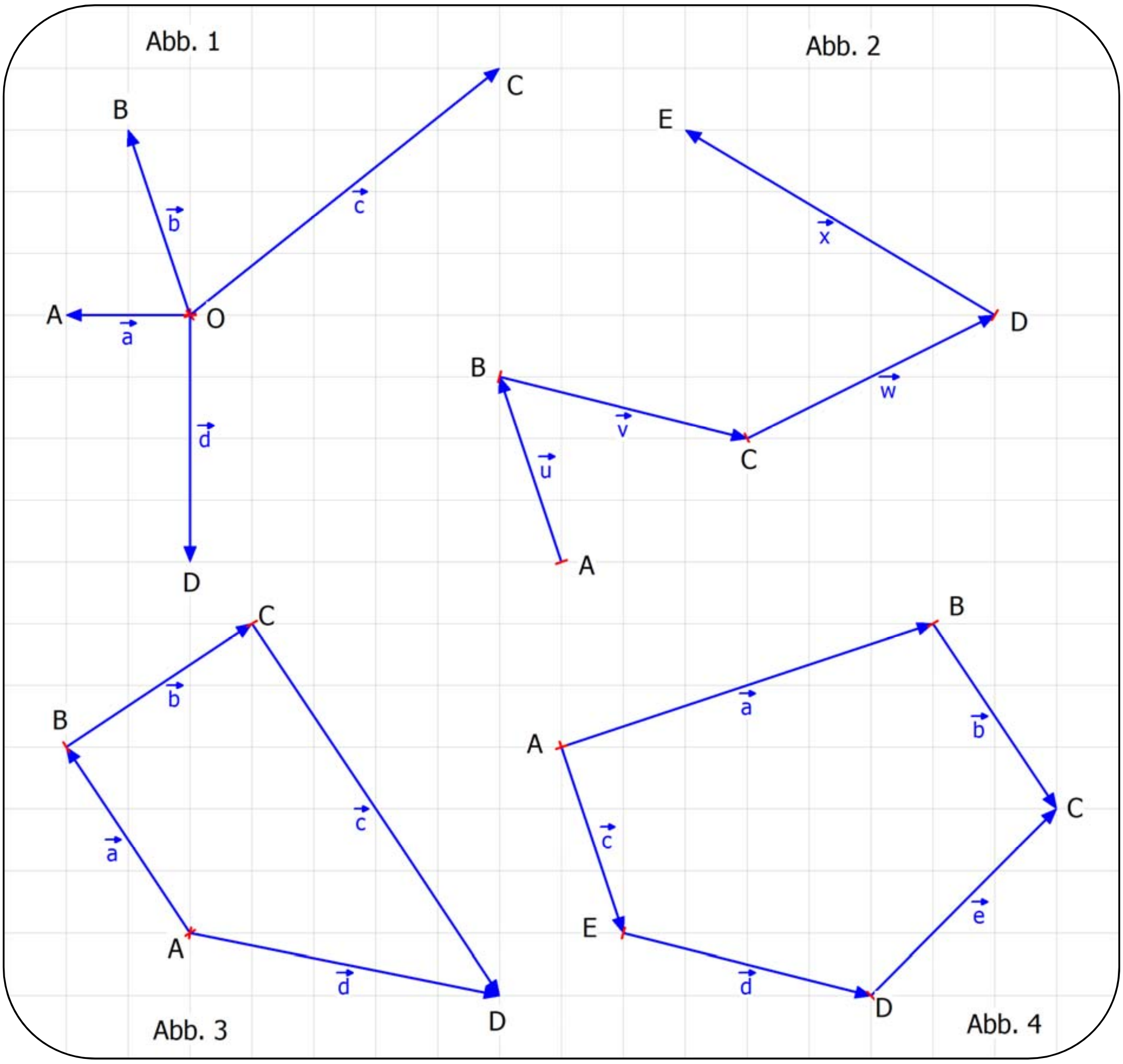
mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{d}$ mit $\vec{b}$ und $\vec{c}$

$\overrightarrow{BC} =$ $\overrightarrow{AC} =$ $\overrightarrow{AC} =$

mit $\vec{a}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{c}$ und $\vec{d}$

Abb. 4: Bestimme auf zwei Arten: $\overrightarrow{AD} =$ $\overrightarrow{AD} =$

$\overrightarrow{CD} =$ $\overrightarrow{CD} =$ $\overrightarrow{CE}$



Ergebnisse:

Abb. 1: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$ $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$

Abb. 2: $\overrightarrow{BD} = \vec{v} + \vec{w}$ $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x}$ $\overrightarrow{EC} = -\vec{x} + (-\vec{w}) = -(\vec{w} + \vec{x})$

Abb. 3: $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - (\vec{a} + \vec{b})$ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + (-\vec{a}) + \vec{d} = -\vec{d} - \vec{a} + \vec{d}$

$\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{d}$ $\overrightarrow{DB} = -\vec{c} + (-\vec{b}) = -\vec{c} - \vec{b} = -(\vec{c} + \vec{b})$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{d} + (-\vec{c}) = -\vec{a} + \vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{d} + (-\vec{c}) = \vec{d} - \vec{c}$

Abb. 4: $\overrightarrow{AD} = \vec{c} + \vec{d}$ $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{e}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{e}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = (\vec{c} + \vec{d}) - (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = -\vec{b} + (-\vec{a}) + \vec{c} + \vec{d} = -\vec{b} - a + \vec{c} + \vec{d}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Hinweis:

In einer Summe darf man die Reihenfolgen vertauschen.
Außerdem ist $+(-\vec{a}) = -\vec{a}$ und $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} + (-\vec{b})$
Man kann also die Ergebnisse unterschiedlich aufschreiben.

7. Zwei Distributivgesetze

Verwendet man die S-Multiplikation, also Vielfache von Vektoren, dann sind die **Distributivgesetze** sehr wichtig. Diese lauteten:

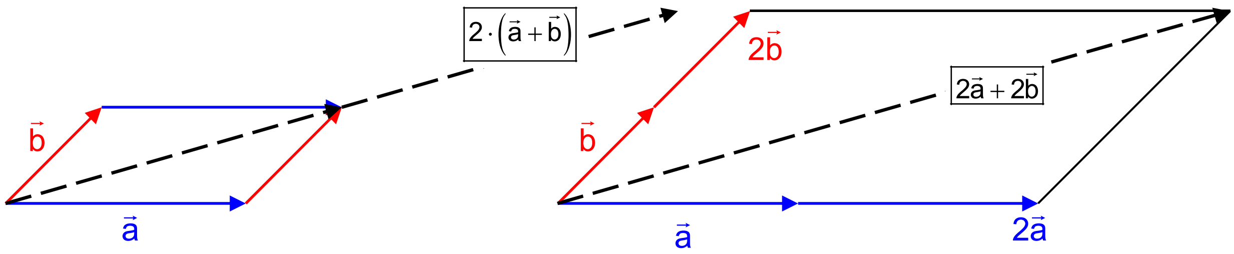
$$r\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b} \quad \textbf{und} \quad (r+s)\cdot\vec{u}=r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{u}$$

Man darf also Klammern ausmultiplizieren.

Beispiel: $\boxed{2\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 2\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}$

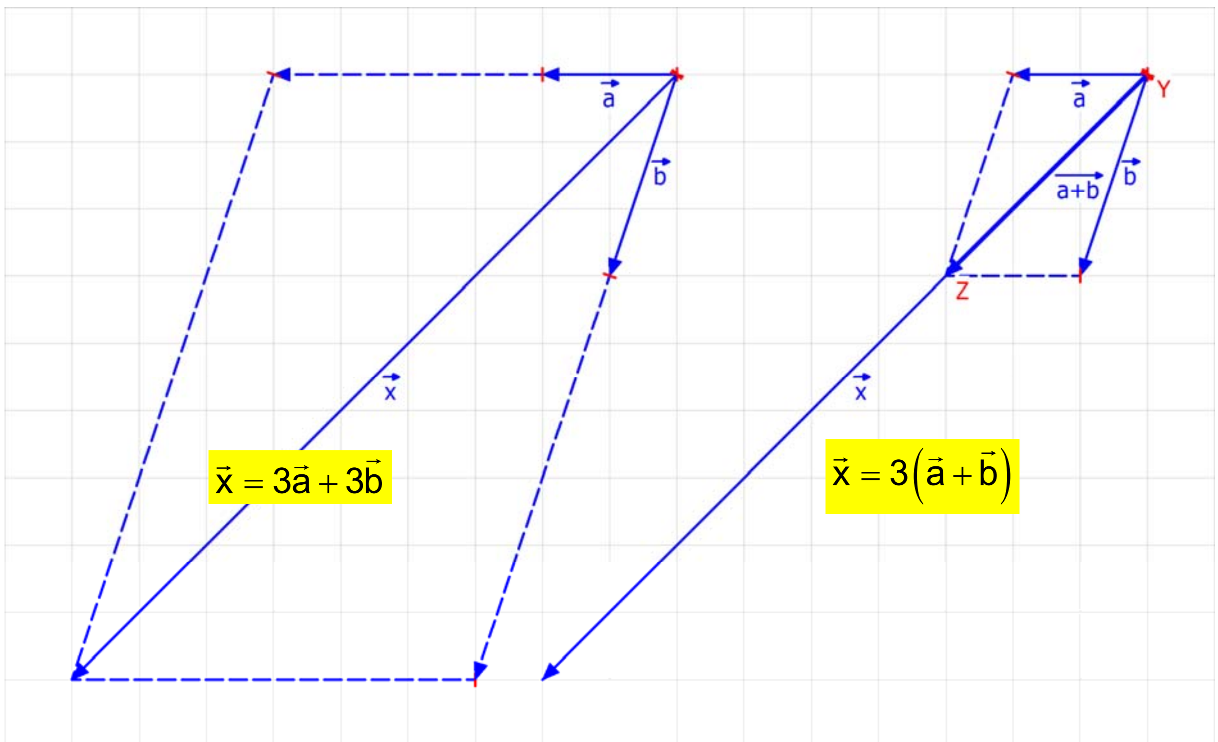
In der linken Abbildung wird zuerst $\vec{a}+\vec{b}$ konstruiert.
Der Pfeil auf der Diagonalen gehört dazu.
Dann wurde verdoppelt.

In der rechten Abbildung werden $2\cdot\vec{a}$ und $2\cdot\vec{b}$ addiert.



Man erhält den gleichen Ergebnisvektor!

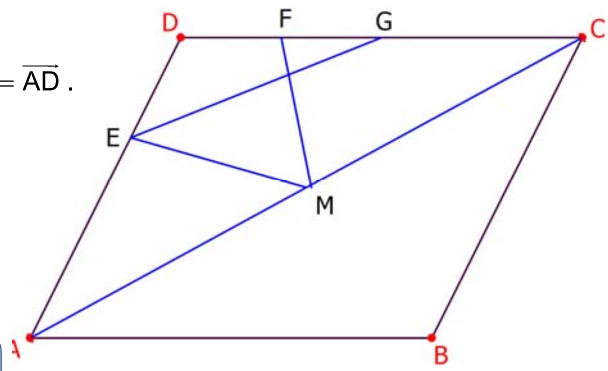
Noch ein Beispiel:



8. Konstruktionsübungen zu Linearkombinationen

Aufgabe 1

ABCD sei ein Parallelogramm mit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



E teilt AD im Verhältnis 2 : 1,

F teilt SC im Verhältnis 1 : 3,

G sei der Mittelpunkt von DC und

M sei der Mittelpunkt von AC.

Stelle folgende Vektoren als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dar:

$\overrightarrow{EM} =$

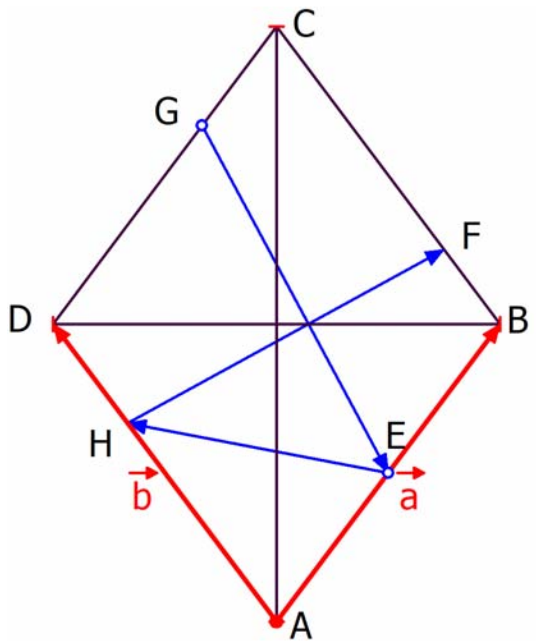
$\overrightarrow{GM}$

$\overrightarrow{GE} =$

$\overrightarrow{MF} =$

Aufgabe 2

ABCD sei eine Raute.



E halbiert AB,

F teilt BC im Verhältnis 1 : 3.

G teilt DC im Verhältnis 2 : 1

H teilt AD im Verhältnis 2 ; 1

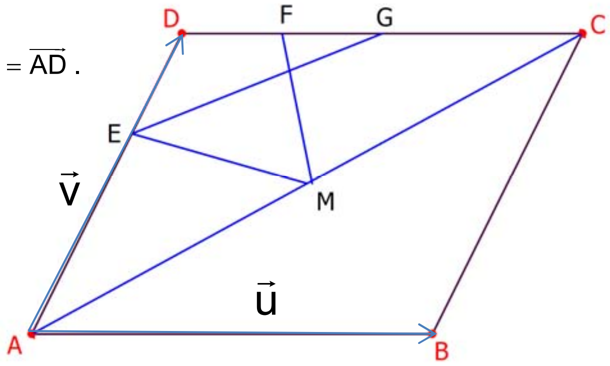
Stelle folgende Vektoren als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

$\overrightarrow{EH} =$

$\overrightarrow{GE} =$

$\overrightarrow{HF} =$

Lösung Aufgabe 1



ABCD sei ein Parallelogramm mit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

E teilt AD im Verhältnis 2 : 1: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

F teilt DC im Verhältnis 1 : 3, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{DC}$

G sei der Mittelpunkt von DC $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DC}$

M sei der Mittelpunkt von AC. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$

Stelle folgende Vektoren als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dar:

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) - \frac{2}{3}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right) = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) - \left(\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}\right) = -\frac{1}{2}\vec{v}$$

Man kann auch erkennen, dass GM parallel zu AD ist und halb so lang (Strahlensatz in ACD).

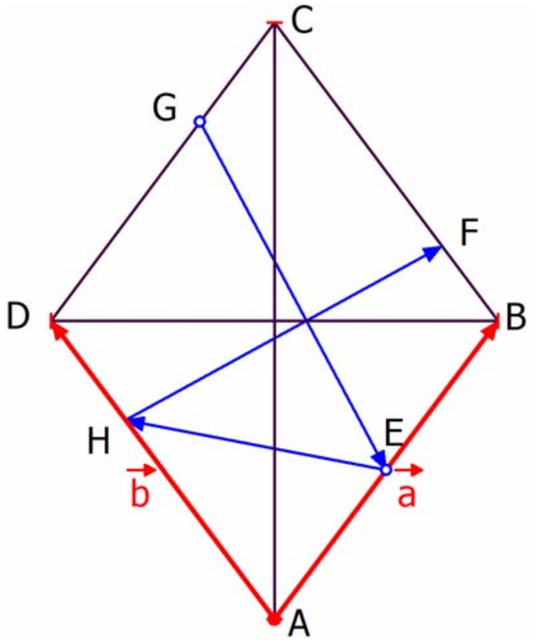
Dann hat man unter Beachtung der Richtung das Ergebnis ohne lange Rechnung.

$$\overrightarrow{GE} \overset{\text{als Summe:}}{=} \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} = \left(-\frac{1}{2}\vec{u}\right) + \left(-\frac{1}{3}\vec{v}\right) = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{GE} \overset{\text{als Diff.:}}{=} \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{2}{3}\vec{v}\right) - \left(\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}\right) = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AM} = \left(\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{u}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \left(\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{u}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{4}\vec{u}$$

Lösung Aufgabe 2



ABCD sei eine Raute.

E halbiert AB, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$

F teilt BC im Verhältnis 1 : 3.

G teilt DC im Verhältnis 2 : 1

H teilt AD im Verhältnis 2 ; 1 $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$

Stelle folgende Vektoren als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

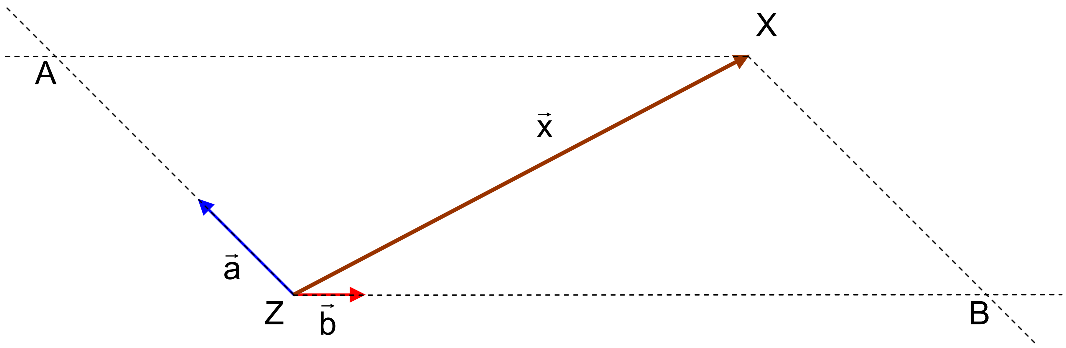
$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{2}{3}\vec{a}\right) + \left(\vec{a}-\vec{b}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) = \left(-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{2}\right)\cdot\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \vec{b}$$

Oder anders …

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\vec{b} + \left(\vec{a}-\vec{b}\right) + \frac{1}{4}\vec{b} = \left(\frac{1}{3}-1+\frac{1}{4}\right)\cdot\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \frac{5}{12}\vec{b}$$

Wir haben jetzt gelernt, wie man aus gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Linearkombination $\vec{x} = 2{,}8 \cdot \vec{a} + 8{,}5 \cdot \vec{b}$ bilden kann. Man verlängert von einem Punkt Z aus die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bis $2{,}8\,\vec{a}$ und $8{,}5\,\vec{b}$ und ergänzt die Figur zu einem Parallelogramm.

Konstruktive Lösung:

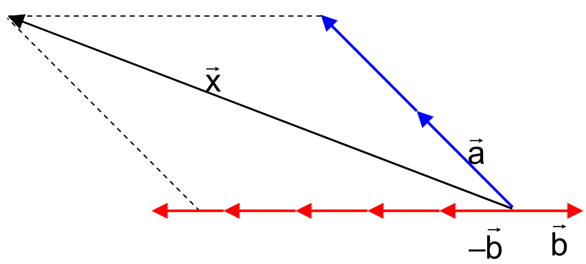


Oft muss man **die umgekehrte Aufgabe** lösen:

Gegeben sind dann drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$, und man sucht die Koeffizienten r und s zur Linearkombination $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b}$. Gesuch sind also r = 2,8 und s = 8,5.

Dazu zeichnet man von einem beliebigen Punkt Z aus Pfeile der drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$ Dann denkt man sich den Pfeil $\overrightarrow{ZX}$ als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten man dadurch erhält, dass man Parallelen zu den Pfeilen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch Z und X zeichnet.

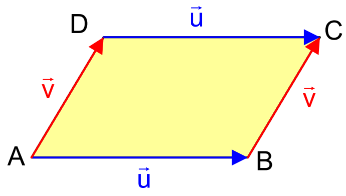
Ja und dann wird „abgemessen". Die Länge der Strecke ZA dividiert durch die Länge des Pfeils von $\vec{a}$ ergibt r, und die Länge von ZB dividiert durch die Länge des Pfeils von $\vec{b}$ ergibt s.
Dann hat man näherungsweise $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$ ermittelt. Aber wie gesagt nur näherungsweise !



Nebenstehende Konstruktion zeigt, dass man eventuell statt $\vec{b}$ Pfeile von $-\vec{b}$ verwenden muss, um zu einem Parallelogramm zu kommen.

Hier lautet das Ergebnis:
$\vec{x} = 2\vec{a} + 4{,}5\left(-\vec{b}\right) = 2\vec{a} - 4{,}5\vec{b}$

9. Parallelogramme sind ideal für die Vektorrechnung



Man sollte wissen, dass bei dieser Vierecksart die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang sind.

Also gehören die Pfeile $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ zum gleichen Vektor $\vec{v}$, und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind Pfeile des Vektors $\vec{u}$.

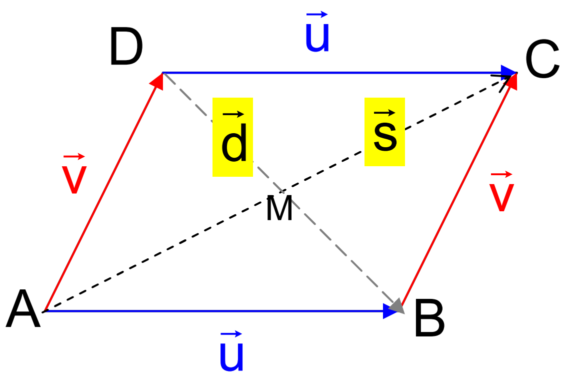
Leider gibt es eine irreführende **Schreibweise** :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **heißt <u>nicht</u>, dass diese Pfeile gleich sind**.
Sie sind es nicht, denn sie haben ja eine andere Lage.
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ **bedeutet jedoch, dass diese Pfeile <u>zum gleichen Vektor</u> gehören!**

Ferner gilt: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. (Beide Pfeile gehören zum gleichen Vektor, zu $\vec{u}$.)
Zu unserem Parallelogramm gehören also zwei Vektoren, die durch je zwei Pfeile dargestellt sind.

Der zur <u>Hauptdiagonale</u> gehörende Pfeil $\overrightarrow{AC}$ gehört zum **Summenvektor** $\vec{u}+\vec{v}$.

Der zur <u>Nebendiagonale</u> gehörende Pfeil $\overrightarrow{DB}$ gehört zum **Differenzvektor** $\vec{u}-\vec{v}$,
für den umgekehrten Pfeil gilt: $\overrightarrow{BD}=\vec{v}-\vec{u}$.



Ferner gilt: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ $\qquad \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}$

Oder so: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\cdot(\vec{v}-\vec{u})=\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}$

Information:

Für alle Punkte P im Innern des Parallelogramms gilt: $\boxed{\overrightarrow{AP}=x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v} \quad \text{mit } 0<x,y<1}$
Liegt P im Innern des Dreiecks ABD, dann ist außerdem $0<x+y<1$.
Liegt P im Innern des Dreieck2 BCD, dann ist außerdem $x+y>1$

Liegt P auf der Diagonalen BD, dann ist außerdem $x+y=1$

10 Lineare Abhängigkeit von Pfeilklassenvektoren:

Kollineare und komplanare Vektoren

Für geometrische Anwendungen ist es ungeheuer wichtig, dass man herausfinden kann, ob zwei Vektoren Vielfache voneinander sind, oder ob einer eine Linearkombination von zwei anderen ist.

Dazu merke man sich zuerst einmal **drei Definitionen:**

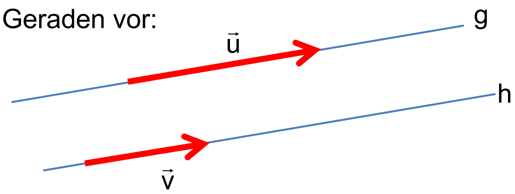
Def 1 Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nennt man **kollinear**, wenn gilt: $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

WISSEN: Wenn ein Vektor ein Vielfaches eines anderen ist (wir nehmen an k sei > 0) dann haben ihre Pfeile die gleiche Richtung und die von $\vec{v}$ sind k-mal so lang wie die von $\vec{u}$.

Ist k < 0, dann sind die Pfeile antiparallel (entgegengesetzte Richtung) und die von $\vec{v}$ sind |k|-mal so lang wie die von $\vec{u}$.

Kollineare Vektoren kommen bei parallelen Geraden vor:

Die Richtung einer Geraden kann man durch einen so genannten Richtungsvektor festlegen.



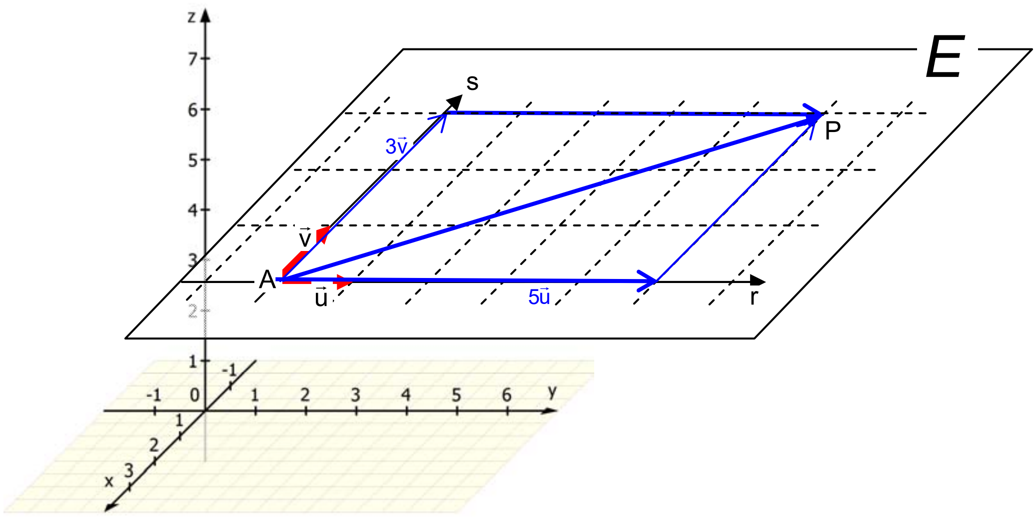
Sind zwei Geraden parallel, dann müssen sie Richtungsvektoren haben, deren Pfeile parallel sind. Das ist z. B. dann der Fall, wenn $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}$ ist.

Man sieht, dass die Richtungsvektoren paralleler Geraden kollinear sein müssen

Def 2 Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ nennt man **komplanar**, wenn gilt: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Man erhält schnell eine Vorstellung von der Lage der Pfeile von komplanaren Vektoren.

Wenn man von einem Punkt A aus etwa die Linearkombination $\vec{w} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$ zeichnet, dann liegen die betreffenden Pfeile in einer Ebene:



Die seltsame Definition der Linearen Abhängigkeit mit dem Nullvektor:

Die Linearkombination $\vec{w} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$ kann man umstellen zu $\vec{o} = 5\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$.
Sie sagt uns, dass man den Nullvektor (der je im Grunde nur ein Punkt ist) auch durch eine Linearkombination aus den Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erhalten kann, nicht nur auf die „triviale" Art, die ***immer*** möglich ist: $\vec{o} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$.

Man versteht sofort, dass man im Falle der nicht-trivialen Linearkombination $\vec{o} = 5\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ die Gleichung nach $\vec{u}$ oder nach $\vec{v}$ oder nach $\vec{w}$ umstellen kann und dann sofort sie, dass und vor allem wie dieser Vektor von den andern abhängig ist.

Kann man den Nullvektor nur auf die triviale Weise kombinieren, ist eine solche Darstellung der linearen Abhängigkeit nicht möglich, die Vektoren sind dann linear unabhängig.

Def 3 Vektoren nennt man **linear abhängig**, wenn man den Nullvektor auch als **nicht-triviale Linearkombination** durch sie darstellen kann.

Das heißt, wenn eine Gleichung der Form $\vec{o} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + ... + r_n\vec{a}_n$ möglich ist, bei der nicht alle Koeffizienten 0 sind (das heißt „nicht-trivial").

Ist dies nicht möglich, d.h. gilt nur $\vec{o} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + ... + 0 \cdot \vec{a}_n$, dann sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ **linear unabhängig**.

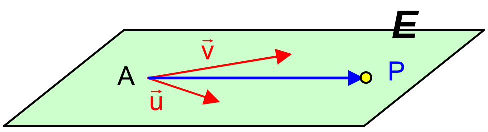
Dies wird viel klarer, wenn man gelernt hat, mit Vektoren zu rechnen (Text 63006).

Aber dennoch kann man geometrische Darstellungen zeigen:

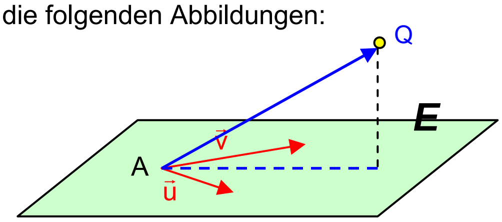
Beispielsweise liegt eine Punkt P in einer durch die „Richtungsvektoren" $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene, wenn der Vektor $\overrightarrow{AP}$ eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist, etwa $\overrightarrow{AP} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$.

Wenn P in E liegt, kann man $\overrightarrow{AP}$ als Linearkombination durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen, also sind die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar (wozu man auch linear abhängig sagen kann).

Liegt ein Punkt Q nicht in der Ebene E, dann kann man den Vektor $\overrightarrow{AQ}$ auch nicht als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen. Dann sind die drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\overrightarrow{AQ}$ nicht komplanar, also linear unabhängig. Diese Situationen zeigen noch einmal die folgenden Abbildungen:



P in E: $\vec{u}, \vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ sind komplanar.



Q nicht in E: $\vec{u}, \vec{v}$ und $\overrightarrow{AQ}$ sind nicht komplanar.

Das ist die kürzeste Methode zum Überprüfen, ob ein Punkt P bzw. Q in einer Ebene E liegt.

Die Rechenmethode dazu folgt im Text 63200 auf Seite 12, wenn wir noch mehr gelernt haben.