Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 6 Abstände

Berechnung von Abständen zu Geraden und Ebenen

Einfache Darstellung der Grundlagen:

Die wichtigsten Aufgabenstellungen und Methoden-

Datei Nr. 64110

Stand 28. Dezember 2015

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort !!!

In diesem Text geht es um Entfernungsberechnungen zu Ebenen und Geraden.

Man erkennt aus dem Inhaltsverzeichnis, welche Aufgabenstellungen durchgesprochen werden!

Hinweise:

Alle Musterbeispiele und Trainingsaufgaben stehen kompakt noch einmal im Text 64111 als reine Aufgabensammlung. Die Lösungen kann man hier nachlesen. Dazu gibt es in 64111 Seitenhinweise.

Eine weitere Aufgabensammlung mit der Nummer 64112 enthält weitere Aufgaben zu den hier (64100) gezeigten Methoden und Themen.

Seit Januar 2014 gibt es dazu einen Text mit Lernkarten zum schnellen Wiederholen der Fakten und Methoden: Text 64501.

Inhalt

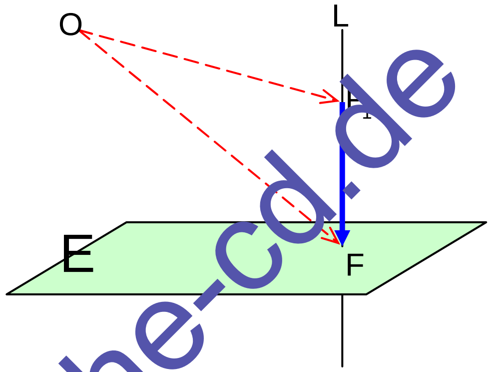
1 Abstand eines Punktes von einer Ebene

1.1 1. Methode: Lotgerade - Lotfußpunkt - Abstandsberechnung

Grundlagen dazu:

In der Koordinaten- oder Normalengleichung einer Ebene, z. B. $2x-3y-6z=75$, stellen die Koeffizienten 2 -3 und -6 die Koordinaten eines **Normalenvektors** der Ebene dar.

Der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}$ (und alle seine Vielfachen) hat also eine Richtung senkrecht zur Ebene. Man kann ihn daher als **Richtungsvektor für eine Lotgerade** verwenden.



Grundaufgabe 8: **Berechne den Abstand des Punktes P_1 von E mit der Lotgeraden.**

Beispiel 1: Gegeben: E: $2x-3y-6z=75$ und $P_1(2|1|4)$

Lösung: Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}$ Lotgerade: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}$ bzw. kurz $\vec{x}=\begin{pmatrix}2+2r\\1-3r\\4-6r\end{pmatrix}$

Schnitt der Lotgerade mit der Ebene: Man setzt den Berechnungsterm der Lotgeraden koordinatenweise in die Gleichung der Ebene ein: $2\cdot\boxed{2+2r}-3\cdot\boxed{1-3r}-6\cdot\boxed{4-6r}=75$.

Daraus erhält man $4+4r-3+9r-24+36r=75$ bzw. $49r=98$ also $\boxed{r=2}$.

Berechnung des Lotfußpunktes: $\vec{f}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+\boxed{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-5\\-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow F(6|-5|-8)$

Der Abstand des Punktes P_1 von ist so groß wie der Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1F}$:

$$\overrightarrow{P_1F}=\vec{f}-\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\-5\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\\-12\end{pmatrix} \qquad d(P_1,E)=\left|\overrightarrow{P_1F}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-6\\-12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{16+36+144}=\sqrt{196}=14$$

Beispiel 2: Gegeben: E: $4x-4y+7z=36$ und $P_1(-2|4|-3)$

Lösung: Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$, Lotgerade: L: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2+4r\\4-4r\\-3+7r\end{pmatrix}$

Schnitt von Lotgerade und Ebene: $4\cdot(-2+4r)-4\cdot(4-4r)+7\cdot(-3+7r)=36$

ergibt $-8+16r-16+16r-21+49r=36$, $81r-45=36 \Leftrightarrow 81r=81 \Leftrightarrow \boxed{r=1}$

Lotfußpunkt: $\vec{f}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}+\boxed{1}\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow F(2|0|4)$

Gesuchter Abstand: $\overrightarrow{P_1F}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} \qquad d(P_1,E)=\left|\overrightarrow{P_1F}\right|=\sqrt{16+16+49}=9$

1.2 Die Hesseschen Normalform

Die Koordinatengleichung oder Normalengleichung einer Ebene lautet:

$\boxed{ax+by+cz=k}$ oder so $\boxed{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=k}$ (1)

Die Koeffizienten bilden einen Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ von E.

Die Hessesche Normalform einer Ebenengleichung entsteht aus der Normalengleichung, indem man die Gleichung so umformt,

1. dass rechts 0 steht und links das Absolutglied ein <u>negatives Vorzeichen</u> besitzt.

2. durch den Betrag des Normalenvektors teilt.

Aus (1) wird dann $\boxed{\dfrac{ax+by+cz-k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0}$ bzw. $\boxed{\dfrac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-k}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}=0}$ mit k > 0

Beispiele:

a) E: $2x-3y-6z=75 \Rightarrow 2x-3y-6z-75=0 \quad | : \left|\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

HNF: $\dfrac{2x-3y-6z-75}{7}=0$

b) E: $4x-4y+7z=36 \Rightarrow 4x-4y+7z-36=0 \quad | : \left|\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+49}=\sqrt{81}=9$

HNF: $\dfrac{4x-4y+7z-36}{9}=0$

c) E: $12x_1-x_2-12x_3=289 \Rightarrow 12x_1-x_2-12x_3-289=0 \quad | : \left|\begin{pmatrix}12\\-1\\-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{144+1+144}=17$

HNF: $\dfrac{12x_1-x_2-12x_3-289}{17}=0$

d) E: $x+y+3x=-2 \Rightarrow -x-y-3z\boxed{+2}=0 \quad | : \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$

HNF: $\dfrac{x-y-3z-2}{\sqrt{11}}=0$

e) E: $2x-y+2z=0 \quad | : \left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$

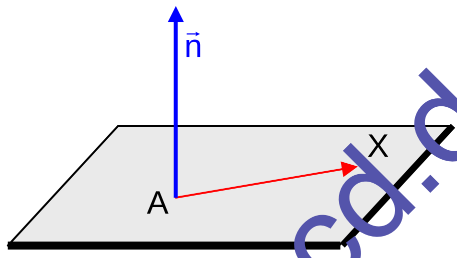
HNF: $\dfrac{2x-y+2z}{3}=0$

Für die Hessesche Normalform gibt es mehrere Vektorschreibweisen:

1. Wir beginnen mit der **Herleitung der Normalengleichung**:

Eine Ebene kann festgelegt sein durch einen Aufpunkt A und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$,
oder durch einen Aufpunkt und einen zu beiden Richtungsvektoren orthogonalen Vektor, den man Normalenvektor der Ebene nennt.

Die **Bedingung** dafür, dass ein beliebiger Punkt **X in E liegt**, ist hier: $\vec{n} \perp \overline{AX}$, also $\vec{n} \cdot \overline{AX} = 0$.
Ausführlicher heißt das $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$



Das ist bereits eine Form der Normalengleichung: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (1)

Oder in ausmultiplizierter Form: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$ (2)

Das ergibt dann eine lineare Gleichung: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k$ (3)

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 4$ entspricht $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4$ oder $3x + 2y + 6z = 4$.

Stellt man eine Normalengleichung auf, bestimmt man zuerst den Normalenvektor $\vec{n}$ und kann dann damit die Gleichung (2) aufstellen.
Um k zu bekommen, benötigt man noch einen Punkt (sagen wir) A der Ebene.
Setzt man ihn ein, dann folgt: $\vec{n} \cdot \vec{a} - k = 0 \Leftrightarrow k = \vec{n} \cdot \vec{a}$.
Damit wird aus (2): $\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ bzw. $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
Diese Gleichungsform ist auch für CAS-Rechner sehr geeignet.

2. Dividiert man diese Gleichung durch den Betrag des Normalenvektors, also durch $|\vec{n}|$,

dann entsteht diese Gleichung: $\dfrac{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{n}|} = 0$ bzw. $\dfrac{\vec{n} \cdot \vec{x} - k}{|\vec{n}|} = 0$ (4)

Wenn man einen Vektor durch seinen Betrag teilt, dann hat dieser „nur noch" den Betrag 1:

<u>Beispiel:</u> $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ hat den Betrag 7, denn es ist: $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$.

$\vec{n}^o = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$ hat nun den Betrag 1, was man ja nachrechnen kann:

Die HNF sieht dann mit $A(3|1|-2)$ so aus: $\dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{7} = 0$ bzw. kürzer:

$$\frac{2x - 3y - 6z - 15}{7} = 0$$

Vektoren mit dem Betrag 1 nennt man **Einheitsvektoren**

Die Kennzeichnung „hoch 0“ soll andeuten, dass ein Einheitsvektor vorliegt.
Wenn man also die Normalengleichung durch den Betrag ihres Normalenvektors teilt, dann bekommt der neue Normalenvektor den Betrag 1, ist also ein **Normalen-Einheits-Vektor**.

(3) kann man daher einfach so umschreiben: $\underbrace{\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}}_{\vec{n}^{o}}\cdot\vec{x}-\underbrace{\frac{k}{|\vec{n}|}}_{d}=0$ d. h. $\boxed{\vec{n}^{o}\cdot\vec{x}-d=0}$

(5)

Merke: $\boxed{\vec{n}^{o}=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}}$ ist also der Normalen-Einheits-Vektor

(5) kann man im Anschluss an (3) auch so schreiben: $\boxed{\frac{\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{n}|}=0}$ (5*)

Anwendung und Nutzen der HNF

1. Setzt man die Koordinaten eines Punktes in die HNF einer Ebene ein, erhält man den Abstand des Punktes von dieser Ebene.

   Sollte das Ergebnis negativ sein, muss man zur Berechnung Betragsstriche verwenden.

2. Hat man darauf geachtet, dass in der HNF das Absolutglied links ein negatives Vorzeichen hat, dann gilt Folgendes:

   a) Würde man bei der Abstandsberechnung ohne die Betragsstriche ein negatives Ergebnis bekommen, dann liegt der eingesetzte Punkt auf derselben Seite wie der Ursprung, im anderen Falle auf der entgegengesetzten Seite.

   b) Der Einheits-Normalen-Vektor zeigt dann vom Ursprung auf die Ebene.

Mit den in 2. genannten Fakten kann man auf einfache Art Lotfußpunkt und Spiegelbilder an E berechnen. Beispiele dazu folgen im Anschluss. Spiegelungen werden in einem anderen Text besprochen.