Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 4

Heft 4: Lage und Schnitte von Geraden und Ebenen

Ganz einfache Erklärung der Grundlagen:

Die wichtigsten Aufgabenstellungen und Methoden-

Datei Nr. 63300

Stand 17. Januar 2018

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort !!!

Es gibt nun mehrere Texte zum Thema Ebenen. Dieser Text mit dem Zusatztitel **„ganz einfach“** ist ein auf die Rechenpraxis ausgerichteter Text mit Musterbeispielen und Aufgaben.

Die Methoden werden nicht hergeleitet sondern nur beschrieben und vorgeführt. Schüler, die wiederholen und auf eine Klausur oder eine Prüfung lernen, finden hier eine ausführliche Übersicht und können sich rasch nochmals über alles informieren. Die Beispiele und Aufgaben dieses Textes wurden als eigene Aufgabensammlung unter der Nummer 63301 zusammengestellt.
GA heißt Grundaufgabe.

Inhalt

GA = Grundaufgabe

1 Hintergründe und Übersicht der Situationen

Das sollte man wissen: Folgende Situationen gibt es im (dreidimensionalen) Raum $\mathbf{R}^3$;

(1) Wenn **zwei Geraden** in einer Ebene liegen, können sie parallel sein oder sich schneiden. Liegen sie nicht in einer Ebene, heißen sie windschief, dann haben sie auch keine gemeinsamen Punkte.

(2) Eine Gerade kann parallel zu einer Ebene liegen oder in der gegebenen Ebene verlaufen. (Dies wird oft als Sonderfall der Parallelität betrachtet). Oder aber es gibt einen gemeinsamen Punkt zwischen **Gerade und Ebene**, ihr Schnittpunkt.

(3) **Zwei Ebenen** können parallel sein (oder im Sonderfall sogar identisch). Sind sie es nicht, gibt es eine Schnittgerade.

Ziel dieses Textes soll es sein, die Schnittsituation rechnerisch in den Griff zu bekommen. Wer diese Methoden noch nicht kennt, sollte hier nicht weiterlesen, denn die folgende Übersicht verwirrt dann nur. Sie ist zur Wiederholung und dann zur Übersicht gedacht.

(1) **Den Schnittpunkt zweier Geraden** g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ erhält man durch Gleichsetzen der Berechnungsterme. Dies ergibt 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Aus zweien werden die Werte für Parameter r und s berechnet, in der dritten Gleichung macht man die Probe, die dann darüber entscheidet, ob ein Schnittpunkt vorhanden ist.

Wenn man allerdings durch eine Vorausüberlegung schon weiß, dass ein Schnittpunkt existiert, dann genügt es, nur einen der Parameter r oder s zu berechnen.

(2) Die Berechnung eines **Schnittpunkts einer Geraden mit einer Ebene** richtet sich nach der Art der gegebenen Ebenengleichung:

a) Ist die Ebene durch eine Punkt-Richtungsgleichung gegeben, dann wird man die Berechnungsterme gleichsetzen: Aus g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ bzw. E: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ wird $\vec{a} + r \cdot \vec{u} = \vec{b} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$, was ein System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten r, s und t darstellt. Für die Berechnung des Schnittpunktes reicht es dann, r zu bestimmen. Damit kann man aus g den Schnittpunkt bestimmen.

b) Ist aber die Ebene durch eine Koordinatengleichung gegeben: $ax + by + cz = d$, wird man den Berechnungsterm der Geraden $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ koordinatenweise in diese einsetzen, was *eine* Gleichung für r gibt. Damit kann man aus g den Schnittpunkt bestimmen.

(3) Für die Berechnung der **Schnittgeraden zweier nicht paralleler Ebenen** gibt es drei Fälle:

(a) **Beide Ebenen sind als Koordinatengleichungen gegeben**.
Dann liegt ein System von 2 Gleichungen mit drei Unbekannten vor. Eine Unbekannte davon kann man frei wählen. Damit gelingt es, die Lösungsvektoren für dieses System zu berechnen. Dieser stellt dann schon die gesuchte Geradengleichung dar.

(b) **Eine Ebene ist in der Koordinatenform gegeben, die andere in der Parameterform**.
Dann setzt man den Berechnungsvektor der Parameterform koordinatenweise in die Koordinatengleichung ein. Das Ergebnis ist dann eine Gleichung, welche die beiden Parameter (z. B. r und s) enthält. Diese stellt man etwa nach s um und ersetzt damit s in der Parametergleichung. Es bleibt dann die Gleichung der Schnittgeraden übrig.

(c) **Liegen für beide Ebenen die Parametergleichungen** vor, ist es günstig, eine davon in eine Koordinatengleichung umzuwandeln und dann wie in (b) vorzugehen. Will man das nicht, muss man die Berechnungsterme der Ebenengleichungen gleichsetzen.
Das ergibt 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Ziel der Umformungen muss es dann sein, den Lösungsvektor zu ermitteln, der dann ja nur noch einen Parameter enthält.
Dieser stellt dann bereits die Gleichung der Schnittgeraden dar.

Wer diese Methoden noch nicht gesehen hat, kann damit jetzt noch wenig anfangen. Daher werden wir zu jeder Situation zwei Beispiele betrachten und dabei nochmals die Methode losgelöst vom Beispiel besprechen. Es wird empfohlen, am Ende zur Wiederholung diese Lösungsbeschreibungen zu wiederholen.

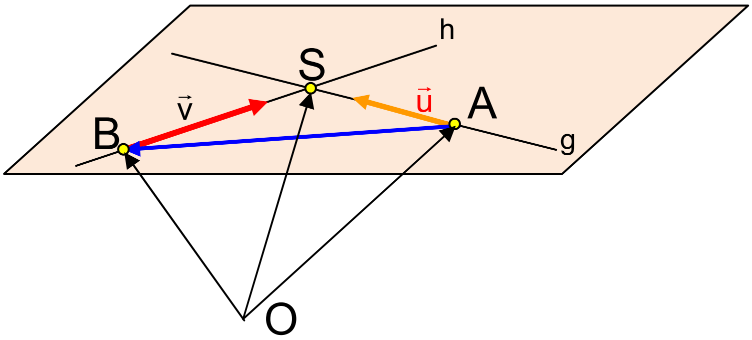
Die Berechnung von Schnittpunkten zweier Geraden wurde schon einmal ausführlich behandelt. Dies kann man in Heft 3 (63100) ab Seite 15 nachlesen. Hier nur kurz zwei Beispiele dazu, der Vollständigkeit halber.

2 Schnitt zweier Geraden

Weil der Schnittpunkt von g und h auf g und auf h liegt, gelten für ihn beide Geradengleichungen:

$$\vec{x}_S = \vec{a} + r \cdot \vec{u} \qquad (1)$$

$$\vec{x}_S = \vec{b} + s \cdot \vec{v} \qquad (2)$$



Also ist $\vec{a} + r \cdot \vec{u} = \vec{b} + s \cdot \vec{v} \qquad (3)$

Man wird also die beiden Berechnungsterme gleichsetzen. Dabei ist aber unbedingt darauf zu achten, dass man verschiedene Parameter verwendet, also etwa r und s.

Grundaufgabe 1: Berechne den Schnittpunkt zweier Geraden

a) Gegeben: g: $\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$ und h: $\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

1. Lösung

Bei dieser 1. Methode überprüfe ich zuerst, **ob** sich g und h schneiden:

1. Liegen g und h in einer Ebene?

$$D = \left| \vec{u} \quad \vec{v} \quad \overrightarrow{AB} \right| = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & -4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right. = 2 + 0 - 8 - 0 - 2 + 8 = 0$$

Weil diese Determinante 0 ist, sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ linear abhängig.

Die Geraden g und h liegen also in einer Ebene.

(Das kann der Fall sein, weil sie sich schneiden oder weil sie parallel sind.

2. Sind g und h parallel? Da die Richtungsvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

keine Vielfachen voneinander sind ($\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$), sind g und h nicht parallel.

3. Berechnung des Schnittpunkts: $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} r - 4s = -4 & (1) \\ -2r - 2s = -2 & (2) \\ s = 1 & (3) \end{array} \right.$

s in (1) ersetzen: $r - 4 = -4 \Leftrightarrow r = 0$, in g: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $S(2 \mid -5 \mid 7)$

Weil man zuerst festgestellt hat, dass sich g und h schneiden, musste man die Schnittprobe nicht mehr machen und daher auch s nicht mehr berechnen.

2. Lösung **Sofortige Berechnung des Schnittpunkts**

Gegeben: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} r - 4s = -4 \\ -2r - 2s = -2 \\ \boxed{s = 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Berechnung von r: s in (1) ersetzen: $r - 4 = -4 \Leftrightarrow r = 0$

Schnittprobe in (2): $-2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$

<u>Weil die Probe eine wahre Aussage ergibt, schneiden sich die Geraden.</u>

Damit folgt aus g: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S(2\,|\,-5\,|\,7)$

Anmerkung: <u>Wenn</u> sich die Geraden schneiden, ist dies die kürzere Rechnung.

---

b) Gegeben: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Lösung Wir überprüfen zuerst, ob sich g und h schneiden:

1. Liegen g und h in einer Ebene?

$$D = \left| \vec{u} \quad \vec{v} \quad \overline{AB} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix} = -10 - 12 + 6 - 2 - 3 - 120 \neq 0$$

Weil diese Determinante ungleich 0 ist, sind die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\overline{AB}$ linear unabhängig.

Die Geraden g und h liegen also nicht in einer Ebene, sie sind also windschief.

Es gibt somit keinen Schnittpunkt. Die Rechnung ist fertig.

Weil sich die Geraden nicht schneiden, ist das hier die kürzere Rechnung!

2. Lösung **Direkte Berechnung des Schnittpunkts**

Berechnung durch Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} r - 2s = 1 \\ 6r + s = 3 \\ -2r - s = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Elimination von s durch (2) + (3): $4r = 13 \Leftrightarrow r = \frac{13}{4}$

r in (3) ersetzen: $-2 \cdot \frac{13}{4} - s = 10 \Leftrightarrow s = -\frac{13}{2} - 10 = -\frac{33}{2}$

Probe in (1) (Das ist die noch nicht benutzte Gleichung); $\frac{13}{4} + 33 = 1$

Dies ist eine falsche Aussage, also ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Es gibt also keinen Schnittpunkt von g und h. **Wer diese Probe nicht macht und mittels r aus g oder mittels s aus h einen Schnittpunkt berechnet (den es ja nicht gibt), hat Pech gehabt.**

Übersicht über die verschiedenen Vorgehensweisen:

Den Schnittpunkt zweier Geraden berechnet man durch Gleichsetzen der Berechnungsterme der beiden Geradengleichungen.

Man kann auf dreierlei Weisen mit der Lösung beginnen:

(1) Wer direkt mit Gleichsetzen beginnt, muss am Ende die Probe in der noch nicht verwendeten Gleichung machen, um sicher zu gehen, dass er auch einen Schnittpunkt gefunden hat.

(2) Man kann zuerst überprüfen, ob die Geraden in einer Ebene liegen.

a) Dies ist dann der Fall, wenn die Determinante $D = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \overrightarrow{AB} \end{vmatrix}$ den Wert 0 hat.

Dann können die Geraden parallel sein oder sich schneiden.
Wer dann zuerst die Parallelität untersucht, kann sich eventuell die Schnittrechnung sparen, wenn sie aber nicht parallel sind entfällt die Probe, weil ja dann sicher ist, dass sie sich schneiden.

b) Wenn aber $D = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \overrightarrow{AB} \end{vmatrix} \neq 0$ ist, dann liegen die beiden Geraden nicht in einer Ebene, sind also windschief. Und somit gibt es auch keinen Schnittpunkt.

(3) Man kann auch damit beginnen, dass man an Hand des Vergleichs der Richtungsvektoren zuerst einmal feststellt, ob die Geraden parallel sind oder nicht.

a) Wenn sie parallel sind, gibt es keinen Schnittpunkt.

b) Wenn sie nicht parallel sind, hat man zwei Optionen:
Man kann die Schnittgleichung lösen und mit der Probe entscheiden, ob S existiert.
Oder man berechnet zuerst die genannte Determinante, und wenn diese den Wert Null hat, den Schnittpunkt durch Gleichsetzen ohne weitere Probe.

Hilfreich ist vielleicht dieses Diagramm:

$\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$
d. h. $g \nparallel h$

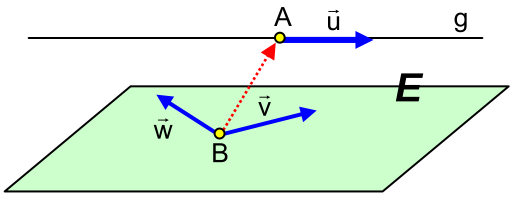
$D = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \overrightarrow{AB} \end{vmatrix} = 0$
d. h. g und h liegen in einer Ebene

g und h schneiden sich

Ein ausführlicheres Diagramm folgt auf der nächsten Seite.

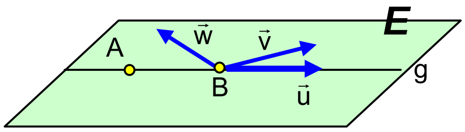
3 Schnitt einer Geraden mit einer Ebene: $g: \; \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ und $E: \; \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$:

Es gibt drei Fälle:



(1) **g ist parallel zu E:**

In diesem Fall sind die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ komplanar. Das zeigt man durch $D = \left| \vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w} \right| = 0$.



Jetzt gibt es zwei Fälle: g und E können echt parallel sein, oder g kann in E liegen. Dazu prüft man nach, ob der Aufpunkt A der Geraden in der Ebene liegt. Wenn ja, dann auch g!

Sind die Richtungsvektoren der Ebene und der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Aufpunkte komplanar?

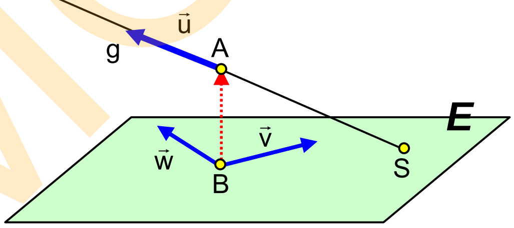
a) Wenn $\left| \vec{v} \;\; \vec{w} \;\; \overrightarrow{AB} \right| = 0$, dann ist das der Fall. **Dann liegt g in E.**

b) Wenn $\left| \vec{v} \;\; \vec{w} \;\; \overrightarrow{AB} \right| \neq 0$, dann sind sie nicht komplanar, A und g liegen nicht in E.

In diesem Fall sind dann **g und E echt parallel**.

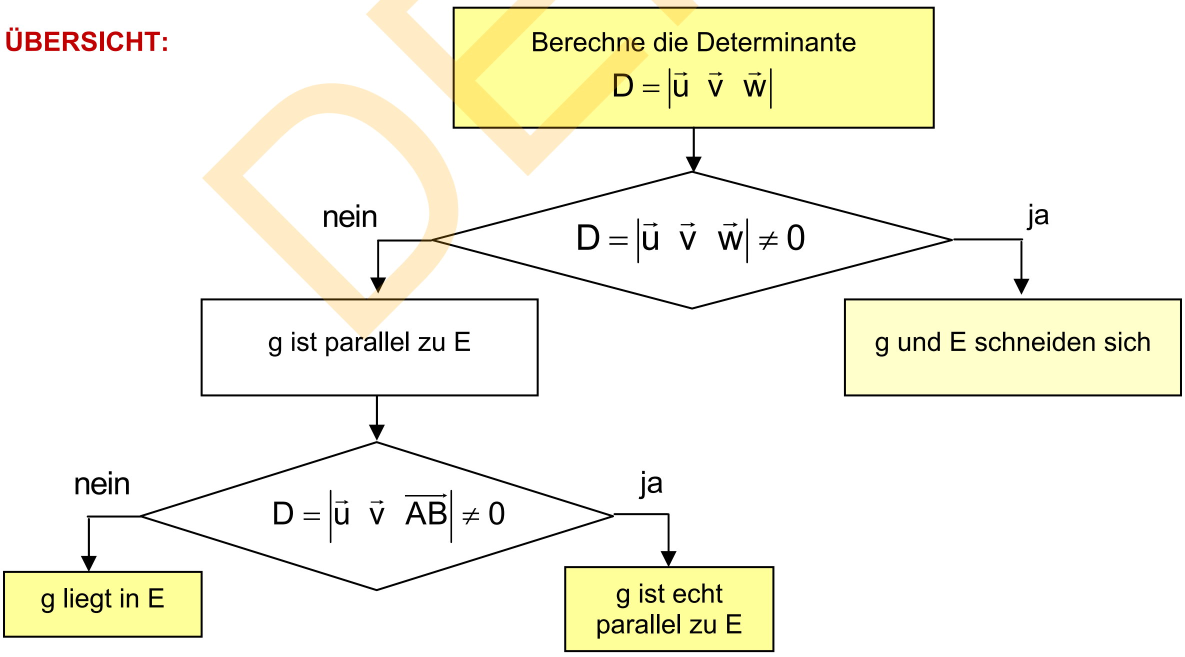
Statt dieser Vektor-Überlegung kann man auch eine Punktprobe für A in E machen.

(2) **g und E schneiden sich**



Wenn $D = \left| \vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w} \right| \neq 0$, dann sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht komplanar. Also ist g nicht parallel zu E!

ÜBERSICHT:



Man achte genau auf die **Fragestellung der Aufgabe**. Wenn dort steht „Überprüfe, ob sich g und E schneiden“, genügt die Determinantenberechnung. Natürlich kann man auch sofort versuchen, einen Schnittpunkt zu berechnen. Wenn keiner existiert, sind g und h parallel. Lautet die Aufgabenstellung so, dass man den Schnittpunkt berechnen soll, wird man sofort mit dessen Berechnung beginnen und nicht erst überprüfen, **ob** sich g und h schneiden.

Grundaufgabe 2: Berechne den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene in Parameterform

Beispiel 1: Gegeben ist g durch: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

und E in Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Das ist der Fall: g und E schneiden sich.

Anm.: Ich löse diese Aufgabe jetzt so, dass ich sofort mit Gleichsetzen beginne. Damit erhalte ich ein System aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Dieses kann man auf dreierlei Arten lösen! Man studiere sie und wähle die Methode aus. Wenn ein Schnittpunkt existiert, ist es immer am günstigsten, diesen aus der Geradengleichung zu berechnen. Dazu braucht man nur deren Parameterwert!

Lösung: Gleichsetzen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt $\left\{ \begin{aligned} r + 2s + t &= 4 \\ r + s - 2t &= 0 \\ 2r - s - 5t &= -4 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

ACHTUNG: Der Parameter der Geraden wurde in t umbenannt, da man nicht zweimal denselben Buchstaben verwenden kann.

(a) Lösung mit dem Determinantenverfahren: (Berechnung nach der Regel von Sarrus)

Nennerdeterminante:
$$D = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -5 - 8 - 1 - 2 - 2 + 10 = -8$$

Weil diese Determinante ungleich Null ist, hat das System eine eindeutige Lösung, d.h. g und E schneiden sich in einem Punkt. Dazu reicht es, die Variable t zu berechnen:

Zählerdeterminante für t:
$$D_t = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -4 + 0 - 4 - 8 - 0 + 8 = -8$$

Nach der Cramerschen Regel folgt: $t = \frac{D_t}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$ mit $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ergebnis: g und E schneiden sich in $S(4\,|\,2\,|\,2)$.

(b) Lösung mit dem Eliminationsverfahren: $\left\{ \begin{aligned} r + 2s + t &= 4 \\ r + s - 2t &= 0 \\ 2r - s - 5t &= -4 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

Elimination von r: $(1)-(2)$: $s + 3t = 4$ (4)

$2\cdot(2)-(3)$: $3s + t = 4$ (5)

Elimination von s: $3\cdot(4)-(5)$: $8t = 8 \iff t = 1$

Damit folgt aus g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $S(4\,|\,2\,|\,2)$.

(c) Lösung mit dem Gaußverfahren: $\left\{\begin{array}{r} r+2s+t=4 \\ r+s-2t=0 \\ 2r-s-5t=-4 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -Z1 \\ -2\cdot Z1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} +2\cdot Z2 \\ \\ -5\cdot Z2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

Damit kann man aufhören, denn die letzte Zeile entspricht der Gleichung $8t=8 \Leftrightarrow t=1$

Und damit kann man wie oben den Schnittpunkt aus der Geradengleichung berechnen:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Schnittpunkt } S(4\,|\,2\,|\,2).$$

Beispiel 2:

Gegeben ist g durch: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und E in Parameterform: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Das ist der Fall: g und E sind parallel

Lösung: Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $\left\{\begin{array}{r} r+2s-3t=4 \\ r+s-2t=0 \\ 2r-s-t=-4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$

ACHTUNG: Der Parameter der Geraden wurde in t umbenannt, da man nicht zweimal denselben Buchstaben verwenden kann.

(a) Lösung mit dem Determinantenverfahren: (Berechnung nach der Regel von Sarrus)

Nennerdeterminante: $D=\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right.=-1-8+3+6-2+2=0$

Weil diese Determinante den Wert Null hat, besitzt das System keine eindeutige Lösung, d.h. g und E schneiden sich nicht. Die Richtungsvektoren (die ja in der Determinante stehen), sind komplanar, d.h. die **Gerade ist entweder parallel zur Ebene, oder sie liegt in E**.

Will man herausfinden, welcher dieser Fälle vorliegt, hat man 2 Möglichkeiten:

(1) Man prüft nach, ob der Aufpunkt $A(5\,|\,0\,|\,-3)$ von g in E liegt, indem man die Punktprobe macht, also seinen Ortsvektor in die Ebenengleichung einsetzt. (Siehe 63200, GA 5)

(2) Man prüft nach, ob die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zusammen mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Aufpunkte komplanar ist:

$$D=\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & -1 \end{array}\right.=-4+0-4-8-0+8=-8$$

Weil $D\neq 0$ ist, sind sie nicht komplanar, also liegt A nicht in E, und somit auch g nicht.

(b) Lösung mit dem Eliminationsverfahren:
$$\left\{\begin{array}{rl} r+2s-3t= & 4 \\ r+\ \ s-2t= & 0 \\ 2r-\ \ s-\ \ t= & -4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Elimination von r:

$(1)-(2)$:	$s-t=4$	(4)
$2\cdot(2)-(3)$:	$3s-3t=4$	(5)
$3\cdot(4)-(5)$:	$0=8$	(6)

(c) Lösung mit dem Gaußverfahren:
$$\left\{\begin{array}{rl} r+2s-3t= & 4 \\ r+\ \ s-2t= & 0 \\ 2r-\ \ s-\ \ t= & -4 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -Z1 \\ -2\cdot Z1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -5\cdot Z2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung $0t=8 \Leftrightarrow 0=8$.

Dies ist eine falsche Aussage. Man kann auch sagen, (6) ist ein Widerspruch gegen die Annahme, dass g und E gemeinsame Punkte haben. Also ist g „echt" parallel zu E.

Beispiel 3: Gegeben ist g durch: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

und E in Parameterform: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Das ist der Fall, dass g in E liegt.

Lösung: Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ergibt $\left\{\begin{array}{l} r+2s-3t=1 \\ r+\ \ s-2t=1 \\ 2r-\ \ s-\ \ t=2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$

(a) Lösung mit dem Determinantenverfahren: (Berechnung nach der Regel von Sarrus)

Nennerdeterminante: $D=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right| =-1-8+3+6-2+2=0$

Das System hat also **keine eindeutige Lösung**, d.h. g und E schneiden sich nicht: g ist entweder parallel zur Ebene E, oder g liegt in E. Dies untersucht man so:

(1) Punktprobe mit dem Aufpunkt $A(2|1|3)$ von g in E:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{führt zu:} \quad \left\{\begin{array}{l} r+2s=1 \\ r+\ \ s=1 \\ 2r-\ \ s=2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Elimination von r durch: $(1)-(2)$: $s=0$, s in (2) ersetzen: $r=1$ PROBE in (3): $2\cdot 1-0=2$

Weil dies eine wahre Aussage ist, lässt sich A mit r = 1 und s = 0 aus der Ebenengleichung berechnen: A liegt in E.

Folgerung: Weil g parallel zu E ist und g und E einen gemeinsamen Punkt haben, liegt die Gerade g in der Ebene. Oder so:

(2) Man prüft nach, ob die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zusammen mit dem Verbindungsvektor $\overline{AB}$ der Aufpunkte komplanar ist, wobei $A(2|1|3)$ und $B(1|0|1)$ ist:

$$D=\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&-1\\2&-1&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\1&1\\2&-1\end{matrix}=-2-4+1+2-1+4=0 \qquad \text{mit } \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Weil $D=0$ ist, sind sie komplanar, also liegt A in E, und somit auch g.

(b) Lösung mit dem Eliminationsverfahren:
$$\left\{\begin{matrix}r+2s-3t=1\\ r+\ \ s-2t=1\\ 2r-\ \ s-\ \ t=2\end{matrix}\right\}\qquad\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Elimination von r:

$$\begin{array}{lcr}(1)-(2): & s-\ \ t=0 & (4)\\ 2\cdot(2)-(3): & 3s-3t=0 & (5)\end{array}$$

Weil Gleichung (5) das Dreifache der Gleichung (4) darstellt, ist eine Gleichung entbehrlich. Man kann also eine der drei Variablen frei wählen, z. B. t. Damit hat man für t unendlich viele Lösungen. Geometrische Deutung: Alle Punkte von g sind „Lösungen“, liegen somit in E, und das wiederum besagt, dass g in E liegt.

(c) Lösung mit dem Gaußverfahren:
$$\left\{\begin{matrix}r+2s-3t=1\\ r+\ \ s-2t=1\\ 2r-\ \ s-\ \ t=2\end{matrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\1&1&-2&1\\2&-1&-1&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\-Z1\\-2\cdot Z1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\0&-1&1&0\\0&-5&5&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\-5\cdot Z2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung $0=0$. Damit liegen nur 2 „echte“ Gleichungen vor. Man kann also eine der drei Variablen frei wählen, z. B. t. Damit hat man für t unendlich viele Lösungen. Geometrische Deutung: Alle Punkte von g sind „Lösungen“, liegen somit in E, und das wiederum besagt, dass g in E liegt.

Zusammenfassung

Soll man eine **Gerade mit einer Ebene schneiden, die in Parameterform gegeben** ist, kommt man durch Gleichsetzen auf ein System aus 3 Gleichungen mit drei Unbekannten. Es reicht den Parameter der Geraden zu berechnen. Dazu muss man das Gleichungssystem entweder über Determinanten, oder durch Elimination oder nach Gauß mit Matrizen-Umformungen lösen.

Dabei gibt es drei Ergebnissituationen:

Eine eindeutige Lösung ergibt den Schnittpunkt.
Keine Lösung (Widerspruch, falsche Aussage) ergibt die echte Parallelität von g zu E.
Unendlich viele Lösungen: g ist Teil der Ebene.

Grundaufgabe 3: Berechne den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene mit Koordinatengleichung (Normalengleichung

Beispiel 4:

Gegeben ist g durch: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

und E in Koordinatenform: $3x - 5y + z = 4$

Das ist der Fall: g und E schneiden sich.

Anleitung: Die Geradengleichung kann man so schreiben: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-r \\ 2r \\ -3+5r \end{pmatrix}$

Lösung g koordinatenweise in E einsetzen: $3(5-r) - 5(0+2r) + (-3+5r) = 4$

Zusammenfassen: $15 - 3r - 10r - 3 + 5r = 4 \Leftrightarrow \boxed{r = 1}$

r in die Geradengleichung einsetzen: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $S(4 \mid 2 \mid 2)$.

Beispiel 5:

Gegeben ist g durch: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und E in Parameterform: $3x - 5y + z = 4$

Das ist der Fall: g und E sind parallel.

Lösung: g koordinatenweise in E einsetzen: $3(5+3r) - 5(0+2r) + (-3+r) = 4$

Zusammenfassen: $15 + 9r - 10r - 3 + r = 4 \Leftrightarrow \boxed{12 = 4}$

Diese falsche Aussage zeigt, das g und E keine gemeinsamen Punkte haben: $g \parallel E$.

Beispiel 6:

Gegeben ist g durch: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und E in Parameterform: $3x - 5y + z = 4$

Das ist der Fall, dass g in E liegt.

Lösung: g koordinatenweise in E einsetzen: $3(2+3r) - 5(1+2r) + (3+r) = 4$

Zusammengefasst: $6 + 9r - 5 - 10r + 3 + r = 4 \Leftrightarrow \boxed{4 = 4}$

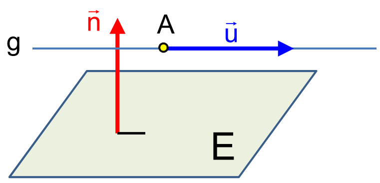
Dies ist eine für alle r wahre Aussage, da sie von r unabhängig ist.
Daher sind alle Punkte von g auch Punkte von E, d. h. g liegt in E.

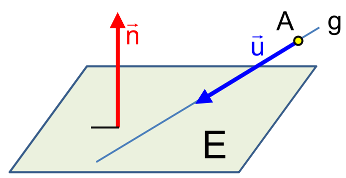
WICHTIGER HINWEIS: Die hier verwendete Ebene ist dieselbe wie in Beispiel 1.
Dort war sie durch eine Punkt-Richtungs-Gleichung (Parametergleichung) gegeben, hier durch eine Koordinatengleichung. Durch Vergleichen erkennt man, wie einfach und kurz die Berechnung des Schnittpunkts ist, wenn man eine Koordinatengleichung für E verwendet.

Ergänzung:

Es gibt auch die verkürzte Aufgabe:

Untersuche die Lage von g und E (ohne Schnittpunktsberechnung!)





Wenn $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, dann ist g parallel zu E, andernfalls schneiden sich g und E.

Im Falle der Parallelität prüft man dann noch, ob der Aufpunkt A von g in E liegt, indem man einfach die Punktprobe macht (A in E einsetzen)..

Liegt A in E, dann liegt die ganze Gerade in E, wenn nicht, sind sie echt parallel.

Trainingsaufgaben

1) Überprüfe zuerst die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebenengleichung nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Überprüfe zuerst die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebenengleichung nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad g_3: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) Überprüfe zuerst die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebenengleichung nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$$E: \ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18, \quad g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_3: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen stehen am Ende des Textes

4 Lotaufgaben

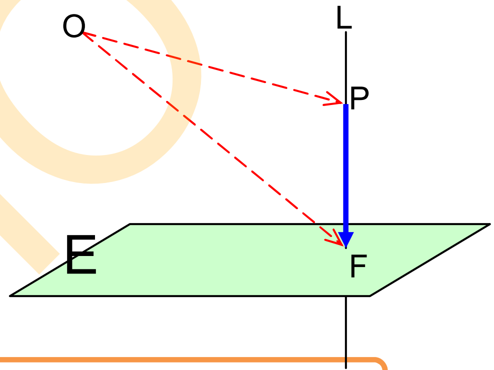
WISSEN: Die Koordinatengleichung $ax + by + cz = d$ hat die schöne Eigenschaft, dass der Vektor, den man aus den Koeffizienten a, b und c bilden kann, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ auf der Ebene senkrecht steht.

Weil man früher das Wort „***normal***" in der Geometrie auch für „senkrecht" verwendet hat, nennt man diesen Vektor <u>einen</u> **Normalenvektor** der Ebene.

Und daher heißt eine Koordinatengleichung auch eine **Normalengleichung**.

Beispiel: E: $2x - 4y + z = 12$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist <u>ein</u> Normalenvektor von E.

Man sagt nicht <u>der</u> Normalenvektor, weil jedes Vielfache von ihm dieselbe Richtung hat, also auch ein Normalenvektor von E ist.



Grundaufgabe 4:

Erstelle die Gleichung der <u>Lotgeraden</u> von P auf E und berechne den Lotfußpunkt.

<u>**Beispiel 1:**</u> E: $4x - 4y + 7z = 36$ und $P(-2\,|\,4\,|\,-3)$.

Man verwendet einen Normalenvektor von E als Richtungsvektor für die Lotgerade.

Aus $4x - 4y + 7z = 36$ folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

P wird Aufpunkt der Lotgeraden

$\vec{n}$ wird Richtungsvektor der Lotgeraden

Gleichung der Lotgeraden L von P auf E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Schnitt von L und E durch koordinatenweises Einsetzen von L in E (siehe GA. 3)

$$4 \cdot (-2 + 4r) - 4(4 - 4r) + 7(-3 + 7r) = 36$$

ergibt $r = 1$

in L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $F(2\,|\,0\,|\,4)$

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF}$ ist dann der Abstand des Punktes P von E:

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

Beispiel 2: Gegeben ist E durch $\boxed{\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\3\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}}$, sowie $\boxed{P(-7\,|\,4\,|\,-5)}$

Jetzt ist E durch eine Parametergleichung (Punkt-Richtungs-Gleichung) gegeben.
Wir benötigen jedoch die Koordinatengleichung (Normalengleichung) für den Normalenvektor.

Normalengleichung von E: $\boxed{4x-7y+2z=3}$. (Berechnung siehe unten!)

Dieser Gleichung entnimmt man den Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}$, den man als Richtungsvektor

für die Lotgerade verwendet, die durch $P(-7\,|\,4\,|\,-5)$ gehen soll:

Lotgerade: L $\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\4\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}$

Schnitt von L und E: $4(-7+4r)-7(4-7r)+2(-5+2r)=3$

Zusammenfassen: $-28+16r-28+49r-10+4r=3$

$69r-66=3$ bzw. $69r=69 \quad \Leftrightarrow \quad r=1$

Lotfußpunkt: $\vec{f}=\begin{pmatrix}-7\\4\\-5\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad F(-3\,|\,-3\,|\,-3)$

---

1. Umrechnung der Ebenengleichung mit dem Skalarprodukt

Richtungsvektoren: $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$

Bedingung (dafür dass $\vec{n}$ auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht steht):

(1): $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ d. h. $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$ d. h. $3n_1+2n_2+n_3=0$ (1)

(2): $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$ d. h. $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$ d. h. $-n_1+0n_2+2n_3=0$ (2)

Da (2) bereits nur 2 Unbekannte enthält, muss man keine Variable mehr eliminieren.

Eine Variable kann frei gewählt werden: $\boxed{n_3=a}\in\mathbb{R}$. in (2): $-n_1+2a=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n_1=2a}$

In (1): $3\cdot\boxed{2a}+2n_2+\boxed{a}=0$ ergibt $2n_2=-7a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n_2=-\tfrac{7}{2}a}$

Normalenvektoren: $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\-\tfrac{7}{2}a\\a\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}2\\-\tfrac{7}{2}\\1\end{pmatrix}$ Für a wähle ich a = 2: $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}$

Koordinatengleichung der Ebene: $4x-7y+2z=k$.

Aufpunkt $A(7\,|\,3\,|\,-2)$ einsetzen, ergibt k = 3 und E: $\boxed{4x-7y+2z=3}$.

2. Umrechnung der Ebenengleichung mit dem Vektorprodukt:

Richtungsvektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$

Das Vektorprodukt aus den Richtungsvektoren steht auf diesen senkrecht:

$$\vec{n}=u\times\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2\\1\cdot(-1)\\3\cdot 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\cdot 0\\3\cdot 2\\2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-0\\-1-6\\0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}3 & -1\\2 & 0\\1 & 2\\3 & -1\\2 & 0\\1 & 2\end{array}$$

Koordinatengleichung der Ebene: $4x-7y+2z=k$.

Setzt man die Koordinaten des Aufpunkts $A(7\,|\,3\,|\,-2)$ ein, erhält man k = 3.

Ergebnis: E: $\boxed{4x-7y+2z=3}$

Soll als **Zusatzaufgabe** der Abstand des Punktes P von E berechnet werden, dann ermittelt man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PF}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}$.

Sein Betrag ist der gesuchte Abstand, was man dann so schreiben kann:

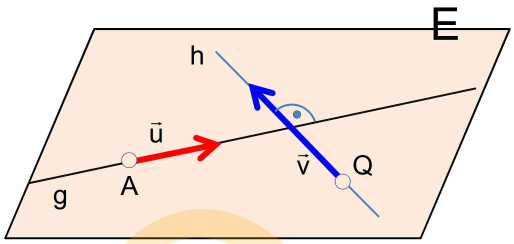
$$d(P,E)=\left|\overrightarrow{PF}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+2^2}=\sqrt{16+49+4}=\sqrt{69}$$

Spezialaufgabe: **Gegeben ist eine Gerade g in einer Ebene E und Q in E. Gesucht ist <u>eine zu g orthogonale Gerade h in E</u> durch Q.**

Aufgabe: Gegeben ist die Ebene E mit $2x+3x-z=4$ und $Q(1\,|\,-2\,|\,-8)$ in E.

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ liegt in E (muss nicht bewiesen werden).

Welche Gleichung hat die Gerade h, die ebenfalls in E liegt, zu g orthogonal ist und durch Q geht?



Lösung:

Für den Richtungsvektor $\vec{v}$ der gesuchten Geraden h gelten zwei Bedingungen:

(1): h ist orthogonal zu g, d.h.

$$\vec{v}\perp\vec{u} \quad \text{d. h.} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \text{d. h.} \quad \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2v_1-v_2+v_3=0$$

(2): h liegt in E, ist also orthogonal zum Normalenvektor von E:

$$\vec{v}\perp\vec{n} \quad \text{d. h.} \quad \vec{n}\cdot\vec{v}=0 \quad \text{d. h.} \quad \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2v_1+3v_2-v_3=0$$

Hinweis: *Dies sind nur zwei Gleichungen für die drei Koordinaten von* $\vec{v}$ *.*
Das ist jedoch in Ordnung, denn weil die Länge eines Richtungsvektors unwichtig ist, lässt er sich auch nicht eindeutig bestimmen.

Lösung des Gleichungssystems: $\left\{\begin{aligned}2v_1-v_2+v_3&=0\\2v_1+3v_2-v_3&=0\end{aligned}\right\}\quad\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

Elimination von v_3 durch (1) + (2): $4v_1+2v_2=0 \qquad |:2$

$2v_1+v_2=0 \qquad (3)$

Wähle $v_1=k\in\mathbf{R}$, dann folgt aus (3): $v_2=-2v_1=-2k$.

v_1 und v_2 in (1) ersetzen: $2k-(-2k)+v_3=0$

$v_3=-4k$

Richtungsvektor<u>en</u> von h: $\vec{n}=\begin{pmatrix}k\\-2k\\-4k\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

Für k = 1 (z. B.) erhält man diese Gleichung von h:

<u>Ergebnis:</u> $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Trainingsaufgaben

4) Fälle von $A(7|6|1)$ das Lot auf die Ebene $E:\quad x + 2y + z = 8$.

a) Berechne den Lotfußpunkt und

b) den Abstand des Punktes A von E.

5) Fälle von $P(-2|-6|13)$ das Lot auf die Ebene $E:\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 15$

a) Berechne den Lotfußpunkt und

b) den Abstand des Punktes P von E.

6) Eine **Pyramide** hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit

$A(8|5|1),\ B(0|-3|-4),\ C(28|4|3),\ S(10|-6|16)$.

Beweise: Die Spitze S steht von der Ebene aus senkrecht über dem Schwerpunkt Q des Dreiecks ABC.

(Zu zeigen ist: Der Fußpunkt des Lotes ist genau der Schwerpunkt Q des Dreiecks ABC)

7) Eine **Pyramide** hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit

$A(1|5|3),\ B(-2|5|1),\ C(0|0|4),\ S(1|-2|-4)$.

Überprüfe, ob diese Pyramide „überhängt" (Dies ist dann der Fall, wenn das Lot von der Spitze auf die Grundfläche außerhalb des Dreiecks schneidet.

8) Gegeben sind zwei Ebenen und ein Punkt P. Lege durch P die Lotgerade zu beiden Ebenen und berechne die Schnittpunkte mit den Ebenen.
Stelle an Hand der Ergebnisse fest, ob P zwischen den Ebenen liegt oder wo sonst? $E_1:\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 27$, $E_2:\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -36$, $P(1|3|-2)$

Anleitung: Man erkennt das durch Vergleich der Parameterwerte von P und den Schnittpunkten bzgl. der Lotgerade.

9) Gegeben: $E_1:\ 2x + y - 5z = 17$, $E_2:\ 2x + y - 5z = 77$, $P(3|1|4)$

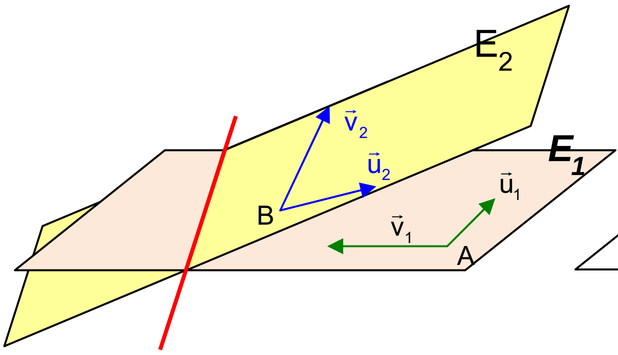
Bestimme die Lage von P relativ zu den beiden Ebenen E_1 und E_2.

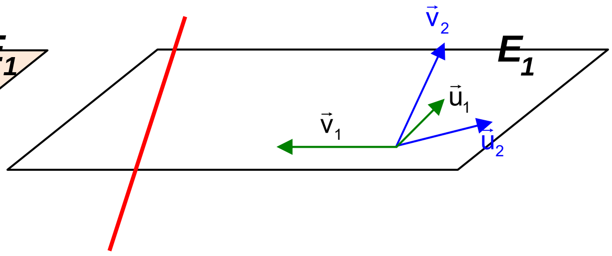
Anleitung: Man erkennt das durch Vergleich der Parameterwerte von P und den Schnittpunkten bzgl. der Lotgerade.

Die Lösungen stehen am Ende des Textes.

5 Grundaufgabe 5: Gegenseitige Lage zweier Ebenen.

1. Fall: Beide Ebenen in der Parameterform (Das ist am schwierigsten!)





Zwei zueinander schräg liegende Ebenen besitzen eine Schnittgerade.

In der linken Abbildung sind für beide Ebenen je zwei Richtungsvektoren eingezeichnet.

In der rechten Abbildung wurde E_2 weggelassen, aber zwei Pfeile von deren Richtungsvektoren eingezeichnet. Wenn die beiden Ebenen nicht parallel zueinander sind, muss es unter den vier Richtungsvektoren drei linear unabhängige, also nicht komplanare Vektoren geben.

Man könnte sich vorstellen, dass in der rechten Abbildung mindestens der Pfeil von $\vec v_2$ aus der Ebene E_1 herausragt.

Nun die Umkehrung dieser Überlegungen: Wenn es unter den vier Vektoren drei linear unabhängige gibt, dann sind die Ebenen nicht parallel, sondern sie schneiden sich.

Die beste Rechenmethode dazu ist die Untersuchung zweier Determinanten:

Wenn mindestens eine der Determinanten $D_1 = \left| \vec u_1 \ \ \vec v_1 \ \ \vec u_2 \right|$ und $D_2 = \left| \vec u_1 \ \ \vec v_1 \ \ \vec v_2 \right|$ ungleich 0 ist, dann **schneiden** sich die beiden Ebenen.

Sind beide Determinanten Null, dann sind die Ebenen **parallel**.

Dann könnten sie sogar identisch sein. Dazu untersucht man, ob der Aufpunkt B von E_2 in der Ebene E_1 liegt. Und das erkennt man daran, ob der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ zu den beiden Richtungsvektoren $\vec u_1$ und $\vec v_1$ komplanar ist. Und dies zeigt uns die Determinante $D_3 = \left| \vec u_1 \ \ \vec v_1 \ \ \overrightarrow{AB} \right|$: Ist sie auch noch Null, liegt B in E_1 und wir haben $E_1 = E_2$.

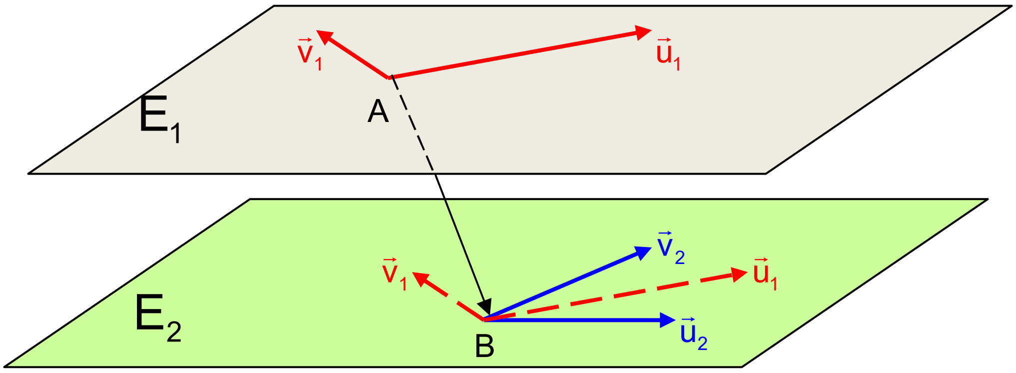
Beispiel 1: E_1: $\vec x = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, E_2: $\vec x = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}$

$$D_1 = \left| \vec u_1 \ \ \vec v_1 \ \ \vec u_2 \right| = \left| \begin{matrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 24 - 2 - 3 - 12 - 4 - 3 = 0$$

$$D_2 = \left| \vec u_1 \ \ \vec v_1 \ \ \vec v_2 \right| = \left| \begin{matrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 0 - 14 - 1 - 4 - 28 - 0 \neq 0$$

Weil eine dieser Determinanten nicht 0 ist, sind die Ebenen nicht parallel. Sie schneiden sich also.

Beispiel 2: **Zwei parallele Ebenen:**



Die Abbildung zeigt in der Ebene E_2 zwei Pfeile der Richtungsvektoren von E_1.
Sie liegen ganz in E_2, denn die vier Richtungsvektoren sind komplanar.

Hierzu ein Zahlenbeispiel:

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \left| \vec{u}_1 \ \ \vec{v}_1 \ \ \vec{u}_2 \right| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right. = 24-2-3-12-4-3 = 0$$

$$D_2 = \left| \vec{u}_1 \ \ \vec{v}_1 \ \ \vec{v}_2 \right| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right. = 8+6-5-20+12-1 = 0$$

Weil beide Determinanten 0 sind, sind die Ebenen zueinander parallel.

Nun sollte man noch untersuchen, ob sie vielleicht sogar identisch sind:

$$D_3 = \left| \vec{u}_1 \ \ \vec{v}_1 \ \ \overrightarrow{AB} \right| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right. = -16+2+2+8+4+2 = 2 \neq 0$$

Also ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$ nicht kollinear zu den Richtungsvektoren, ragt also aus E_1 heraus.
Damit liegt B nicht in E_1 und somit sind E_1 und E_2 „echt“ parallel.

Grundaufgabe:

Welche Gleichung hat die Ebene E_2 parallel zu E_1 durch $Z(1 \mid -2 \mid 4)$?

Gegeben ist die Ebene E_1 durch: $\quad -x+5y+3z=14$.

E_2 sei parallel zu E_1: $\quad -x+5y+3z=k$,

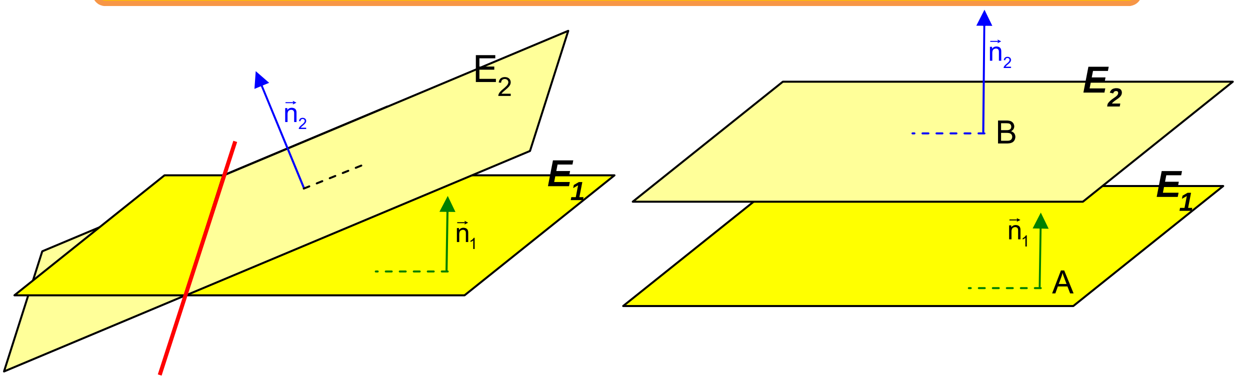
denn weil E_2 parallel zu E_1 ist, ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ auch Normalenvektor von E_2.

k bestimmt man durch Einsetzen des in E_2 liegenden Punktes Z:

$$k = -1-10+12 = 1$$

Ergebnis: $\quad E_2$: $\quad -x+5y+3z=1$

2. Fall: Beide Ebenen in der Koordinatenform (also mit Normalenvektoren)



Eine Koordinatengleichung oder auch Normalengleichung enthält einen Normalenvektor der Ebene.

Die rechte Abbildung zeigt, dass zwei parallele Ebenen kollineare Normalenvektoren haben.

Methode zur Überprüfung der Lage der beiden Ebenen zueinander:

Ist der Normalenvektor der ersten Ebene ein Vielfaches des Normalenvektors der zweiten Ebene, also $\vec{n}_2 = k \cdot \vec{n}_1$, dann sind die Ebenen parallel. Im andern Falle schneiden sie sich.

Im Falle der Parallelität könnten die Ebenen auch identisch sein. Durch Einsetzen eines Punktes von E_1 in E_2 (Punktprobe) kann man feststellen, ob sie gleich sind oder „echt parallel".

Beispiel 3: Gegeben sind E_1: $3x + 2y - 5z = 12$

und E_2: $2x - 3y + z = 4$

Normalenvektoren: von E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. von E_2: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Ergebnis:</u> Da $\vec{n}_2$ kein Vielfaches von $\vec{n}_1$ ist, sind die Ebenen nicht parallel.
E_1 und E_2 schneiden sich (in einer Geraden).

Beispiel 4: Gegeben sind E_1: $4x - 6y + 2z = 11$

und E_2: $-6x + 9y - 3z = 8$

Normalenvektoren: von E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. von E_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4 = -6k \\ -6 = 9k \\ 2 = -3k \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \end{Bmatrix}$

<u>Ergebnis:</u> Also ist $\vec{n}_1 = -\frac{2}{3}\vec{n}_2$, d.h. die Ebenen sind parallel.

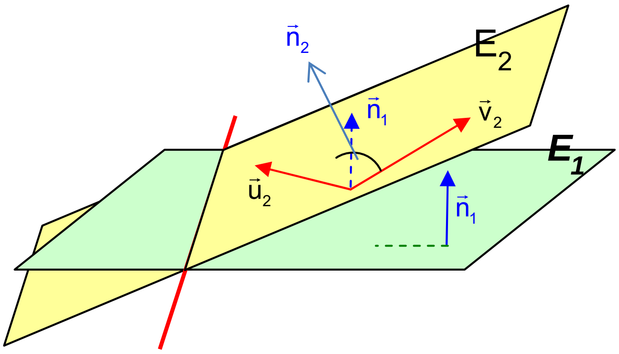
Zusatz: **Sind sie nun sogar identisch?**

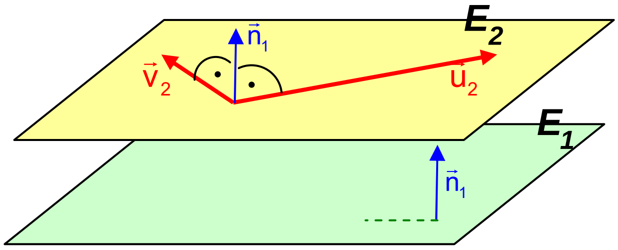
Wähle <u>einen</u> Punkt A von E_2: z. B. mit $x_A = 0,\ y_A = 0 \Rightarrow -3z_A = 8,\ z_A = -\frac{8}{3}$

Wir haben jetzt $A\left(0\,|\,0\,|\,-\frac{8}{3}\right)$ und setzen ihn in E_1 ein: $4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = 11$

Falsche Aussage! Also gilt: $E_1 \neq E_2$. E_1 und E_2 sind also „echt" parallel.

3. Fall: Eine Ebenen in der Koordinatenform, eine in der Parameterform





Auch hier macht die rechte Abbildung deutlich: Nur im Falle der Parallelität steht der Normalenvektor der einen Ebene senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der anderen Ebene.

Methode zur Überprüfung der Lage der beiden Ebenen zueinander:

Wenn die beiden Skalarprodukte des Normalenvektors der einen Ebene mit den Richtungsvektoren der anderen Ebene 0 sind, dann ist $\vec{n}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der anderen Ebene: Dann sind die Ebenen parallel.
Ist auch nur eines dieser Produkte ungleich 0, dann schneiden sich die Ebenen.

Im Falle der Parallelität könnten die Ebenen auch identisch sein. Durch Einsetzen eines Punktes von E_1 in E_2 (Punktprobe) kann man feststellen, ob sie gleich sind oder „echt parallel".

Beispiel 5: E_1: $2x - y + 3z = 12$ Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 6 = 8 \neq 0$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 - 4 + 0 = -6 \neq 0$$

Da nicht beide Skalarprodukte Null sind, sind die Ebenen nicht parallel, sie schneiden sich.

Beispiel 6: E_1: $2x - y + 3z = 12$ Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 + 0 - 6 = 0 \qquad \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

Also sind E_1 und E_2 parallel. Sie sind aber nicht identisch, denn der Aufpunkt $B(0\,|\,1\,|\,-1)$ von E_2 liegt nicht in E_1: $2 \cdot 0 - 1 + 3 \cdot (-1) \neq 12$

6 Schnitte von Ebenen

Grundaufgabe 6: Bestimme die Schnittgerade zweier Ebenen.

Gleich das Wichtigste im Voraus. Am schnellsten erhält man eine Schnittgerade, wenn beide Ebenen durch eine Koordinatengleichung gegeben sind. Deutlich mehr Aufwand hat man, wenn die Ebenen in verschiedenen Gleichungsarten vorliegen. Und ganz schlimm wird es, wenn beide Ebenen in der Parameterform gegeben sind. In diesem Fall lohnt es sich, eine der beiden Gleichungen in eine Koordinatengleichung umzuwandeln.

1. Fall: Zwei Ebenen in Koordinatenform schneiden

Beispiel 7:

E_1: $2x + 4y - 3z = 12$ (1)

E_2: $x - 3y + 3z = 18$ (2)

Elimination von z: (1) + (2): $3x + y = 30$ (3)

Bei 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten kann eine Variable frei gewählt werden:

Wähle $\boxed{x = r}$, $r \in \mathbf{R}$ in (3): $3r + y = 30 \Leftrightarrow \boxed{y = 30 - 3r}$

x und y in (2) ersetzen: $\boxed{r} - 3 \cdot \boxed{30 - 3r} + 3z = 18$

Zusammenfassen: $r - 90 + 9r + 3z = 18$ | +90 – 10r

Nach z umstellen: $3z = 108 - 10r$ | :3

$z = 36 - \frac{10}{3} r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 30 - 3r \\ 36 - \frac{10}{3} r \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

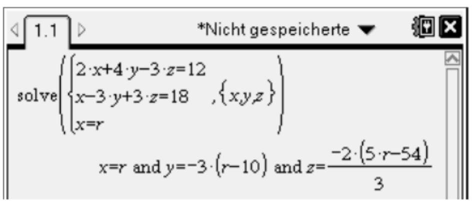
Dies ist der Ortsvektor aller Punkte der Schnittmenge, die, wie man sieht, eine Gerade ist.

Hinweis: Man kann jeden Richtungsvektor auch durch ein Vielfaches ersetzen.

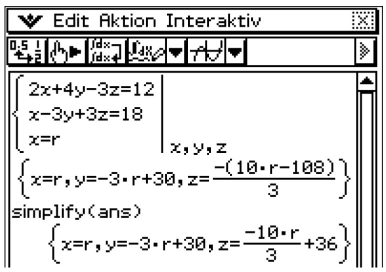
Wählt man hier das Dreifache, erhält man: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Lösung durch CAS-Rechner (TI Nspire und CASIO ClassPad):

Man löst ein System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten und gibt als 3. Gleichung die freie Wahl ein, also beispielsweise wie in der manuellen Lösung: x = r. Dann muss man nur noch die drei Koordinaten zum Lösungsvektor zusammenschreiben.



$x = r,\ \ y = -3r + 30,\ \ z = -\frac{10}{3} r + 36$



Beispiel 8: Gegeben sind E_1: $4x - 6y + 2z = 11 \quad | \cdot 3$

und E_2: $-6x + 9y - 3z = 8 \quad | \cdot 2$

$$12x - 18y + 6z = 33 \quad (1)$$
$$-12x + 18y - 6z = 16 \quad (2)$$

(1) + (2) ergibt die falsche Aussage: $0 = 49$

Man sagt auch „ergibt einen Widerspruch". Dann muss man wissen, dass das heißt:
Es ist Widerspruch gegen die Annahme, dass sich E_1 und E_2 schneiden.

Ergebnis: E_1 und E_2 sind echt parallel.

Dies wurde in Beispiel 2 auf Seite 22 durch eine vektorielle Überlegung gezeigt.
Hier erfuhren wir diese Tatsache durch den Versuch, die Schnittgerade zu berechnen.

Beispiel 8' : **Gegenüber Beispiel 8 wird nur eine Zahl verändert:**

Gegeben sind E_1: $4x - 6y + 2z = 11 \quad | \cdot 3$

und E_2: $-6x + 9y - 3z = \boxed{-16{,}5} \quad | \cdot 2$

$$12x - 18y + 6z = 33 \quad (3)$$
$$-12x + 18y - 6z = -33 \quad (4)$$

(1) + (2) ergibt die wahre Aussage: $0 = 0$

Man hätte auch festhalten können: (4) und (3) sind Vielfache voneinander.
Also ist eine Gleichung entbehrlich.

Somit liegt also nur eine Ebenengleichung vor oder anders formuliert:

Ergebnis: E_1 und E_2 sind identisch.

Methode zur Berechnung der Schnittgeraden:

In diesem Fall bilden die beiden Geraden ein System aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten.
Diese kann drei Lösungsmöglichkeiten besitzen:

(1) Nach der freien Wahl einer Variablen erhält man einen Lösungsvektor, der die Form einer Geradengleichung hat: Es gibt jetzt also eine **Schnittgerade**.

(2) Es kann einen Widerspruch ergeben, dann ist die Lösungsmenge leer.
Jetzt sind die **Ebenen echt parallel**.

(3) Man kommt auf eine wahre Aussage, etwa „0 = 0". Jetzt sind die **Ebenen identisch**.

2. Fall: Eine Ebenen in Koordinatenform, eine in Parameterform

Beispiel 9: Gegeben: E_1: $x+2y-3z=8$ (1)

E_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}2r\\1+r+2s\\1+r+s\end{pmatrix}$ (2)

Man ersetzt x, y und z in (1) durch die aus (2) entnommenen Terme:

$$(2r)+2\cdot(1+r+2s)-3\cdot(1+r+s)=8$$

Zusammenfassen: $2r+2+2r+4s-3-3r-3s=8$

$$r+s=9$$

Umstellen z. B. nach s: $s=9-r$ (3)

s in (2) einsetzen: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+(9-r)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Zusammenfassen: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\18\\9\end{pmatrix}-r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Schnittgerade: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\19\\10\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Beispiel 10: Gegeben: E_1: $2x-y+3z=12$ (1)

E_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}3r+s\\1+2s\\-1-2r\end{pmatrix}$ (2)

Man ersetzt x, y und z in (1) durch die aus (2) entnommenen Terme:

$$2(3r+s)-(1+2s)+3(-1-2r)=12$$

Zusammenfassen: $\cancel{6r}+\cancel{2s}-1-\cancel{2s}-3-\cancel{6r}=12$

$$-4=12$$

Dieser Widerspruch (gegen die Annahme, dass sich die Ebenen schneiden) führt zur Erkenntnis, dass die Lösungsmenge leer ist:

Ergebnis: E_1 und E_2 sind echt parallel.

3. Fall: Beide Ebenen sind in der Parameterform gegeben.

Dieser Fall ist algebraisch gesehen der schwerste. Es wird daher empfohlen, eine der Gleichungen in eine Koordinatengleichung umzuwandeln und dann die Berechnung durchzuführen. Dies wird auf der nächsten Seite gezeigt.

Beispiel 11: Gegeben sind:

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Man achte aber darauf, dass man nicht für beide Ebenen dieselben Parameter verwendet. Hier habe ich in (2) t und w anstatt auch r und s gewählt.

Hinweise zur Lösungsstrategie dieses Systems mit 4 Unbekannten

Bei drei Gleichungen mit vier Variablen ist eine frei wählbar. Welche man günstigerweise frei wählt, entscheidet man nach näherer Betrachtung der Gleichungen.
Man sollte das System dann so ordnen, dass die drei Variablen, die man dann noch berechnen muss, auf der linken Seite stehen, die frei gewählte also rechts steht.

Für die Lösung muss man dann nur noch die Variable berechnen, deren „Partner-Variable" man frei gewählt hat. Ich werde im Anschluss s frei wählen und daher nur noch r berechnen.

Das Ergebnis von r und s setzt man dann in die zugehörige Ebenengleichung ein, wodurch in ihr nur noch ein Parameter übrig bleibt, so dass nunmehr eine Geradengleichung vorliegt

1. Schritt: Die Vektorgleichung (3) ergibt Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} 8 + 0r + 3s = 0 + 2t + 0w \\ 3 + 3r + 0s = 1 + t + 2w \\ 2 + 2r + s = 1 + t + w \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}$$

Überlegungen, die speziell hier passen:

Wenn man t frei wählt, etwa $t = a,\ a \in \mathbf{R}$, dann kann man in (4) schnell s berechnen:

Und zwar so: $3s = 2t - 8 \iff s = \frac{2}{3}t - \frac{8}{3}$. Es ergeben sich jedoch Brüche.

Günstiger ist es daher umgekehrt: Ich wähle $\boxed{s = 2a}$, $a \in \mathbf{R}$.

Damit folgt aus (4): $2t = 6a + 8 \iff \boxed{t = 3a + 4}$ *bruchfrei!*

2. Schritt: Um nun das zu s gehörende r zu berechnen werden s und t in (5) und (6) ersetzt:

$$\left\{\begin{array}{l} 3 + 3r = 1 + (3a+4) + 2w \\ 2 + 2r + 2a = 1 + (3a+4) + w \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 3r - 2w = 3a + 2 \\ 2r - w = a + 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (5') \\ (6') \quad |\cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} 3r - 2w = 3a + 2 \\ 4r - 2w = 2a + 6 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} (5') \\ (6'') \end{matrix}$$

3. Schritt: Elimination von w, weil r berechnet werden soll:

$$(6'') - (5'): \qquad \boxed{r = -a + 4}$$

4. Schritt: Berechnung der Gleichung der Schnittgeraden:

In (1) werden r und s ersetzt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-a+4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3a \\ -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6a \\ -3a \\ 0 \end{pmatrix}$$

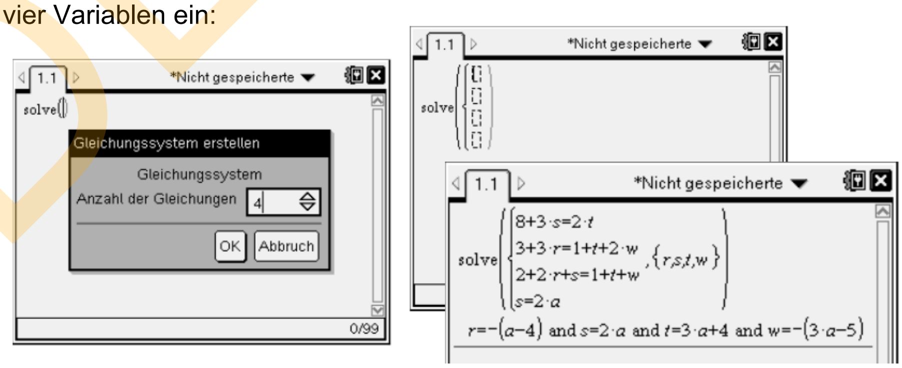
Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung dieser Aufgabe mit CAS-Rechnern

Da immer mehr Schulen mit CAS-Rechnern arbeiten, will ich noch zeigen, wie man damit die Lösung findet. Dabei sollte man daran denken, dass ein CAS-.Rechner ***nur ein Hilfsmittel*** ist. Man sollte also nicht den Ehrgeiz entwickeln, und die Aufgabe durch Gleichsetzen der beiden Ebenenterme lösen zu wollen. Viel zu umständlich!

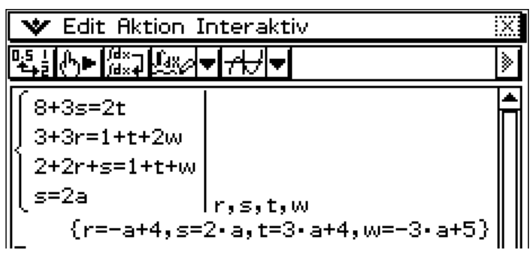
Man ruft die Maske für die Lösung eines Gleichungssystems auf. Da diese Rechner für 4 Unbekannte auch 4 Gleichungen verlangen (!), gibt man zu den Gleichungen (4), (5) und (6) als vierte Gleichung noch die freie Wahl einer der vier Variablen ein:

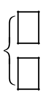
1. Lösung mit TI Nspire:



Man erhält: s = 2a (selbst gewählt) und $r = -a + 4$ wie oben. T und w interessieren nicht weiter.
Den 4. Schritt führt man wie oben **manuell zu Ende**. Eine CAS-Verwendung ist hier zu aufwändig.

2. Lösung mit CASIO ClassPad:



Man wählt im 2D-Manü das Symbol 

und aktiviert es dreimal, so dass man diese vier Gleichungen darin unterbringt.
Das Ergebnis für r und s wird in E_1 eingesetzt und die Aufgabe manuell wie oben (4. Schritt) beendet.

Lösung von Beispiel 11, nachdem von E_1 in eine Koordinatengleichung erstellt worden ist.

Gegeben sind dann: E_1: $x + 2y - 3z = 8$ (1)

und: E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2)

Jetzt ist es plötzlich das Beispiel 9 auf Seite 27. Dort kann man die Lösung anschauen.

ACHTUNG:

Das Ergebnis für die Schnittgerade lautete (nach viel kürzerer Rechnung) dort:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Vergleich zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach der Lösung auf Seite 27/28

Wie kann man beweisen, dass beide Gleichungen dieselbe Gerade darstellen?

1. Schritt: Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das 3-fache von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also sind die Geraden auf jede Fall schon einmal parallel.

2. Schritt: Wählt man r = 4, dann liefert die linke Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

Dieser Ortsvektor führt uns zum Aufpunkt $B(8\,|\,15\,|\,10)$ der rechten Gleichung.

Also liegt dieser Punkt auf der Geraden der linken Gleichung.

Parallele Geraden mit einem gemeinsamen Punkt sind identisch!

Superbeispiel 12: Die Lösung wird auf zwei Arten erstellt:

Zuerst schauen wir uns die schlimmere Methode durch Gleichsetzen der Berechnungsterme an.

Dann wird E_2 in eine Koordinatengleichung umgewandelt und die Schnittgerade wird durch Einsetzen ermittelt. Eine erfahrungsreiche Übung!

Gegeben sind: E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ (1)

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}$ (2)

1. Lösung: Gleichsetzen der Berechnungsterme

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

Umwandeln in ein Gleichungssystem, in dem w frei gewählt wird, also rechts steht:

$$\begin{Bmatrix} -r+3s+5t=4w-4 \\ 2r-2s-2t=-4w \\ 0r+\ s-\ t=-w-4 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix}(3)\\(4)\\(5)\end{matrix}$$

ZIEL: Bei 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten darf ja eine frei gewählt werden. Ich haben mich für w entschieden und daher w nach rechts gebracht. Der zu w gehörende zweite Parameter ist t. Man muss also r und s eliminieren.

Elimination von r: $2\cdot(3)+(4)$: $0r+4s+8t=4w-8$ | :4

Vereinfachen: $s+2t=w-2$ (6)

Dazu gehört nun noch (5), in der r bereits fehlt: $s-\ t=-w-4$ (5)

Elimination von s durch (6) – (5): $3t=2w+2$ (7)

Daraus folgt: $\boxed{t=\frac{2}{3}w+\frac{2}{3}}$ (8)

Oder günstiger: $2w=3t-2$ $|:2$ $w=\frac{3}{2}t-1$ (9)

Hinweis: Wenn ich jetzt also t frei wähle (statt w, wie geplant), steht nur noch 1 Bruch da. Und den können wir jetzt dadurch „verlieren", dass ich $t=2a$ *wähle!*

dann folgt aus (9): $\boxed{w=\frac{3}{2}\cdot 2a-1=3a-1}$

Letzter Schritt: w und t in (2) ersetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix} + \boxed{2a}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} + \boxed{3a-1}\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-10a\\4a\\2a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12a\\-12a\\-3a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

Zusammengefasst: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\6\\-2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}2\\-8\\-1\end{pmatrix}$

Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Verwendung eines CAS-Rechners bei dieser Methode:

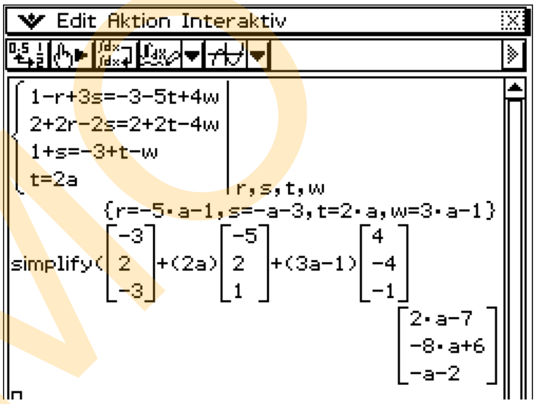
Man wird zunächst die Berechnungsterme gleichsetzen und damit diese Gleichung aufschreiben:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

Um Zeit und Rechenfehler zu sparen sollte man dieses System in den Rechner eingeben, und zwar zeilenweise in Form von 3 Gleichungen. Aber Vorsicht: 4 Unbekannte erfordern auch 4 Gleichungen, sonst meldet der Rechner „Syntaxfehler“. Wo steht aber die 4. Gleichung? Die Antwort lautet: Dies ist die Gleichung, welche die freie Wahl angibt. Dies ist jedoch ein wenig problematisch, denn wie kann man vorhersehen, welche Wahl günstig ist. In der Regel gar nicht, was auch egal ist.

Ich wähle jetzt zuerst einmal das, was auch in der Rechnung geschehen ist, und dann lasse ich die Lösung noch einmal durch irgendeinen Ansatz lösen:

Ich überprüfe also zuerst die Lösung der vorigen Seite und gebe als 4. Gleichung t = 2a ein.
Das sieht dann bei **CASIO ClassPad** so aus:

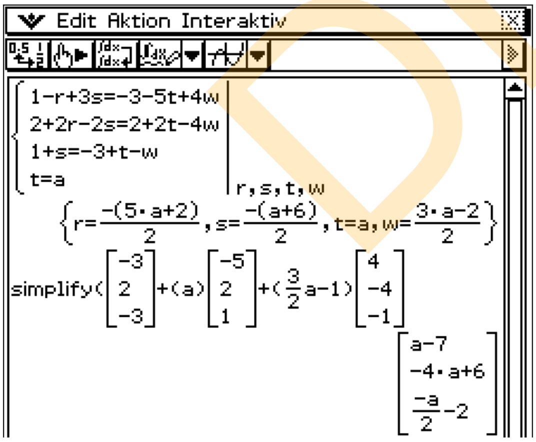


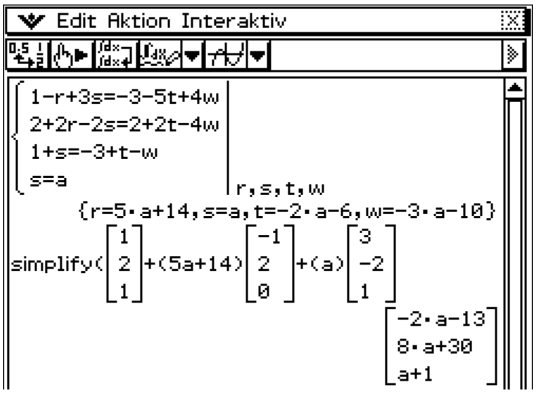
Ich habe dann sogar noch in E_2 eingesetzt:

Geradengleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\6\\-2\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}2\\-8\\-1\end{pmatrix}$.

Hier sieht man, was für t = a passiert:

Und rechts unten wurde s = a verwendet und dann aber in g eingesetzt.





Schnittgerade: $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\6\\-2\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\-4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Schnittgerade: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-13\\30\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$

Man erhält natürlich immer wieder andere Geradengleichungen. Die Richtungsvektoren müssen immer
Vielfache voneinander sein. Die Aufpunkte können wechseln. Um zu erkennen, dass diese Gleichungen immer dieselbe Gerade darstellen, muss man eben zeigen, dass sich die Aufpunkte auch aus den anderen Gleichungen berechnen lassen.

Lösungen

Lösungen der Trainingsaufgaben

1a) Gegeben: $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} r + 3s - 2t = 11 & (1) \\ -r \qquad - t = 4 & (2) \\ r + 2s + 3t = -6 & (3) \end{array}\right\}$

Nennerdeterminante: $D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right| = -3 + 4 + 2 + 9 = 12$

Da diese Determinante ungleich 0 ist, existiert eine eindeutige Lösung, also ein Schnittpunkt von g und E. Um diesen berechnen zu können genügt die Kenntnis des Wertes von t.

Zählerdeterminante für t: $D_t = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 1 & 2 \end{array}\right| = 12 - 22 - 8 - 18 = -36$

Also gilt: $t = \dfrac{D_t}{D} = \dfrac{-36}{12} = -3$

Aus g folgt: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-6 \\ 5-3 \\ -7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5|2|2)$

1b) Gegeben: $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} r + 3s - 2t = 1 & (1) \\ -r \qquad - t = -5 & (2) \\ r + 2s - t = 3 & (3) \end{array}\right\}$

Nennerdeterminante: $D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = -3 + 4 + 2 - 3 = 0$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.

Nun muss überprüft werden, ob g_2 sogar in E liegt.

$$D^* = \left|\vec{u} \quad \vec{v} \quad \overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right| = -15 - 2 + 10 + 9 \neq 0$$

Weil D* ungleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_2) nicht in E, also auch nicht g_2.

1c) Gegeben: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} r + 3s - 2t = -1 & (1) \\ -r \qquad - t = -2 & (2) \\ r + 2s - t = 0 & (3) \end{array}\right\}$$

Nennerdeterminante:
$$D = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right. = -3 + 4 + 2 - 3 = 0$$

Da diese Determinante 0 ist, existiert keine eindeutige Lösung, also gilt $g \parallel E$.

Nun muss überprüft werden, ob g_3 sogar in E liegt.

$$D^* = \left|\vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right. = -6 + 2 + 4 = 0$$

Also liegt B (Aufpunkt von g_3) in E, also auch g_3.

Hinweis. Die Schnittgleichung und die Nennerdeterminante hätte man in diesem Fall auch ersetzen können durch diese Rechnung:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right. = -4 + 0 + 3 + 3 - 0 - 2 = 0$$

Folgerung: Da die Richtungsvektoren komplanar sind, gilt $g \parallel E$.

2a) Gegeben: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} r + s - t = -1 & (1) \\ -s - 2t = 3 & (2) \\ r + 2s + t = 8 & (3) \end{array}\right\}$$

Nennerdeterminante:
$$D = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right. = -1 - 2 - 1 + 4 = 0$$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.

Nun muss überprüft werden, ob g_1 sogar in E liegt.

$$D^* = \left|\vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right. = -8 + 3 - 1 - 6 = -12 \neq 0$$

Weil D* ungleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_1) nicht in E, also auch nicht g_1.

2b) Gegeben: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} r + s + 2t = -2 & (1) \\ -s - t = 1 & (2) \\ r + 2s + 3t = -3 & (3) \end{matrix} \right\}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -3 - 1 + 2 + 2 = 0$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.

Nun muss überprüft werden, ob g_1 sogar in E liegt.

$$D^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 3 + 1 - 2 - 2 = 0$$

Weil D* gleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_1) in E, also auch g_1.

2c) Gegeben: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} r + s + t = 0 & (1) \\ -s - 3t = 0 & (2) \\ r + 2s - 2t = 6 & (3) \end{matrix} \right\}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 2 - 3 + 1 + 6 = 6 \neq 0$

Da diese Determinante ungleich 0 ist, existiert eine eindeutige Lösung, also ein Schnittpunkt von Gerade und Ebene. Um diesen berechnen zu können genügt es, t zu berechnen:

Zählerdeterminante für t: $D_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -6$

Also gilt: $t = \frac{D_t}{D} = \frac{-6}{6} = -1$

Aus g folgt: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S(4|-2|3)$

3a) Gegeben $E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$ und $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzungsverfahren: $2(2r) - (-4 - r) + 6(6 + r) = 18$

$4r + 4 + r + 36 + 6r = 18$

Zusammenfassen: $11r = -22 \Leftrightarrow \boxed{r = -2}$

Eingesetzt in g_1: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-4|-2|4)$

3b) Gegeben $E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Einsetzungsverfahren: $2(3 + r) - (1 - 4r) + 6(-2 - r) = 18$

$6 + 2r - 1 + 4r - 12 - 6r = 18$

Zusammenfassen: $-7 = 18$

Dieser Widerspruch besagt, dass es keine Lösungen für r gibt, also auch keine gemeinsamen Punkte von g_2 und E: **g_2 und E sind „echt" parallel**.

3c) Gegeben $E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$ und $g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Einsetzungsverfahren: $2(-2 - 5r) - (2 + 2r) + 6(4 + 2r) = 18$

$-4 - 10r - 2 - 2r + 24 + 12r = 18$

Zusammenfassen: $18 = 18$

Diese allgemeingültige Gleichung sagt, dass sie von jedem beliebigen Wert von r gelöst wird.

Jeder Punkt von g_3 liegt also in E, also liegt die Gerade g_3 in der Ebene E.

4) Fälle von $A(7|6|1)$ das Lot auf die Ebene E: $x + 2y + z = 8$

a) Die Ebene hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (die Koeffizienten der Ebenengleichung).

Ihn verwendet man als Richtungsvektor der Lotgeraden: $L: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schnitt von L mit E: $(7 + t) + 2(6 + 2t) + (1 + t) = 8$

Daraus folgt: 6t +20 = 8 ergibt 6t = - 12 also t = - 2.

Eingesetzt in L: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(5|2|-1)$

b) Verbindungsvektor: $\overline{AF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $d(A,E) = \left|\overline{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$

---

5) Fälle von $P(-2|-6|13)$ das Lot auf die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 15$

a) Lotgerade: $L: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung: $2(-2 + 2t) + (-6 + t) - 5(13 - 5t) = 15$

Zusammenfassen: $-4 + 4t - 6 + t - 65 + 25t = 15$

Ergibt 30 t = 90 also t = 3.

Eingesetzt in L: $\vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow F(4|-3|-2)$

b) Verbindungsvektor: $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $d(P,E) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36 + 9 + 225} = \sqrt{270}$

6) Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit

$A(8|5|1),\ B(0|-3|-4),\ C(28|4|3),\ S(10|-6|16).$

Beweise: Die Spitze S steht von der Ebene aus senkrecht über dem Schwerpunkt Q des Dreiecks ABC.

1. Schritt: Aufstellen der Gleichung der Ebene durch A,B und C:

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A sei der Aufpunkt. Dann folgt

$$E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 8 - 8r + 20s & (1) \\ x_2 = 5 - 8r - s & (2) \\ x_3 = 1 - 5r + 2s & (3) \end{array}\right\}$$

1. Methode: Umwandlung in die Normalenform mittels Eliminationsverfahren

Elimination von r durch (1) – (2): $x_1 - x_2 = 3 + 21s$

Umstellen nach s: $21s = x_1 - x_2 - 3 \Leftrightarrow \boxed{s = \frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}}$

s in (2) ersetzen: $x_2 = 5 - 8r - \left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right)$

$x_2 = \frac{36}{7} - 8r - \frac{1}{21}x_1 + \frac{1}{21}x_2$

Umstellen nach r: $8r = \frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2$

$r = \left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right)\cdot\frac{1}{8}$

r und s in (3) ersetzen: $x_3 = 1 - 5\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right) + 2\left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right) \quad \big|\cdot 8\cdot 21$

$$168x_3 = 168 - 5\cdot 21\cdot\left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right) + 2\cdot 8\cdot 21\left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right)$$

$$168x_3 = 168 - 5\cdot(36\cdot 3 - x_1 - 20x_2) + 16\cdot(x_1 - x_2 - 3)$$

$$168x_3 = 168 - 540 + 5x_1 + 100x_2 + 16x_1 - 16x_2 - 48$$

$$21x_1 + 84x_2 - 168x_3 = 420 \quad \big| : 21$$

$$\mathbf{E:\quad x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 20}$$

Sie erinnern sich, wie man die hier sicher nützliche Probe machen kann? Also:

1. Links den Aufpunkt einsetzen, das muss 20 ergeben,
2. Links beide Richtungsvektoren einsetzen, das muss beides Mal 0 ergeben.

2. Methode: Umwandlung in die Normalenform mittels Skalarprodukt:

Gegeben: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht: Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.

Bedingungen: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ d. h. $-8n_1 - 8n_2 - 5n_3 = 0$ (1)

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ d. h. $20n_1 - n_2 + 2n_3 = 0$ (2)

Elimination von n_2: $(1) - 8 \cdot (2)$: $-168\,n_1 + 0n_2 - 21\,n_3 = 0 \quad | :(-21)$

$8n_1 + n_3 = 0 \iff n_3 = -8n_1$

Bei 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten ist eine Variable frei wählbar:

Wähle $n_1 = a,\ a \in \mathbf{R}$

Ergibt: $n_3 = -8a$

Einsetzen in (2): $20a - n_2 + 2 \cdot (-8a) = 0$

$4a - n_2 = 0 \iff n_2 = 4a$

Normalenvektoren: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 4a \\ -8a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die freie Wahl ist nun a = 1: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Damit lautet die Koordinatengleichung von E: $x_1 + 4x_2 - 8x_3 = k$

k bestimmt man durch Einsetzen eines Ebenenpunktes, etwa $A(8\,|\,5\,|\,1)$:

$k = 8 + 20 - 8 = 20$

Ergebnis: $\boxed{x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 20}$

3. Methode: Umwandlung in die Normalenform mittels Vektorprodukt:

Das Vektorprodukt aus den Richtungsvektoren steht auf diesen senkrecht:

$$\vec{n} = (-u) \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 \\ 5 \cdot 20 \\ 8 \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) \\ 8 \cdot 2 \\ 8 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 5 \\ 100 - 16 \\ -8 - 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 84 \\ -168 \end{pmatrix} = 21 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 8 & 20 \\ 8 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 20 \\ 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{array}$$

Hinweis dazu: Ich habe $-\vec{u}$ verwendet, dann sind die 3 Minuszeichen weg, und am Ende erkennt man, dass man den Faktor 21 herausziehen kann. Als Normalenvektor für die Ebene E nimmt man dann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. Der Rest, also die Aufstellung der Koordinatengleichung steht einige Zeilen höher bei der 2. Methode.

2. Schritt: Lot von der Pyramidenspitze S auf die Dreiecksebene fällen:

Dazu nimmt man den aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung gebildeten Normalenvektor und verwendet ihn als Richtungsvektor. Die Gleichung der Lotgeraden wird dann Koordinatenweise in die Gleichung der Ebene eingesetzt:

Lotgerade: $L: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

Ebene E: $x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 20$

Eingesetzt: $(10 + r) + 4(-6 + 4r) - 8(16 - 8r) = 20$

$10 + r - 24 + 16r - 128 + 64r = 20$

Zusammenfassen: $81r = 162 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = 2}$

Eingesetzt in L: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F(12|2|0)$

Zum Vergleich: Schwerpunkt des Dreiecks: $\vec{x}_Q = \vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$\vec{q} = \tfrac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q(12\,|\,2\,|\,0)$$

Ergibt Der Lotfußpunkt $F(12|2|0)$ ist also zugleich der Schwerpunkt des Grunddreiecks.

7) Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit
$A(1|5|3),\ B(-2|5|1),\ C(0|0|4),\ S(1|-2|-4)$.

Überprüfe, ob diese Pyramide „überhängt“ (Dies ist dann der Fall, wenn das Lot von der Spitze auf die Grundfläche außerhalb des Dreiecks schneidet.

1. Schritt: Aufstellen der Gleichung der Ebene durch A,B und C:

1. Methode: Umwandlung in die Normalenform mittels Eliminationsverfahren

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. A sei der Aufpunkt. Dann folgt

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 1-3r-s & (1) \\ x_2 = 5 \qquad -5s & (2) \\ x_3 = 3-2r+s & (3) \end{array}\right\}$$

Aus (2) folgt: $5s = 5 - x_2 \Rightarrow \boxed{s = 1 - \frac{1}{5}x_2}$

(Hier ist bereits r eliminiert!!!)

s in (1) ersetzen: $x_1 = 1 - 3r - \left(1 - \frac{1}{5}x_2\right)$

Nach r umstellen: $3r = \frac{1}{5}x_2 - x_1 \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{1}{15}x_2 - \frac{1}{3}x_1}$

r und s in (3): $x_3 = 3 - 2\left(\frac{1}{15}x_2 - \frac{1}{3}x_1\right) + \left(1 - \frac{1}{5}x_2\right) \quad |\cdot 15$

$15x_3 = 45 - 2x_2 + 10x_1 + 15 - 3x_2$

$-10x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 60 \quad |:5$

Koordinatengleichung von E: $\mathbf{-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12}$

2. Methode: Umwandlung in die Normalenform mittels Skalarprodukt:

Richtungsvektoren: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Bedingungen: $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ d. h. $-3n_1 - 2n_3 = 0$ (1)

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ d. h. $-n_1 - 5n_2 + n_3 = 0$ (2)

Wähle $n_1 = 2a,\ a \in \mathbf{R}$, in (1): $-3\cdot 2a - 2n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = -3a$

Einsetzen in (2): $-2a - 5n_2 - 3a = 0 \Leftrightarrow -5n_2 = 5a \Leftrightarrow n_2 = -a$.

Normalenvektoren: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ -3a \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, für a = -1: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = k$

$A(1|5|3)$ einsetzen ergibt: $k = -2 + 5 + 9 = 12$

Ergebnis: $\mathbf{-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12}$

2. Schritt: Lot von S auf die Dreiecksebene fällen:

Lötgerade: L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Grundebene: E: $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$

Lotfußpunkt: $-2(1-2t) + (-2+t) + 3(-4+3t) = 12$

$-2 + 4t - 2 + t - 12 + 9t = 12$

ergibt: $14t = 28 \Leftrightarrow \boxed{t = 2}$

Eingesetzt in L ergibt dies den Lotfußpunkt:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-3|0|2)$$

3. Schritt: Lage des Punktes F bezüglich des Dreiecks ABC.

Man verwendet $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Basisvektoren in der Ebene und stellt $\overrightarrow{AF}$ als Linearkombination durch sie dar:

Ansatz: $\overrightarrow{AF} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -3r - s = -4 & (1) \\ -5s = -5 & (2) \\ -2r + s = -1 & (3) \end{array} \right\}$

Aus (2) folgt: $\boxed{s = 1}$

in (3) ; $-2r + 1 = -1 \Rightarrow -2r = -2 \Rightarrow \boxed{r = 1}$

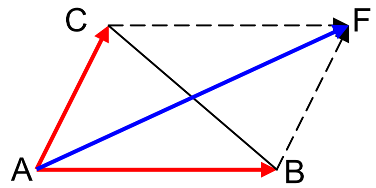
Weil 3 Gleichungen vorliegen, muss die Probe gemacht werden:

Probe in (1): $-3 - 1 = -4$ ist eine wahre Aussage.

Ergebnis: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Das heißt, dass F außerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Zusätzlich erkennt man, dass F ABC zu einem Parallelogramm ergänzt.



8) Gegeben sind zwei Ebenen und ein Punkt P. Lege durch P die Lotgerade zu beiden Ebenen und berechne die Schnittpunkte mit den Ebenen.

Stelle an Hand der Ergebnisse fest, ob P zwischen den Ebenen liegt oder wo sonst?

$E_1:\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 27,\quad E_2:\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -36,\quad P(1|3|-2)$

Lösung

Die Ebenen sind parallel, weil sie denselben Normalenvektor haben: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir legen nun eine Senkrechte zu E_1 und E_2 durch P und schneiden diese Lotgerade mit beiden Ebenen: L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnitt von L und E_1:

$$(1+r) - 4(3-4r) + 2(-2+2r) = 27$$
$$1 + r - 12 + 16r - 4 + 4r = 27$$
$$21r = 42 \Rightarrow \boxed{r_1 = 2}$$

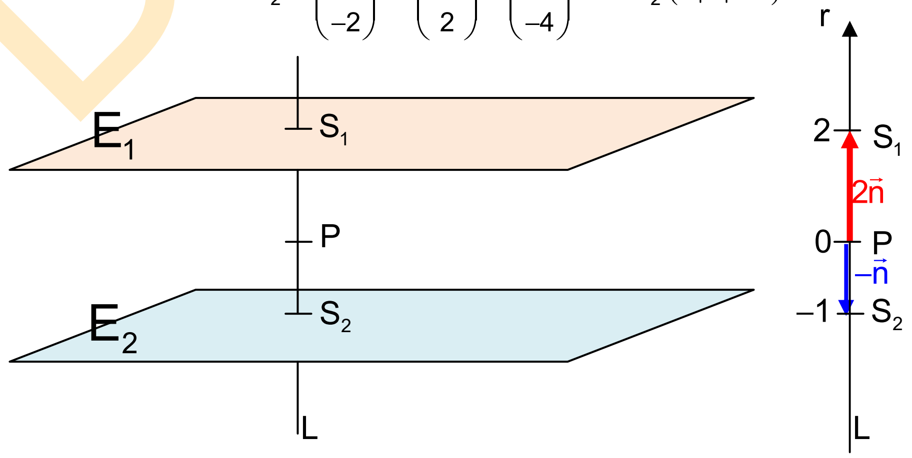
Schnittpunkt: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(3|-5|2)$

Schnitt von L und E_2:

$$(1+r) - 4(3-4r) + 2(-2+2r) = -36$$
$$1 + r - 12 + 16r - 4 + 4r = -36$$
$$21r = -21 \Leftrightarrow \boxed{r_2 = -1}$$

Schnittpunkt : $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(0|7|-4)$

Übersicht:



Die eigentlich wichtige Abbildung ist rechts. Dort ist die Lotgerade L als r-Achse dargestellt. Der Aufpunkt P der Lotgeraden gehört von der Bildung der Gleichung her zum Wert r = 0. Aus den Schnittrechnungen folgt, dass der Schnittpunkt S_1 mit E_1 zu r = 2 und S_2 mit E_2 zu r = - 1 gehört. ***Also liegt P zwischen E_1 und E_2.***

9) Gegeben: $E_1: 2x + y - 5z = 17$, $E_2: 2x + y - 5z = 77$, $P(3|1|4)$

Bestimme die Lage von P relativ zu den beiden Ebenen E_1 und E_2.

Nach der ausführlichen Lösung in Nr. 8 führen wir hier die Schnittpunktsberechnung nur so weit aus, dass wir die Parameterwerte für sie erhalten. Die Koordinaten der Punkte sind zur Beantwortung der Frage nicht notwendig.

Lösung

Lot L von P auf die parallelen Ebenen E_1 und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Schnitt der Lotgeraden mit E_1: $2(3+2r) + (1+r) - 5(4-5r) = 17$

Dies führt auf: $30r = 30 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r_1 = 1}$

Schnitt der Lotgeraden mit E_2: $2(3+2r) + (1+r) - 5(4-5r) = 77$

Dies führt auf 30 r = 90, also r = 3. $30r = 90 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r_2 = 3}$

Veranschaulichung der Lage der Punkte auf der Lotgeraden L:

Man erkennt an Hand der Parameterwerte 0, 1 und 3, dass jetzt P nicht zwischen den Ebenen liegt sondern jenseits von E_1.