Abitur BW 2010 – Aufgabe I.1.1

Auf einem ebenen Gelände befindet sich ein geradliniger, 500 m langer Lärmschutzwall.
Das Profil seines Querschnitts wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x)=\frac{120}{x^2+20}-2 \quad \text{und} \quad f(x)\geq 0 \qquad \text{(x und f(x) in Meter).}$$

a) Wie breit ist der Wall an seinem Fuß?
Zeigen Sie, dass der Wall einen symmetrischen Querschnitt besitzt.
Der Wall soll begrünt werden. Um Erosion zu vermeiden, sollte das maximale Gefälle der Böschung nicht größer als 100% sein.
Ist dies beim gegebenen Querschnittprofil der Fall? (4 VP)

b) Berechnen Sie das Volumen des Lärmschutzwalls.
Es ist geplant, den Wall auf 3 m Höhe abzutragen, um darauf einen Fahrweg anzulegen.
Welche Breite hätte dieser Fahrweg?
Das abzutragende Material soll dazu verwendet werden, den abgeflachten Wall zu verlängern.
Um wie viel Meter würde er länger? (6 VP)

c) Statt der Planung aus Teilaufgabe b) wird am ursprünglichen Wall die Erde so abgetragen, dass der Fahrweg seitlich geneigt ist. Sein rechter Rand liegt 0,4 m höher als sein linker Rand.
Die Breite des Fahrwegs beträgt 4 m.
Bestimmen Sie den Winkel, um den der Fahrweg gegenüber der Horizontalen geneigt ist, auf zwei Dezimalen genau.
In welcher Höhe befindet sich der linke Rand des Fahrwegs? (5 VP)

Nur CAS:

Abitur BW 2010 – Aufgabe I 1.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x\cdot e^x$

Geben Sie für $n\geq 1$ einen Term $f^{(n)}(x)$ für die n-te Ableitung an.
Weisen Sie die Gültigkeit des Terms mit vollständiger Induktion nach. (3 VP)

Abitur BW 2010 – Aufgabe I 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = 1 - \cos(\pi x) \quad \text{und} \quad g(x) = \tfrac{1}{10}(4 - x) \cdot f(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ihre Schaubilder sind K_f und K_g.

a) Geben Sie alle Nullsteilen der Funktion f an.
Beschreiben Sie, wie man K_f aus dem Schaubild der Kosinusfunktion erhalten kann.
Skizzieren Sie K_g für $0 \le x \le 4$.
Mit CAS: Zeigen Sie, dass K_g in allen Nullstellen die x-Achse als Tangente hat. (5 VP)

Das Schaubild K_g beschreibt im Bereich $0 \le x \le 4$ die Seitenansicht einer Minigolfbahn, die eine Doppelwelle als Hindernis enthält (Längenangaben in Meter).
Gespielt wird von links nach rechts.

b) Wie hoch liegt der höchste Punkt der Bahn?
An welcher Stelle der Bahn muss der Ball die größte Steigung überwinden?
Die Minigolfbahn ist 1,25 m breit. Nach einem schweren Regenguss steht das Wasser zwischen den beiden Wellen 5 cm hoch.
Wie viele Liter Wasser haben sich dort gesammelt? (5 VP)

c) Ein Ball wird so fest geschlagen, dass er bei x = 0,5 tangential von der Bahn abhebt und im Punkt $P(7 \mid 0)$ wieder auf dem Boden auftrifft.
Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balls auf einer parabelförmigen Flugbahn.
Mit CAS: *Unter welchem Winkel zur Horizontalen trifft der Ball auf den Boden?* (4 VP)

d) Das Hindernis der Minigolfbahn soll im gleichen Bereich neu gestaltet werden.
Das neue Hindernis soll drei jeweils 40 cm hohe Wellen erhalten.
Am Anfang und Ende soll das Hindernis waagrecht und auf der gleichen Höhe wie bisher enden.
Bestimmen Sie einen Term einer Funktion, die den neuen Bahnverlauf beschreibt.
Vergleichen Sie die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen. (4 VP)

Abitur BW 2010 – Aufgabe I 3

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit 160 $\frac{m}{min}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher. Die Geschwindigkeit v(t) des Motorbootes ist für t > 0 stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} \; ; t \geq 0$$

beschrieben (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit v(t) in $\frac{m}{min}$)

a) Skizzieren Sie das Zeit-Geschwindigkeit-Schaubild des Motorbootes für die ersten fünf Minuten. Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum. Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum am stärksten ab? Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten? Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot? Zwischen welchen Zeitpunkten ist das Motorboot schneller als das Segelboot? (6 VP)

b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren? Bestimmen Sie einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als 500 m zurück? Zu welchem Zeitpunkt überholt das Motorboot das Segelboot? (6 VP)

c) Zum Zeitpunkt $t_O = 2{,}55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein. Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit. Ab dem Zeitpunkt t_O wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_O beschrieben. Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_O ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand. Wann kommt das Boot zum Stillstand? (6 VP)

Abitur BW 2011 - Aufgabe I 1

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = \frac{4}{x^3 + 4a}$

Ihr Schaubild ist K_a.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_2.

Geben Sie die Asymptoten von K_2 an.

Zeigen Sie, dass der Graph K_2 genau zwei Wendepunkte besitzt.

Bestimmen Sie deren Koordinaten.

Welcher Punkt $P(u \mid v)$ von K_2 mit $0 \leq u \leq 2$ hat vom Punkt $A(1 \mid 0)$ den kleinsten Abstand?

(7 VP)

b) **Ohne CAS:** Zeigen Sie, dass K_2 mit keinem anderen Schaubild K_a einen gemeinsamen Punkt besitzt.

Mit CAS: *Zeigen Sie, dass keine zwei Kurven der Schar einen gemeinsamen Punkt besitzen.*

Bestimmen Sie den Punkt Q_a, in dem K_a eine waagrechte Tangente besitzt.

Wo liegen alle Punkte Q_a? (5 VP)

c) Die Schaubilder K_1 und K_2 schließen mit der y-Achse und der Geraden x = 2 eine Fläche ein.

Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper, der als Düse benutzt wird (Längeneinheit 1 cm).

Berechnen Sie die Masse einer solchen Düse, die aus Titan mit einer Dichte von $4{,}5\,\frac{g}{cm^3}$ besteht.

Diese Düse wurde aus einem massiven Kegel mit der Höhe 3 cm und der x-Achse als Rotationsachse ausgefräst.

Welchen Radius hatte der Grundkreis dieses Kegels mindestens? (6 VP)

Abitur BW 2011 - Aufgabe I 2

Aufgabe I 2.1

Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion w mit

$$w(t) = 50 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 24$$

beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in $\frac{m^3}{h}$).

a) In welchem Zeitraum innerhalb der ersten 24 Stunden ist die momentane Zuflussrate größer als $100\,\frac{m^3}{h}$?
Zu welchem Zeitpunkt innerhalb der ersten 24 Stunden nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab? (4 VP)

b) Zu Beobachtungsbeginn enthält das Staubecken 5000 m^3 Wasser.
Wie viel Wasser enthält es nach 24 Stunden?
Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm für die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge.
Nach welcher Zeit sind 6000 m^3 Wasser im Becken?
Nur CAS: *Begründen Sie, dass die täglich zufließende Menge gleich bleibt.* (5 VP)

Aufgabe I 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H_a von K_a für $0 \le x \le p_a$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte H_a liegen. (4 VP)

b) Geben Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an, der den kleinsten positiven x-Wert hat.
Die Tangente in W_a an K_a schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist. (5 VP)

Abitur BW 2011 - Aufgabe I 3

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.

Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 150t^2 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

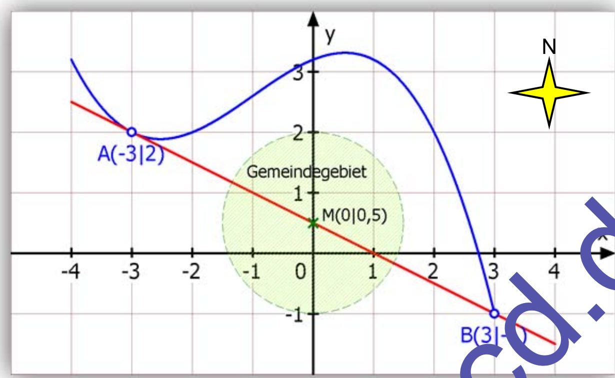
a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Wann erkranken die meisten Personen?
Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.
Wann nimmt sie am stärksten ab? ***CAS: und wie groß ist sie dann***? (6 VP)

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet. Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet.
Wie viele Personen sind nach 12 Wochen insgesamt gemeldet?
Die Funktion F mit $F(t) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0,2 \cdot t}$ ist eine Stammfunktion von f.
Geben Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.
Wann wird die Zahl von 20.000 gemeldeten Personen erreicht?
Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40.000 bleiben wird. (6 VP)

In einer benachbarten Stadt mit 30.000 Einwohnern ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an.
Gebe Sie eine zugehörige **Differenzialgleichung** an.
Bestimmen sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.
Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein?
Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22.000 Personen.
Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an. (6 VP)

Abitur BW 2012 - Aufgabe I 1



Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde.
Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1 ,5 km.
Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2.$$

1 LE entspricht 1 km.

a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße?
Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt M entfernt?
Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve.
Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.
Zeigen Sie, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet. (6 VP)

b) Zur Bewertung von Grundstücken wird die Fläche zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße vermessen.
Wie viel Prozent dieser Fläche liegen außerhalb des Gemeindegebiets? (4 VP)

c) Im Punkt $P(1{,}5 \mid 3)$ befindet sich eine Windkraftanlage.
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße.
Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich? (4 VP)

d) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB?
Welchen Abstand hat ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße höchstens von der Ortsdurchfahrt? (4 VP)

Abitur BW 2012 - Aufgabe I 2

Gegeben sind die Funktion f und für jedes $t > 0$ die Funktion g_t durch

$$f(x) = (\sin(x))^2 \quad \text{bzw.} \quad g_t(x) = t \cdot \sin(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g_1 für $0 \le x \le \pi$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.
Geben Sie die Periode und die Amplitude der Funktion f an.
An welchen Stellen unterscheiden sich die Funktionswerte von f und g_1 im skizzierten Bereich am stärksten? ***CAS:*** *Geben Sie die Lösung exakt an.*
Wie groß ist dieser Unterschied? (6 VP)

b) Für welchen Wert von t schneiden sich die Graphen von f und g_t im Ursprung unter einem Winkel von 45°?
Der Graph der Funktion f schließt im Bereich $0 \le x \le \pi$ mit der x-Achse eine Fläche ein.
Für welchen Wert von t hat die Fläche, die der Graph von g_t im gleichen Bereich mit der x-Achse einschließt, den gleichen Inhalt? (6 VP)

c) K ist der Graph der Funktion g_1.
Durch Spiegelung von K an der Geraden $h: y = 2$ entsteht der Graph K'.
Geben Sie eine zu K' gehörende Gleichung an.
K rotiert um die Gerade h.
Dadurch entsteht im Bereich $0{,}5 \le x \le 5{,}2$ das Modell eines Pokals, dessen Standfläche den Mittelpunkt $M(0{,}5 \mid 2)$ hat.
Der massive Boden des Pokals reicht von der Standfläche bis zur engsten Stelle.
Untersuchen Sie, ob ein Liter Flüssigkeit in den Pokal passt.
(1 LE entspricht 2,5 cm.) (6 VP)

Abitur BW 2012 - Aufgabe I 3

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer ***Spritze*** wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 130 \cdot \left(e^{-0{,}2 \cdot t} - e^{-0{,}8 \cdot t}\right) \qquad 0 \le t \le 24$$

(t in Stunden nach der Injektion, f(t) in mg).

Skizzieren Sie den Graphen von f.

Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind. Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.

Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. ab?

Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden. (7 VP)

Wenn das Medikament stattdessen durch ***Tropfinfusion*** zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0{,}05 \cdot t}\right) \qquad t \ge 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

b) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?

Ohne CAS: Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.

Mit CAS: *Zeigen Sie, dass die Zunahme der Wirkstoffmenge im Blut ständig geringer wird.*

Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1\frac{\text{mg}}{\text{min}}$?

In welchem 15-Minuten-Zeitraum ändert sich die Wirkstoffmenge um 30 mg? (7 VP)

c) Geben Sie eine **Differenzialgleichung** des beschränkten Wachstums an, die von der Funktion g erfüllt wird.

Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine konstante Wirkstoffmenge zugeführt. Die Abbaurate ist dabei stets proportional zur Wirkstoffmenge im Blut. Wie groß ist die konstante Zufuhr der Wirkstoffmenge pro Minute?

Welche Wirkstoffmenge müsste man pro Minute zuführen, damit sich langfristig 90 mg im Blut befinden? (4 VP)

Abitur BW 2013 - Aufgabe A 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8 \quad \text{mit} \quad -4 \le x \le 4 \quad \text{(x und f(x) in Meter).}$$

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1, 7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen? (6 VP)

b) Im Stollen soll in 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1 ,4 m von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann. (3 VP)

c) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. Wie breit darf der Behälter höchstens sein? (3 VP)

Aufgabe A 1.2

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x-1)\cdot\left(1-\frac{1}{t}e^x\right)$$

Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle? (3 VP)

Abitur BW 2013 - Aufgabe A 2

Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t) = 10000 \cdot \left(e^{-0,5t} - e^{-t}\right) \quad ; \quad 0 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, r(t) in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab? (4 VP)

b) Wie viel Wasser befindet sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank? (4 VP)

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion w mit

$$w(t) = r(t) - 400 \quad ; \quad 3 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, w(t) in Liter pro Stunde).

Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank.

Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \le x \le 1$.

Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.

Berechnen Sie A exakt. (4 VP)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei x = 0 und x = 1 und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g. (4 VP)

Abitur BW 2014 - Aufgabe A 1

Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$. Ihr Graph ist K .

a) K besitzt einen Extrempunkt und einen Wendepunkt. Geben Sie deren Koordinaten an.
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K an.
Skizzieren Sie K. (4 VP)

b) Für jedes u > 0 sind O(0 I 0), P(u I 0) und Q(u I f(u)) die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie einen Wert für u so, dass dieses Dreieck den Flächeninhalt 8 hat.
Für welchen Wert von u ist das Dreieck OPQ gleichschenklig? (4 VP)

c) Auf der x-Achse gibt es Intervalle der Länge 3, auf denen die Funktion f den Mittelwert 2,2 besitzt. Bestimmen Sie die Grenzen eines solchen Intervalls. (3 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist für jedes t > 0 eine Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$.

Bestimmen Sie t so, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t den Abstand 13 voneinander haben. (4 VP)

Abitur BW 2014 - Aufgabe A 2

Aufgabe A 2.1

Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden.
Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000} \quad ; \quad 0 \le t \le 30$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn; f(t) in Fahrzeuge pro Stunde).
Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal?
Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen. (4 VP)

b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.
Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen?
Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang?
Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde? (6 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2 \quad ; \quad -\pi < y < \pi .$$

Der Graph von f_a ist G_a.

a) G_a besitzt einen Extrempunkt.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten. (2 VP)

b) Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a? (3 VP)

Abitur BW 2015 - Aufgabe A 1

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4 \; ; \; -5 \le x \le 5 \quad \text{(x und f(x) in Meter).}$$

a) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte?
Wie breit ist er in 3 m Höhe?
In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5%?
Berechnen Sie das Volumen des Laderaums.

(5 VP)

b) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4 \mid f(-4))$ und $P_2(4 \mid f(4))$ beschrieben werden.

In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform?

(3 VP)

c) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m³.
Berechnen Sie die Breite der Zwischendecke.

(4 VP)

d) Untersuchen Sie, ob sich eine zylinderförmige Röhre mit Außendurchmesser 9,8 m so in Längsrichtung in den Laderaum legen lässt, dass sie ihn an der tiefsten Stelle berührt.

(3 VP)

Abitur BW 2015 - Aufgabe A 2

Aufgabe A 2.1

Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.

Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20(t+1)^2 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ · beschreibt die Geburtenrate und

die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^3 \cdot e^{-0,09 \cdot t}$ beschreibt die Sterberate der Population.

(t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, g(t) und s(t) in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.

(4 VP)

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20.000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960?

(3 VP)

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population.
Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand 0,8 m groß ist.
Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe 0,5 m und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,15 m pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50% zugenommen?

(4 VP)

Aufgabe A 2.2

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt $O(0\,|\,0)$ und die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f in Abhängigkeit von Kreisradius.

(4 VP)

Abitur BW 2016 – Aufgabe A 1.1

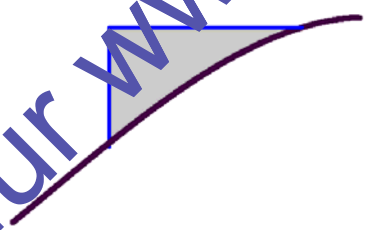
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$ beschreibt modellhaft für $-1 \le x \le 5$ das Profil eines Geländequerschnitts.

Die positive x-Achse weist nach Osten, f(x) gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an.

(1 Längeneinheit entspricht 100 m).

a) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt des Profils?
In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Geländequerschnitt an einer tiefsten Stelle 10 m tief ist.
Bestimmen Sie die Breite des Sees im Geländequerschnitt.
Ab einer Hangneigung von 30° besteht die Gefahr, dass sich Lawinen lösen.
Besteht an der steilsten Stelle des Profils zwischen See und höchstem Punkt Lawinengefahr?
(5 VP)

b) Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seitenwand im Geländequerschnitt liegt. Die Abbildung zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand. Die Oberkante der Wand verläuft waagrecht auf 540 m Höhe. Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.
Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als 130 m² ist. (3 VP)



c) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f anschließt. Ihr Scheitel liegt bei x = 6 und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals.
Auf welcher Höhe befindet sich dieser Punkt? (4 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

Es gibt einen Kreis, der den Graphen von h in dessen Schnittpunkten mit der x-Achse berührt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.

Abitur BW 2016 – Aufgabe A 2.1

In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 150 cm.
Die momentan Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16 \cdot e^{-0{,}5\,t} - 14 \cdot e^{-t} - 2 \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 12$$

(t in Stunden nach 10.00 Uhr, s(t) in Zentimeter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe.
Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist.
Wie hoch liegt der Schnee um 12.00 Uhr? (4 VP)

b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt.
Zu welchen Uhrzeiten beträgt die Schneehöhe 153 cm? (3 VP)

c) Um 12.30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht.
Um wie viele Stunden verlängert sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt?
Wie viele Zentimeter Schnee pro Stunde müssten die Schneekanonen ab 12.30 Uhr liefern, damit um 18.00 Uhr die Schneehöhe 160 cm betragen würde? (4 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion g_a gegeben durch

$$g_a(x) = a \cdot \cos(ax) \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2a} \le x \le \frac{\pi}{2a}$$

Der Graph von g_a schneidet die y-Achse in einem Punkt.
Die Strecke von diesem Punkt zum Ursprung ist die Diagonale einer Raute.
Die beiden weiteren Eckpunkte der Raute liegen auf dem Graphen von g_a.

a) Bestimmen Sie für a = 3 die Längen der beiden Diagonalen dieser Raute. (2 VP)

b) Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Raute ein Quadrat ist. (2 VP)

Abitur BW 2017 – Aufgabe A 1.1

Die Anzahl der Käufer einer neu eingeführten Smartphone-App soll modelliert werden.
Dabei wird die momentane Änderungsrate beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t}, \quad t \geq 0$$

(t in Monaten nach der Einführung, f(t) in Käufer pro Monat)

a) Zunächst werden nur die ersten zwölf Monate nach der Einführung betrachtet.
Geben Sie die maximale momentane Änderungsrate an.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer als 4000 Käufer pro Monat ist.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate am stärksten abnimmt bzw. zunimmt.
(4,5 VP)

b) Zeigen Sie, dass für t > 2 die Funktion f streng monoton fallend ist und nur positive Werte annimmt.
Interpretieren Sie dies i Bezug auf die Entwicklung der Käuferzahlen.
(4 VP)

c) Ermitteln Sie die Gesamtzahl der Käufer sechs Monate nach Einführung der App.
Bestimmen Sie den Zeitraum von zwei Monaten, in dem es 5000 neue Käufer gibt.
(3,5 VP)

d) Bei einer anderen neuen App erwartet man maximal 30 000 Käufer.
In einem Modell soll angenommen werden, dass sich die Gesamtzahl der Käufer nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums entwickelt.
Sechs Monate nach Verkaufsbeginn gibt es bereits 20 000 Käufer.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm, welcher die Gesamtzahl der Käufer in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
(3 VP)

Aufgabe A 1.2

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x - \frac{1}{x^3}$; $x \neq 0$.

a) Die Tangente an den Graphen von g im Punkt B verläuft durch P(0/-0,5).
Bestimmen Sie die Koordinaten von B. (2,5 VP)

b) Es gibt einen Punkt auf dem Graphen von g, der den kleinsten Abstand zur Geraden mit der Gleichung y = 2x – 1 besitzt.
Ermitteln Sie die x-Koordinate dieses Punktes. (2,5 VP)

Abitur BW 2017 – Aufgabe A 2.1

An einem Stausee wird der Zu- und Abfluss künstlich geregelt. Dabei wird die momentane Zuflussrate beschrieben durch die Funktion z mit

$$z(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25 \ ; \quad t \geq 0$$

Die konstante Abflussrate wird beschrieben durch die Funktion a mit

$$a(t) = 19 \ ; \ t \geq 0$$

(t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, z(t) und a(t) in $1000 \frac{m^3}{h}$)

a) Zunächst werden die ersten 24 Stunden nach Beobachtungsbeginn betrachtet.
Bestimmen Sie die minimale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum nimmt die Wassermenge im Stausee ab?
Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge. (4 VP)

b) Zu Beobachtungsbeginn befinden sich 2 500 000 m³ Wasser im See.
Bestimmen Sie die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Wassermenge in jedem 24-Stunden-Zeitraum um 144 000 m³ zunimmt.
Welchen Wert müsste die konstante Abflussrate haben, damit nach Ablauf von 14 Tagen die Wassermenge im Stausee 4 180 000 m³ betragen würde?` (5,5 VP)

Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$.

a) Der Gerade g durch den Hochpunkt H und den Tiefpunkt T des Graphen von f schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten P und Q:
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Strecke HT an der Strecke PQ. (4 VP)

b) Begründen Sie, dass die Steigung des Graphen von f keine Werte kleiner als -3 annehmen kann. (2 VP)

c) Der Graph von f und die Gerade h mit der Gleichung y = 2 schließen eine Fläche ein.
Diese Fläche rotiert um die Gerade h.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. (2,5 VP)

d) Eine Parallele zur x-.Achse schneidet aus dem Graphen von f ein Kurvenstück aus, das den Tiefpunkt enthält.
Die Endpunkte dieses Kurvenstücks haben den Abstand 2,5 voneinander.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parallelen. (2 VP)

Lösungen

Lösung 2010 - Aufgabe I.1.1

Auf einem ebenen Gelände befindet sich ein geradliniger, 500 m langer Lärmschutzwall.
Das Profil seines Querschnitts wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x)=\frac{120}{x^2+20}-2 \quad \text{und} \quad f(x)\geq 0 \quad \text{(x und f(x) in Meter).}$$

a) Wie breit ist der Wall an seinem Fuß?

1. Manuelle Lösung:

Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$\frac{120}{x^2+20}=2 \iff \frac{60}{x^2+20}=1 \iff 60=x^2+20 \iff x_{1,2}=\pm\sqrt{40}\approx\pm6{,}32$$

Die Breite des Walles an der Basis (x-Achse) beträgt $b=2\cdot6{,}32=12{,}64\ (m)$.

Zeigen Sie, dass der Wall einen symmetrischen Querschnitt besitzt.

Für alle x gilt: $f(-x)=\dfrac{120}{(-x)^2+20}-2=\dfrac{120}{x^2+20}-2=f(x)$

Also ist das Schaubild K von f symmetrisch zur y-Achse.

Der Wall soll begrünt werden. Um Erosion zu vermeiden, sollte das maximale Gefälle der Böschung nicht größer als 100% sein. Ist dies beim gegebenen Querschnittprofil der Fall?

WISSEN: Das größte Gefälle liegt an den Wendepunkten vor.

Zum Ableiten wird f umgeschrieben in

$$f(x)=\frac{120}{x^2+20}-2=120\cdot\left(x^2+20\right)^{-1}-2$$

$$f'(x)=-120\cdot\left(x^2+20\right)^{-2}\cdot 2x=-240\frac{x}{\left(x^2+20\right)^2}$$

$$f''(x)=-240\frac{1\cdot\overbrace{\left(x^2+20\right)^2}^{u}-\overbrace{2\left(x^2+20\right)\cdot2x}^{v'}\cdot x}{\left(x^2+20\right)^4}$$

$$f''(x)=-240\cdot\frac{\cancel{\left(x^2+20\right)}\cdot\left[\left(x^2+20\right)-4x^2\right]}{\left(x^2+20\right)^{\cancel{4}3}}=-240\cdot\frac{20-3x^2}{\left(x^2+20\right)^3}$$

Wendepunkt-Bedingung $f''(x)=0$

$$20-3x^2=0 \iff x^2=\tfrac{20}{3} \iff x_{1,2}=\pm\sqrt{\tfrac{20}{3}}\approx\pm2{,}58$$

Steigung bei x = 2,58:

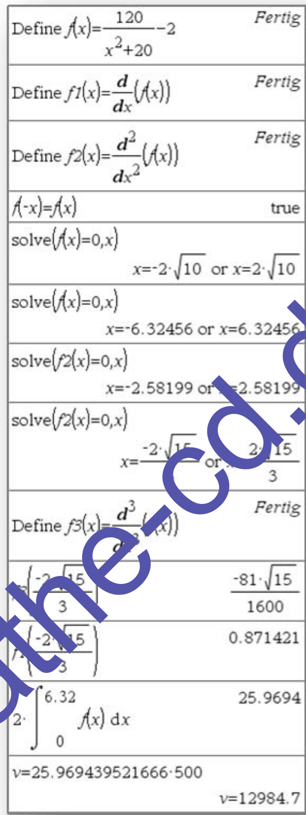
$$f'(2{,}58)=-240\cdot\frac{2{,}58}{\left(2{,}58^2+20\right)^2}\approx0{,}871=87{,}1\%$$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse gilt dies (abgesehen vom Vorzeichen) auch für x = - 2,58.

Ergebnis: Das maximale Gefälle ist kleiner als 100%.

***2. Mit einem Grafikrechner** stellt man den Graphen der 1. Ableitungsfunktion dar und lässt sich das Maximum anzeigen.*

3. Lösung mit TI Nspire CAS:



Der Reihe nach wurde erledigt:

Definition von f mit zwei Ableitungen.

Symmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ ist immer wahr.

Nullstellenberechnung (exakt und näherungsweise)

Daraus erhält man die Dammbreite $b = 2 \cdot 6{,}32 = 12{,}64$ (m)

Wendepunktberechnung: $f''(x) = 0$ (exakt und näherungsweise)

Berechnung der 3. Ableitung.

Kontrolle (Hinreichende Bedingung) für die rechte Wendestelle.

Steigung an der Wendestelle: 87,1%

b) Berechnen Sie das Volumen des Lärmschutzwalls.

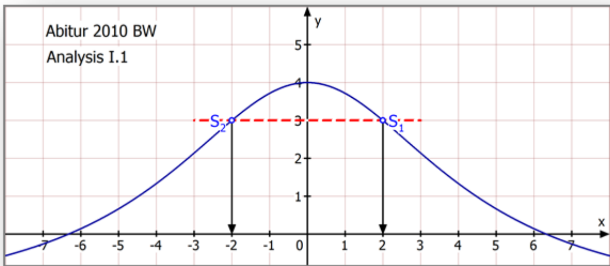
Querschnitt des Dammes:

$$A = \int_{-6{,}32}^{6{,}32} f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad A = 2 \cdot \int_{0}^{6{,}32} f(x)\,dx \approx 25{,}97$$

Volumen: $V = A \cdot L \approx 12985 \ (m^3)$

Es ist geplant, den Wall auf 3 m Höhe abzutragen, um darauf einen Fahrweg anzulegen.
Welche Breite hätte dieser Fahrweg?

Manuelle Lösung:



$$f(x) = \frac{120}{x^2+20} - 2 = 3$$

$$\frac{120}{x^2+20} = 5 \qquad |:5 \text{ und } | \cdot (x^2+20)$$

$$24 = x^2 + 20 \quad \text{d.h.} \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_S = \pm 2$$

Die Breite des Fahrwegs ist also 4 m.

Das abzutragende Material soll dazu verwendet werden, den abgeflachten Wall zu verlängern.
Um wie viel Meter würde er länger?

Berechnung des Volumens des abgetragenen Materials:

Querschnittsfläche: $A_1 = \int_{-2}^{2} [f(x) - 3]\,dx$ oder $A_1 = 2 \cdot \int_{0}^{2} (f(x) - 3)\,dx \approx 2{,}57$ (CAS oder GTR).

Volumen: $\Delta V = A_1 \cdot 500 \approx 1284 \ (m^3)$

Dieses Volumen verteilt sich auf die abgeflachte Querschnittsfläche $A_2 = 25{,}97 - 2{,}57 = 23{,}40 \ (m^2)$

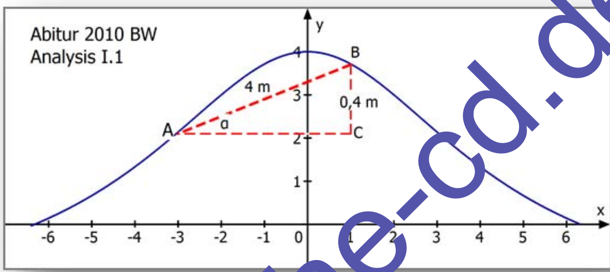
Aus $\Delta V = A_2 \cdot d$ folgt $d = \frac{\Delta V}{A_2} = \frac{1284}{23{,}40} \approx 54{,}9$ m

Ergebnis: Der Wall würde um 54,9 m länger.

c) Statt der Planung aus Teilaufgabe b) wird am ursprünglichen Wall die Erde so abgetragen, dass der Fahrweg seitlich geneigt ist. Sein rechter Rand liegt 0,4 m höher als sein linker Rand. Die Breite des Fahrwegs beträgt 4 m.
Bestimmen Sie den Winkel, um den der Fahrweg gegenüber der Horizontalen geneigt ist, auf zwei Dezimalen genau.
In welcher Höhe befindet sich der linke Rand des Fahrwegs?

Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt:

$$\sin\alpha = \frac{0,4}{4} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}(0,1) \approx 5,74^{\circ}$$



Länge der Strecke AC nach Pythagoras:

$$\overline{AC} = \sqrt{16 - 0,16} \approx 3,98\,(m).$$

Daraus kann man herleiten:

Es gilt: $f(x_B) = f(x_A + 3,98)$

und $f(x_B) = f(x_A) + 0,4$

Gleichsetzen: $f(x_A + 3,98) = f(x_A) + 0,4$

solve(f(x+3.98)=f(x)+0.4,x)	x=-14.4657 or x=-2.23119
f(-2.23119)	2.80419

Die Rechnerlösung zeigt zwei Ergebnisse, von denen nur x_A = -2,23 in Frage kommt.
Daraus folgt dann als Höhe 2,80 m.

Mehr auf der CD.